



专升本

教育部师范教育司组织编写
中学教师进修高等师范本科(专科起点)教材

数学分析专题研究

王昆扬 编



高等教育出版社

872

017-43

W33

教育部师范教育司组织编写
中学教师进修高等师范本科(专科起点)教材

数学分析专题研究

王昆扬 编

高等教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学分析专题研究/王昆扬编. —北京:高等教育出版社, 2001 (2002 重印)

中学教师进修高等师范本科(专科起点)教材

ISBN 7-04-009444-4

I. 数… II. 王… III. 数学分析-中学-师资培训-教材 IV. 017

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 21617 号

数学分析专题研究

王昆扬 编

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社 址	北京市东城区沙滩后街 55 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100009	网 址	http://www.hep.edu.cn
传 真	010-64014048		http://www.hep.com.cn
经 销	新华书店北京发行所		
排 版	高等教育出版社照排中心		
印 刷	高等教育出版社印刷厂		
开 本	850×1168 1/32	版 次	2001 年 6 月第 1 版
印 张	8	印 次	2002 年 9 月第 3 次印刷
字 数	190 000	定 价	8.50 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

序 言

本教材是根据教育部师范教育司制订 (2000 年 1 月出版) 的“中学教师进修高等师范本科 (专科起点) 教学计划 (试行)”编写的。其目的是使学员更好地掌握数学分析的理论及专科《数学分析》课程中未学过的某些内容, 为学习数学专业本科各门课程打下更好的理论基础。

编写时力图做到联系中学数学的教学实践; 同时注意到使教材在有广泛的适用性、通用性的前提下, 为基础好能力强的学生留出充分的进一步发展的余地。

全书共五章。下面分别说一说各章的要点。

第一章, 极限理论与实数理论。这章的内容对于中学教师来说是最基本的, 也是最重要的。其中对于中学课本中讲过的无理数、指数函数、对数函数等基本概念, 用极限的观点进行的讲解, 直接关系中学的教学。我们把函数概念的介绍作为本章 § 6 的内容, 意在强调对于函数的一切讨论 (包括定义), 都是以极限和实数概念为基础的。

第二章, 一元函数积分理论。应着重掌握 Riemann 积分的定义、算法 (微积分基本定理) 以及在力学物理中的应用。

第三章, 级数理论。应该在掌握基本理论的基础上, 对于用代数多项式近似 (逼近) 其它初等函数的思想有所了解。

第四章, 含参变量的反常积分。本章处理的问题, 实质上是多变量函数关于不同的变量的极限过程的交换次序的问题。这类问题大多是在实际计算中产生的。处理这些问题, 可以看作是对微积分基本概念的极好的练习。

第五章，多元微积分中的若干问题。分五节。§1 介绍多元函数的导数，它包含一元函数的情形为特例。但多于一元的情形和一元的情形又有本质上不同之处。§2 讲多元函数的 Riemann 积分，它是第二章一元函数积分的直接推广，其中介绍了现代分析中常用的空间二进网格划分方法。§3、§4、§5 讲 $\mathbb{R}^3$ 中的曲线和曲面上的积分，以及一些计算公式。这几节一定要结合几何的直观和物理的应用实例去掌握，学习这几节不要过分拘泥于几何上的细节的讨论。曲线和曲面上的积分是 Riemann 积分理论的具体应用。各种不同形式的积分的基本算法，说到底，是把问题归结为使用一元函数积分的 Newton-Leibniz 公式。

按教学计划规定，本课程的课时数为 54。建议如下分配：

第一章，16 课时；第二章，10 课时；第三章，10 课时；第四章，6 课时；第五章，12 课时。

建议学前三章时把概念搞透；学后两章时在计算上多花费些精力，而不必在证明的细节上花太多时间。

本教材的初稿，曾于 1999 年夏和 2000 年冬分别为河北省唐山地区的函授学员和内蒙古自治区赤峰地区的函授学员讲授过。其中第一章的大部分内容还于 2000 年春、秋两度在中学骨干教师国家级培训中使用过。

作者衷心感谢审稿人对书稿提出的宝贵意见。作者参照这些意见做了认真的修改。还望教师们和学员们在使用中多提意见，以便进一步修改。

王昆扬 于北京师范大学

2000 年 12 月 2 日

目 录

第一章 极限理论与实数理论	1
§1 有理数	1
习题 1.1	6
§2 有理数的小数表示	7
习题 1.2	13
§3 实数的定义	13
习题 1.3	23
§4 有理数有多少? 无理数有多少?	25
习题 1.4	30
§5 实数列与实数集的一些性质	30
习题 1.5	36
§6 函数	37
6.1 初等函数及其连续性	37
6.2 关于函数, 函数的极限及连续的定义的 补充说明	48
6.3 复合函数	59
6.4 连续函数空间 $C(E)$	60
习题 1.6	63
§7 两点说明	65
习题 1.7	68
第二章 积分理论	69
§1 Riemann 积分的定义	69
1.1 定义	69
1.2 可积函数	77

1.3 可测集	78
习题 2.1	86
§2. 区间上连续函数的积分	86
习题 2.2	89
§3 微积分基本定理	90
3.1 微积分基本定理	90
3.2 计算积分的换元法	92
3.3 分部积分法	94
3.4 进一步的例题	95
习题 2.3	99
第三章 级数理论	101
§1 收敛判别法	101
习题 3.1	111
§2 一致收敛	112
习题 3.2	120
§3 求和号下取极限	122
习题 3.3	130
§4 幂级数与 Taylor 级数	131
4.1 一般性讨论	131
习题 3.4.1	138
4.2 函数的 Taylor 展开	139
习题 3.4.2	147
第四章 含参变量的反常积分	149
§1 积分号下取极限的定理	151
习题 4.1	164
§2 判断参变反常积分一致收敛的充分条件	165
习题 4.2	170

§3 Euler 积分	171
习题 4.3	176
第五章 多元微积分中的若干问题	177
§1 多元函数的导数	177
习题 5.1	183
§2 多元函数的 Riemann 积分	184
2.1 基本概念	184
习题 5.2.1	187
2.2 多元函数的积分的计算	187
习题 5.2.2	194
§3 $\mathbb{R}^3$ 中曲线上的 Riemann 积分	195
3.1 曲线的长度	197
习题 5.3.1	203
3.2 第一型曲线积分	203
习题 5.3.2	209
3.3 第二型曲线积分	210
习题 5.3.3	216
§4 $\mathbb{R}^3$ 中曲面上的 Riemann 积分	217
4.1 曲面的面积	218
习题 5.4.1	222
4.2 第一型曲面积分	223
习题 5.4.2	224
4.3 第二型曲面积分	225
习题 5.4.3	229
§5 Green 公式, Gauss 公式和 Stokes 公式	230
5.1 $\mathbb{R}^2$ 中的 Green 公式	230
5.2 Gauss 公式	232

习题 5.5.1-2	234
5.3 $\mathbb{R}^3$ 中的 Stokes 公式	235
习题 5.5.3	240
人名索引	242
符号及名词索引	244

第一章 极限理论与实数理论

我们从无限不循环小数谈起. 在初中二年级的课本中, 明确地定义: **无限不循环小数叫做无理数**. 请问: 你是怎样理解这个定义的? 又是怎样向学生讲述这个定义的? 你的学生们又是怎样理解这个定义的?

要回答这些问题, 必须引入极限的概念. 这是本章要讨论的主要问题.

本章要讨论的另一个问题是初等函数的定义及其连续性. 这也必须使用极限的概念.

§1 有 理 数

下面的定义是众所周知的.

定义 1.1 正的整数和分数, 负的整数和分数以及零, 统称为有理数.

根据这个定义, 我们要理解“无限不循环小数叫做无理数”, 就应该先证明有理数不是“无限不循环小数”. 不然的话, 我们的定义就失去了概念的确定性, 就不成其为定义. 那么, 不是“无限不循环小数”的数又是什么数呢?

我们来回想一下一些熟知的概念. 用 $\mathbb{N}_+$ 代表全体正整数所成的集合, 用 $\mathbb{N}$ 代表全体非负整数所成的集合. 设 m 是正整数,

$$a_k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, \quad k = 1, \dots, m.$$

采用十进制, 我们把形如 $0.a_1, \dots, a_m$ 的数叫做有限小数, 它的值是

$$\frac{a_1}{10} + \dots + \frac{a_m}{10^m} = \frac{a_1 \cdots a_m}{10^m}.$$

我们还知道, $\frac{1}{3} = 0.333333\cdots$, 并且把它叫做以 3 为循环节的“无限循环小数”, 简单地记做 $0.\dot{3}$. 请问, 你是怎样理解这个数的? 你可能会说, 不管 m 多么大, $0.\dot{3}$ (也就是 $\frac{1}{3}$) 都比有限小数

$$0.\overbrace{3\cdots 3}^{m\uparrow}$$

大, 而且比有限小数

$$0.\overbrace{3\cdots 3}^{m\uparrow}4$$

小. 这个理解是正确的. 如果把对于 $0.\dot{3}$ 的这种解释一般化, 抽象出来, 就必须利用有理数列的 **极限** 的概念. 现在我们就来叙述有理数列的极限的定义.

先说一说什么是 **有理数列**.

设 A 和 B 都是非空集合 (简称为“集”). 若有一个法则, 使得对于 A 的任意一个元素 (简称为“元”) a , 按照这个法则, 有 B 中唯一一个元素 a' 与之对应, 那么我们就说这个法则是从 A 到 B 的映射. 可用任意一个英文字母来代表映射. 设 T 是集 A 到集 B 的映射, $a \in A$ (读做 a 属于 A , 有时也写做 $A \ni a$). 把按照法则 T , 在 B 中那个与 a 对应的元 a' 叫做 a 在映射 T 下的象, 记做 $T(a)$. 用符号 $\{T(a) : a \in A\}$ 表示 A 的一切元的象的全体所成的集合, 简记为 $T(A)$, 叫做 A 在 T 下的象 (或值域).

我们用 $\mathbb{Q}$ 代表全体有理数所成的集合, 简称为有理数集.

定义 1.2 (有理数列) 若 f 是从 $\mathbb{N}$ 到 $\mathbb{Q}$ 的映射, 则称 f 为有理数列, 记做 $f = \{f(n)\}_{n=1}^{\infty}$. 当然, 也可用其它记号, 如 a_n, b_n 等来代表 $f(n)$. 还可以把数列展开来写成

$$(f(1), f(2), f(3), \cdots).$$

注意, f 的值域 $f(\mathbb{N}_+) = \{f(n) : n \in \mathbb{N}_+\}$ 与数列 f 本身是两个概念. 例如, 当 $f(n)$ 恒等于 1 时, 数列 $f = (1, 1, 1, \dots)$, 但 $f(\mathbb{N}_+) = \{1\}$ 是一个仅以数 1 为其元素的单元元素集.

若无说明, 本节所讲的数列均指有理数列.

定义 1.3(有理数列的极限) 设 $f = \{f(n)\}_{n=1}^\infty$ 是一个有理数列.

- (1) 如果有一个有理数 ℓ , 使得对于任意的 $k \in \mathbb{N}_+$, 总找到 $n_k \in \mathbb{N}_+$, 当 $n > n_k$ 时 $|f(n) - \ell| < \frac{1}{k}$, 那么, 就说数列 f 收敛到极限 ℓ , 记做 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = \ell$.
- (2) 如果对于任意的 $k \in \mathbb{N}_+$, 总找到 $n_k \in \mathbb{N}_+$, 使得当 $n > n_k$ 时 $f(n) > k$, 那么, 就说数列 f 发散到极限 ∞ (读做正无穷), 记做 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = \infty$.
- (3) 如果对于任意的 $k \in \mathbb{N}_+$, 总找到 $n_k \in \mathbb{N}_+$, 使得当 $n > n_k$ 时 $f(n) < -k$, 那么, 就说数列 f 发散到极限 $-\infty$ (读做负无穷), 记做 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = -\infty$.
- (4) 不收敛的情形都叫做发散.

从定义看到, $\{f(n)\}_{n=1}^\infty$ 收敛到 ℓ 与 $\{f(n) - \ell\}_{n=1}^\infty$ 收敛到 0 等价, 也与 $\{|f(n) - \ell|\}_{n=1}^\infty$ 收敛到 0 等价.

说明一下, ∞ 和 $-\infty$ 都只是符号而不是数. 但为了方便, 我们规定, 对于任意的数 a ,

$$-\infty < a < \infty.$$

例 1 自然数列 $\{n\}_{n=1}^\infty$ 发散到 ∞ .

例 2 设 $q \in \mathbb{Q}$, $q > 0$. 数列 $\{q^n\}_{n=1}^\infty$ 是我们熟知的公比 (即

后一项与前一项的比) 为 q 的等比数列. 显然, 当 $q > 1$ 时

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \infty.$$

而当 $0 < q < 1$ 时

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0.$$

例 3 设 $q \in \mathbb{Q}, 0 < q < 1$. 令 $s_n = \sum_{k=0}^n q^k, n \in \mathbb{N}_+$. 这个符号的意思是

$$\sum_{k=0}^n q^k := 1 + q^1 + \cdots + q^n.$$

我们用 “:=” 表示等号右边的内容是冒号左边的符号的定义.

我们来考察数列 $\{s_n\}_{n=1}^\infty$ 的极限. 我们知道

$$s_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

显然

$$0 < \frac{1}{1 - q} - s_n = \frac{q^{n+1}}{1 - q}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - q} - s_n = 0.$$

所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{1}{1 - q}.$$

定义 1.4(基本列) 设 $f = \{f(n)\}_{n=1}^\infty$ 是数列. 如果对于任意的 $k \in \mathbb{N}_+$, 总找得到 $n_k \in \mathbb{N}_+$, 使得当 $m, n > n_k$ 时

$$|f(m) - f(n)| < \frac{1}{k},$$

那么, 就说数列 f 是基本列 (或 Cauchy 列).

Cauchy, A.L., 法国人, 1789—1857.

定理 1.1 收敛数列必是基本列.

证 设数列 f 收敛到 ℓ . 那么, 不管 $k \in \mathbb{N}_+$ 多大, 总找得到 $n_k \in \mathbb{N}_+$, 使得当 $n > n_k$ 时, $|f(n) - \ell| < \frac{1}{2k}$. 于是, 当 $m, n > n_k$ 时

$$|f(m) - f(n)| < |f(m) - \ell| + |\ell - f(n)| < \frac{1}{k}. \square$$

定义 1.5(子列) 设 f 和 g 都是数列, g 只取自然数值且严格递增, 即对于一切 $n \in \mathbb{N}_+$, 有 $g(n) \in \mathbb{N}_+$, 并且 $g(n) < g(n+1)$. 那么, 称数列 $\{f(g(n))\}_{n=1}^{\infty}$ 为 f 的子列, 记之为 $f \circ g$.

在上述定义中, 如果把 $g(k)$ 写成 n_k , ($k \in \mathbb{N}_+$), 那么子列就被写成 $\{f(n_k)\}_{k=1}^{\infty}$. 通俗地说, 子列就是从原数列中保持原顺序, 挑出无限多项所成的数列.

定义 1.6 设 f 和 g 都是数列. 如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} (f(n) - g(n)) = 0$ 那么就说 f 和 g 等价.

显然, 数列的等价关系具有反身性、对称性和传递性. 也就是说, 任何数列 f 必与自己等价; 若 f 与数列 g 等价, 则 g 与 f 等价; 若 f 与 g 等价, 且 g 与数列 h 等价, 则 f 与 h 等价.

定理 1.2 若数列 f 有极限 ℓ , (ℓ 可以是有理数, 可以是 ∞ , 也可以是 $-\infty$), 则任何与它等价的数列也有极限 ℓ .

定理的证明是简单的, 留做习题.

定理 1.3 若 f 是基本列, 则它的子列与它等价.

定理的证明是简单的, 留做习题.

定理 1.4 若 f 和 g 分别收敛到 a 和 b , 且 $c, d \in \mathbb{Q}$, 那么

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (cf(n) + dg(n)) = ca + db, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (f(n)g(n)) = ab.$$

如果还知 $b \neq 0$, 那么

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \frac{a}{b}.$$

注 由于 $b \neq 0$, 当 n 充分大时必有 $g(n)b > 0$ 成立, 所以 $\frac{f(n)}{g(n)}$ 对于一切大的 n 有定义. 那么, 谈到它的极限, 总把前有限项使 $g(n) = 0$ 者略去不要.

定理的证明是简单的, 留做习题.

最后我们规定, 说一个数列 $\{f(n)\}_{n=1}^{\infty}$ 是有上界的, 指的是存在一个数 a , 使得对于每个 $n \in \mathbb{N}_+$ 都有 $f(n) < a$; 说一个数列 $\{f(n)\}_{n=1}^{\infty}$ 是有下界的, 指的是存在一个数 b , 使得对于每个 $n \in \mathbb{N}_+$ 都有 $f(n) > b$; 说一个数列 f 有界, 指的是它既有上界又有下界. 显然, 极限为 ∞ 的数列无上界, 而极限为 $-\infty$ 的数列无下界. 收敛的数列是有界的 (见习题 1.1, 题 5).

习 题 1.1

1. 请给出定理 1.2, 1.3, 1.4 的证明.

2. 设

$$t_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} := \frac{1}{1 \cdot 2} + \cdots + \frac{1}{n \cdot (n+1)}.$$

求 $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n$.

3. 设 $a \in \mathbb{Q}, a > 1, k \in \mathbb{N}$. 求

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a^n}.$$

4. 设有理数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 和 $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ 分别收敛到有理数 x 和 y . 求

证

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max(x_n, y_n) = \max(x, y).$$

注意, $\max(\cdots)$ 表示 () 中的数之最大者, $\max$ 是 maximum 的略写.

5. 证明: 基本列一定是有界的.

6. 设 f, g 都是有极限的数列. 若对于每个 $n \in \mathbb{N}_+$ 都有 $f(n) \leq g(n)$, 那么

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} g(n).$$

7. 我们把边长为 1 的正方形的对角线的长度记做 $\sqrt{2}$, 它大于 0, 并且它的平方等于 2. 请证明它不是有理数.

§2 有理数的小数表示

下面我们从极限的观点严格讨论有理数的十进计数制表示 (简称为十进表示) 的问题.

定义 2.1 设 $k \in \mathbb{N}_+$, $a_k \in \{0, 1, \cdots, 9\}$, 并且不管 N 多大, 都存在 $k > N$ 使得 $a_k < 9$. 设 $p \in \mathbb{Z}$. 称记号

$$p + 0.a_1a_2a_3 \cdots \quad (2.1)$$

为 **十进小数** (简称为小数), 称 p 为它的整部.

定义 2.2 设 $p + 0.a_1a_2a_3 \cdots$ 是一个十进小数, 简记之为 A . 令

$$A_n = p + 0.a_1 \cdots a_n = p + \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{10^k}, \quad n \in \mathbb{N}_+.$$

称有理数列

$$\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \quad (2.2)$$

为与小数 (2.1) 对等的数列. 与一个小数对等的数列叫做 **标准列**.

命题 2.1 标准列是基本列.

证 设 $g = \{p + f(n)\}_{n=1}^{\infty}$ 是标准列, 其中

$$f(n) = 0.a_1a_2\cdots a_n, \quad n \in \mathbb{N}_+.$$

对于任给的 $k \in \mathbb{N}_+$, 当 $\mu, \nu \in \mathbb{N}_+$ 且 $\mu, \nu > k$ 时显然有

$$|g(\mu) - g(\nu)| = |f(\mu) - f(\nu)| < 10^{-k} < \frac{1}{k}. \square$$

定义 2.3 设 $m \in \mathbb{N}_+$, $a_1, \cdots, a_m$ 是 m 个不全为 9 的取值于 $\{0, 1, \cdots, 9\}$ 的数字. 设 $p \in \mathbb{Z}$. 把小数

$$p + 0.a_1\cdots a_m a_1\cdots a_m \cdots \quad (2.3)$$

叫做以 $a_1\cdots a_m$ 为循环节的 (十进) **循环小数** 简记之为

$$p + 0.\dot{a}_1\cdots \dot{a}_m.$$

如果 $b_1, \cdots, b_\mu \in \{0, 1, \cdots, 9\}$ ($\mu \in \mathbb{N}_+$), 则也把小数

$$p + 0.b_1\cdots b_\mu a_1\cdots a_m a_1\cdots a_m \cdots \quad (2.4)$$

叫做以 $a_1\cdots a_m$ 为循环节的 (十进) **循环小数**, 简记之为

$$p + 0.b_1\cdots b_\mu \dot{a}_1\cdots \dot{a}_m.$$

一个小数如果不是循环小数就叫做 **不循环小数**.