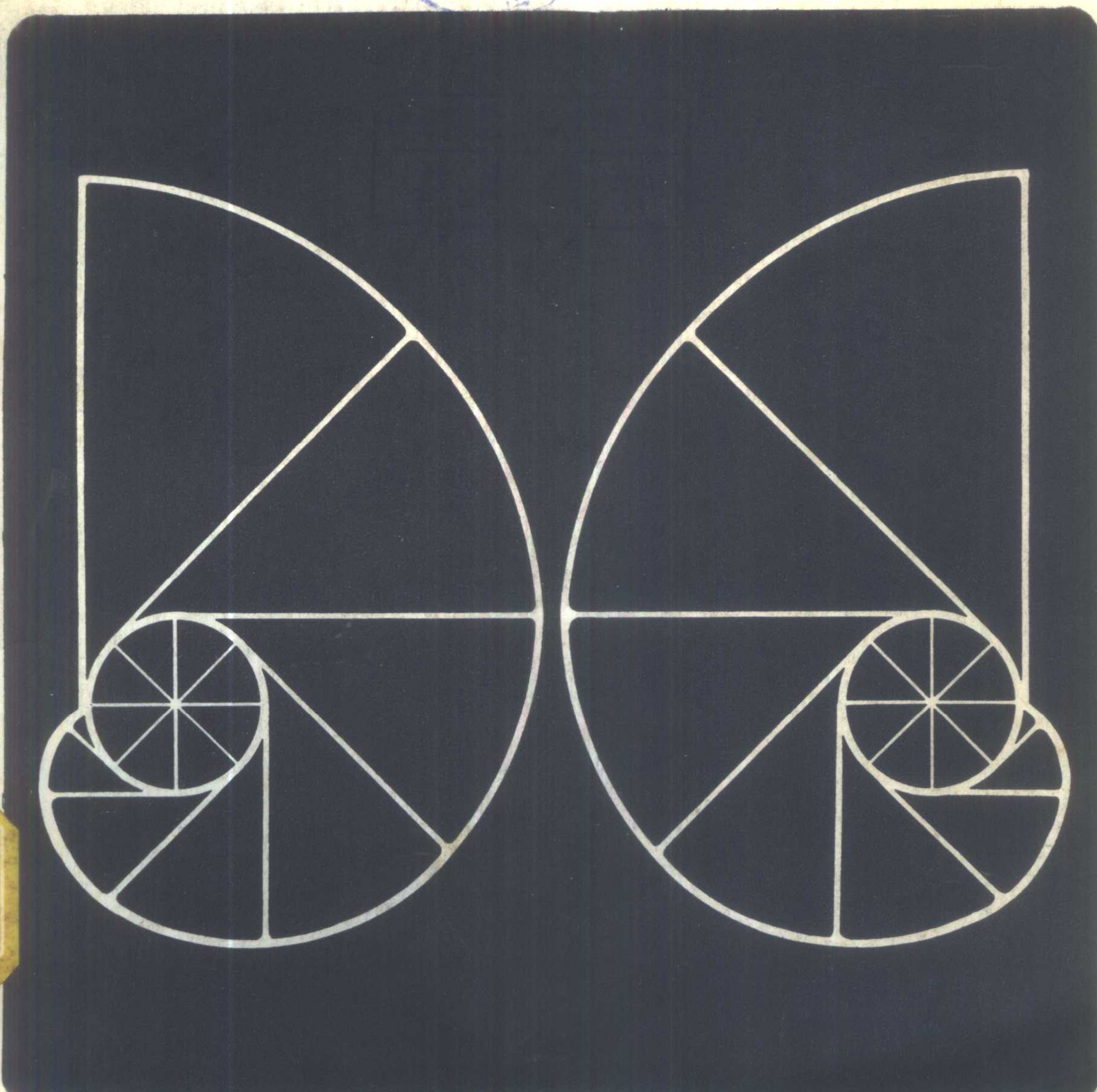
画法几何学

北京工业学院《画法几何学》编写组 编著 · 国防工业出版社 出版



画 法 几 何 学

北 京 工 业 学 院
《画法几何学》编写组 编著

国防工业出版社

内 容 简 介

本书是高等院校教材。全书共分八章，包括正投影图基础，直线、平面，直线、平面的相对位置，投影变换，曲线、曲面，曲面立体的相交，图解与计算，轴测投影图等。书后有附录，介绍了第三角投影等。本书编写的特点，在于加强图示、图解、空间想像和空间思维等能力的培养。在编写上，围绕着加强正投影介绍了透视仿射对应、投影变换的各种方法以及图解与计算等内容。为使本教材适应不同的要求，教材中属于教学大纲规定的选学部分的内容（在章节或标题前标有*）在各章中具有独立性，便于取舍。与本书配套的有《画法几何学习题集》一本。

本书适用于高等工业院校机械类专业师生、中等专业学校教师及工程技术人员。

画 法 几 何 学

北京工业学院《画法几何学》编写组 编著

责任编辑 张仁杰

*

国防工业出版社 出版

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

国防工业出版社印刷厂印装

*

787×1092 1/16　印张 16 1/4　376千字

1982年12月第一版　1982年12月第一次印刷　印数：00,001—20,600册

统一书号：15034·2460　定价：2.00元

前　言

本教材在总结近三十年来教学工作经验的基础上，参照一九八〇年的高等工业学校《画法几何及工程制图教学大纲》（机械类）的精神，从加强图示、图解、空间想像和空间思维等能力的培养出发而编写的。在编写上，围绕着加强正投影有以下几点考虑：

一、在第一章正投影图基础中，编入了透视对应和透视仿射对应。把两个对应作为基本概念之一，贯彻在各主要章节中。介绍正投影与透视仿射对应的内在联系和相互转化，并通过在正投影图上运用对应概念作图，加深对正投影图的认识和掌握对应作图的基本方法，从而达到加强基本理论和基本作图的目的。

二、在第一章介绍两个对应，以及在第二章介绍一次换面的基础上，在第四章投影变换中，除系统地介绍换面法和旋转法外，又介绍了重合法和辅助投影法，以利于根据不同情况灵活运用各种方法解决问题，开阔思路，扩大知识面。但为达到教学要求，可以指定方法解题或一题多解。

三、形数结合是发展图解法应用的一个方向，在各章节注意贯彻，在第七章图解与计算中集中介绍，以利于加强图解法。

为使本教材适应不同的要求，其中属于教学大纲选学部分的内容（在章节或标题前标有*）在各章中具有独立性，以便于取舍。教材重学科系统，而教学顺序可根据具体情况安排，如第一章的透视对应和透视仿射对应两节，可安排在平面上的点和直线以后讲授。

各章后均附有小结，指出各章的重点和内容的相互联系。它也起到各章内容简介的作用。因此，在阅读全章之前，先看一下小结也有好处。

本教材曾经过多年的教学实践。把教学大纲选学部分的某些内容编入教材后，曾作过教学试点。认为在与教学大纲基本相同的学时内，通过改进教学方法，贯彻这些内容是完全可能的。

与本教材配套的尚有《画法几何学习题集》一本。

本书编写组成员（按负责编写章节的次序排列）有：叶玉驹、陈英梁、简召全、蒋知民、张延春、齐信民。主编，陈英梁。最后由简召全、陈英梁、叶玉驹对全书进行了审阅。

限于我们的水平，书中一定存在不少缺点、错误，希读者批评指正。

编　者

目　录

绪　论

一、画法几何学的研究对象

画法几何学是研究投影理论和方法，并用以解决空间几何问题的学科，包括图示法和图解法两部分内容。

图示法是研究如何将空间几何元素（点、线、面）与几何形体的有关形状、位置等问题表示在图纸平面上；如何根据平面上的投影图形确定空间几何元素与几何形体的形状、位置等问题，亦即研究平面上的投影图形和空间的原形之间的一一对应问题。

图解法是研究如何在平面上用作图的方法解决空间几何问题，以及用图形表达和解决某些数学关系（如矢量）的理论和方法。图解法具有直观、简便的优点，对一般工程问题也有一定的精度。但是由于操作和仪器、工具的误差，作图精度毕竟受到一定的限制。图解与计算的结合，可以保留图解法的优点，并克服其作图精度较低的缺点。

二、课程的任务和目的

1．学习平行投影的基本理论，着重掌握正投影法的原理和应用；了解轴测投影的基本知识，并掌握其基本画法。

2．培养空间几何问题的图解能力，能作图解决空间定位问题（平行、相交、从属关系等）和度量问题（距离、角度、实形等）。

3．培养空间想象能力与空间思维能力。

图样是工程界的技术语言。在现代化的工、农业生产和科学研究中要用到各种工程图样。图样不仅是各项工程、设备、机器和仪器的施工和生产的主要依据，而且也是进行科学技术交流的一种工具。画法几何学为工程图样提供了图示和图解的理论基础。

三、学习方法

1．画法几何学是一门有系统理论的学科。它有一个鲜明的特点，就是必须将对平面图形的投影分析与对几何元素、几何形体的空间想象结合起来，即空间与平面的紧密结合。在学习过程中应注意空间想象能力与空间思维能力的培养，两者是缺一不可、相辅相成的。空间想象能力就是指在解题过程中，能对于解题方案、作图步骤及作图结果等有一个比较清晰的空间形象。空间思维能力就是指对空间几何问题的逻辑思维能力（概念、判断、推理的能力），即应学会运用综合、分析、演绎、归纳等方法分析问题和解决问题。对于初学者来说，应当具备初等几何，特别是立体几何的有关知识，这是学习本课程的一个必要条件。

2．画法几何学是一门基础课，要掌握它，必须通过大量的实践。因此，在掌握基本理论的同时，必须仔细研究每一个图例的分析方法和作图步骤，并且认真地、独立地完成一整套作业。

3．知识的积累和能力的提高要靠每个人的艰苦劳动和努力。因此，应结合自己的具体情况，不断总结经验，改进学习方法。

第一章　正投影图基础

§1-1　投　影　法

在日常生活中经常可以看到一些投影现象，如物体在光源（日光或灯光）的照射下，就会出现物体的影子（见图1-1）。投影的方法就是从这些自然现象抽象出来，并随着生产的发展而发展起来的。常用的投影法有两大类：中心投影法和平行投影法。

一、中心投影法

把图1-1所示的投影现象抽象为图1-2所示情况，光源用点S表示，称为投影中心；光即线为投射线（如SA、SB、SC）；桌面即为投影面H。自点S过$\triangle ABC$的各顶点作投射线SA、SB、SC，它们的延长线与H面分别交于a、b、c三点，该三点分别为空间点A、B、C在H面的中心投影。而$\triangle abc$即为$\triangle ABC$在H面的中心投影●。

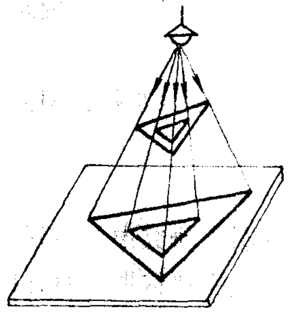


图　1-1

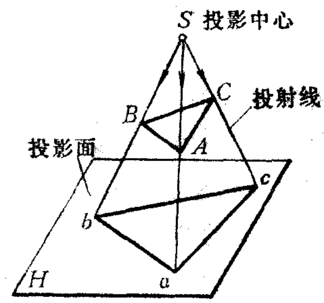


图　1-2

因为空间的直线和平面有唯一的交点（一般情况），所以，由上述的投影过程可见，空间的一个点（如A），自确定的中心S进行投影，在H面上只存在唯一的一个投影（如$SA\cap H=a$）。

二、平行投影法

如果把中心投影的投影中心移至无穷远点（也称非固有点），此时各投射线就成为相互平行的，在这种特殊条件下，投影中心只能用投射方向S来表示，这样的投影就称为平行投影。只要自空间各点分别引与S平行的投射线，在投影面H的交点处即可得到空间各点在H面上的平行投影（见图1-3）。

显然，在确定的投射方向下，空间的一个点在H面的平行投影也是唯一确定的。

根据投射方向S与投影面H的倾角不同，平行投影法又可分为（见图1-4）：

● 今后规定用大写字母（如A、B、C）表示空间的点，用小写字母（如a、b、c）表示相应空间点的投影。

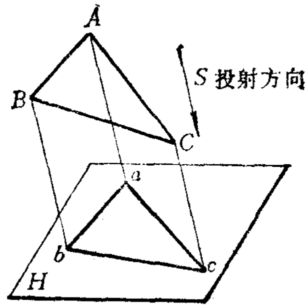


图 1-3

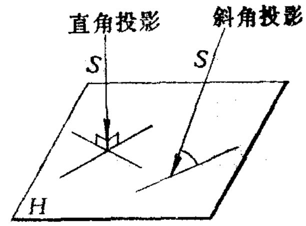


图 1-4

（1）直角投影法——投射方向 S 垂直于投影面；

（2）斜角投影法——投射方向 S 倾斜于投影面。

§1-2 平行投影的基本性质

平行投影有如下的基本性质：

（1）直线的投影一般还是直线，如图1-5。因为组成直线AB的每一个点都投影为点，而投影各点的所有投射线形成一投射平面$ABba$，该投射平面与H面的交线ab即为直线AB的投影。因此，一般情况下直线的投影还是直线。

点的投影是点，直线的投影是直线，投影所具有的这一性质称为同素性。

（2）点在直线上，则该点的投影一定在该直线的投影上，即点和直线的从属性是平行投影的不变性。如图1-6，$C\in AB$，则 $c\in ab$。

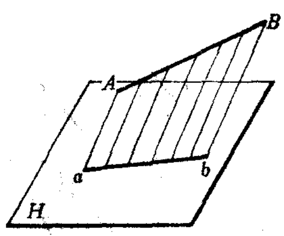


图 1-5

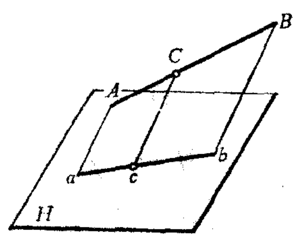


图 1-6

（3）在一条直线上任意三个点的简单比是平行投影的不变量。

如图 1-6，点 A、B、C 为一条直线上的三个点，其中点 A、B 为基础点，点 C 为分点。则这三个点的简单比定义为：

$$(ABC)=\frac{AC}{BC}$$

由初等几何的平行截割定理很容易证明：

$$\frac{AC}{BC}=\frac{ac}{bc}$$

或

$$(ABC)=(abc)$$

即一直线上三个点的简单比等于其投影相应的三个点的简单比。

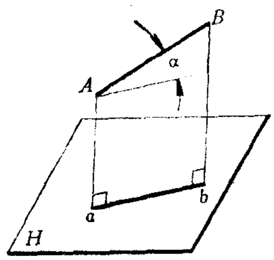
（4）在一般情况下，线段的长度投影后要改变。投影长与原长的比称为变形系数 k。如图 1-6，$\frac{ab}{AB}=k$。

一般情况下（斜角投影时）可能有 $k<1$ 或 $k>1$。

但有如下特殊情况：

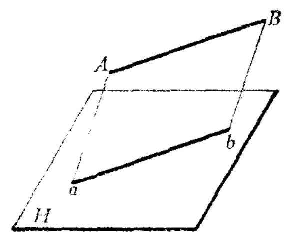
1）当投射方向 S 垂直于投影面（直角投影），且当线段对 H 面的倾角为 α 时，$ab=AB\cos\alpha$，所以 $k=\cos\alpha\leqslant 1$（图1-7），即线段的投影长度一般要缩短。

2）当线段平行投影面时，其投影反映线段实长（如图1-8）。



直角投影时，$ab=AB\cos\alpha$

图 1-7

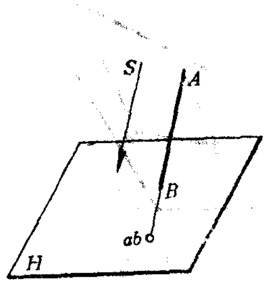


$AB//H$，$k=1$

图 1-8

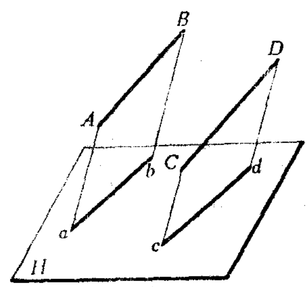
3）当直线与投射方向 S 平行时（对直角投影来说，此时直线垂直投影面），直线的投影成为点，如图1-9。这种投影性质称为积聚性。

（5）平行两直线的投影仍平行。如图1-10，$AB//CD$，所以两投射平面 $ABba//CDdc$，所以 $ab//cd$。



$AB//S$，有积聚性，$k=0$

图 1-9



$AB//CD$，则$ab//cd$

图 1-10

而且很容易证明，平行两线段AB和CD的比值是平行投影的不变量，即$AB//CD$，则 $\frac{AB}{CD}=\frac{ab}{cd}$。

（6）平面形的投影可由投影其轮廓线得到。一般情况下，平面形的投影都要发生变形，但投影形状总与原形相仿。如图1-11，$\triangle abc \fallingdotseq \triangle ABC$，八边形 $abcdefgh \fallingdotseq ABCDEFGH$。但三角形的投影仍为三角形，八边形的投影边数不变，而且凹形的投影仍为凹形。

但有如下的特殊情况：

1）当平面形平行于投影面时，其投影反映实形（图1-12）。

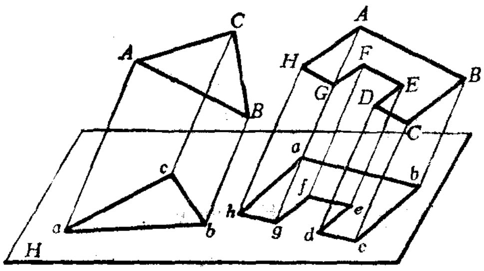


图 1-11

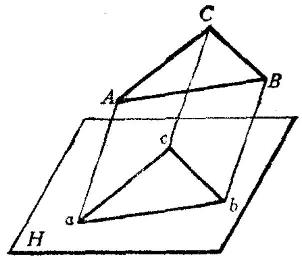


图 1-12

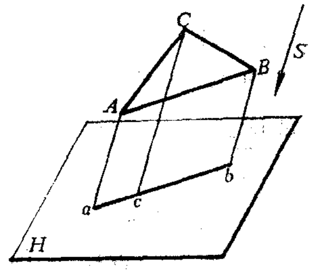


图 1-13

2）当平面形平行于投射方向S时，其投影为直线（图1-13）。平面形投影的这种性质也称为积聚性。

在上述的平行投影基本性质中，要特别注意那些平行投影下的不变性（如同素性，点和线的从属性，两直线的平行性等），以及不变量（如简单比、两平行线段的长度比等）。这些不变性和不变量，对图示、图解空间几何的各种问题时都将起重要作用。

§1-3* 透视对应

一、两平面间的透视对应

设有相交两平面（也称为场）ω和ω'，以及既不在平面ω上，也不在ω'上的投影中心S（图1-14）。在中心投射下，平面ω上的点A、B、……分别对应着平面ω'上的点A'、B'、……。对于ω上的点D来说，因$SD//\omega'$，SD与ω'相交于无穷远处，即点D与ω'上的非固有点D'_∞相对应。这样，平面ω上的每个点都可在平面ω'上找到它们各自的对应点；同样，平面ω上的任何图形都可在ω'上找到它们的对应图形。反过来，从ω'到ω也是这样。这种以中心投射为基础，在平面ω和ω'之间建立起来的对应，称为透视对应。

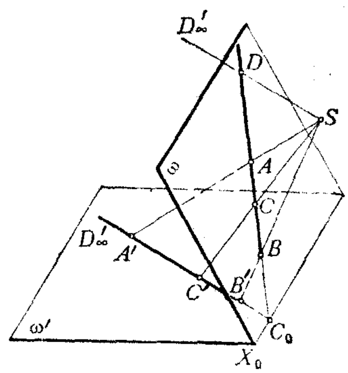


图 1-14

此时，点S称为对应中心，两平面之间对应点的连线（如AA'、BB'）称为对应线。显然，在透视对应下，所有对应线都交于点S。

对于ω和ω'的交线X_0来说，X_0上的每个点都是自身对应的（如图1-14中的点C_0），具有这种性质的点称为二重点。交线X_0就是二重点的轨迹，称为二重线，也称为透视对应轴。

二、透视对应的基本性质

（1）由上述可知，在ω和ω'之间，点一定与点相对应。而且由于一条对应线分别与ω和ω'只能各有一个交点，所以这种对应一定是相互单值的，即点A一定只对应点A'，而点A'也一定只对应点A。

（2）直线一定与直线相对应。如图1-14，ω上的直线AB与ω'上的直线$A'B'$相互对应。这是因为由对应中心S所作的投射平面SAB与ω'一定交于直线$A'B'$。

由图1-14还可看到，对应的两直线AB和$A'B'$都在投射平面SAB上，它们的交点为C_0。因AB和$A'B'$分别在ω和ω'上，所以C_0一定在ω、ω'的交线X_0上，即相互成透视对应的两直线，其交点一定在对应轴上（特殊情况下它们都平行于对应轴X_0，即交于X_0轴的非固有点）。

在透视对应中，点与点对应，直线与直线对应，所以透视对应具有同素性。

（3）点与直线的从属性是透视对应的不变性。如图1-14，点$C \in AB$，由于投射线SC一定在投射平面SAB上，所以点C的对应点C'必在$A'B'$上，即$C' \in A'B'$。

（4）一条直线上四个点的交比是透视对应的不变量。

所谓交比就是一条直线上四个点中两个简单比的比值。如图1-15，一条直线上四个点A、B、C、D的交比为：

$$(ABCD)=\frac{(ABC)}{(ABD)}=\frac{AC}{BC}\cdot\frac{BD}{AD}$$

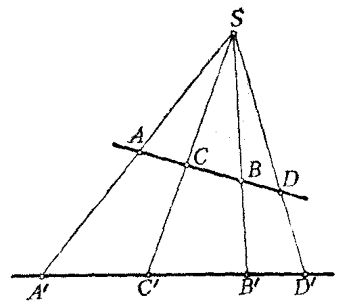


图1-15 $(ABCD)=(abcd)$

注意到在上述交比的定义中，点A、B为两个简单比的共同基础点，而C、D则分别为两个简单比的分点。

下面就来证明交比是透视对应的不变量。

为了简单起见，在图1-15中只表示了成透视对应的两条直线AB和$A'B'$。

设h为点S到直线AB的垂直距离，则得：

$$\triangle SAC\text{的面积}=\frac{1}{2}\overline{AC}\cdot h=\frac{1}{2}\overline{SA}\cdot\overline{SC}\cdot\sin\angle ASC$$

$$\therefore \quad \overline{AC}=\frac{\overline{SA}\cdot\overline{SC}}{h}\sin\angle ASC$$

同理可得：

$$\overline{BC}=\frac{\overline{SB}\cdot\overline{SC}}{h}\sin\angle BSC$$

$$\overline{AD}=\frac{\overline{SA}\cdot\overline{SD}}{h}\sin\angle ASD$$

$$\overline{BD}=\frac{\overline{SB}\cdot\overline{SD}}{h}\sin\angle BSD$$

$$\therefore \quad (ABCD)=\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}\cdot\frac{\overline{BD}}{\overline{AD}}=\frac{\overline{SA}\cdot\overline{SC}\cdot\sin\angle ASC}{\overline{SB}\cdot\overline{SC}\cdot\sin\angle BSC}\cdot\frac{\overline{SB}\cdot\overline{SD}\cdot\sin\angle BSD}{\overline{SA}\cdot\overline{SD}\cdot\sin\angle ASD}$$

$$\therefore \quad (ABCD)=\frac{\sin\angle ASC}{\sin\angle BSC}\cdot\frac{\sin\angle BSD}{\sin\angle ASD}$$

设h'为点S到直线$A'B'$的垂直距离，同理可得：

$$(A'B'C'D')=\frac{\sin\angle ASC}{\sin\angle BSC}\cdot\frac{\sin\angle BSD}{\sin\angle ASD}$$

$$\therefore \quad (ABCD) = (A'B'C'D')$$

从图1-15还可看出，一直线上三个点的简单比已不是透视对应的不变量。例如：

$$(ABC) \neq (A'B'C')$$

三、笛沙格定理

笛沙格定理的内容如下：

如果两个已知三角形ABC和$A'B'C'$对应顶点的连线AA'、BB'、CC'交于一点S，则这两个三角形对应边的三个交点在一条直线上。

如图1-16，设$\triangle ABC$、$\triangle A'B'C'$分别在平面ω和ω'上。因$AA' \cap BB' = S$，所以AA'和BB'确定一个平面SAB。显然直线AB和$A'B'$都在该平面上，因此它们应交于一点C_0。因直线AB和$A'B'$又分别在平面ω和ω'上，所以AB与$A'B'$的交点C_0既在平面ω上，也在平面ω'上，即点C_0应在ω与ω'的交线X_0上。

同理可证两直线BC和$B'C'$一定相交，其交点A_0也在X_0上；两直线CA和$C'A'$也一定相交，其交点B_0也在X_0上。

这就证明了，在已知条件下，两个三角形的三对对应边的交点A_0、B_0、C_0在一条直线上。

此外，笛沙格定理的逆定理也是正确的，即：

如果两个已知三角形ABC和$A'B'C'$的对应边AB、$A'B'$；BC、$B'C'$；CA、$C'A'$的三个交点在一条直线上，则这两个三角形对应顶点的连线交于一点S。

如图1-16，根据已知条件，$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$的一对对应边AB和$A'B'$确定一个平面，而且BC和$B'C'$，CA和$C'A'$也各确定一个平面，这三个平面相互间的交线分别为AA'、BB'、CC'。根据三面共点原理，这三条交线应交于一点S。这就证明了，在已知条件下，两个三角形的对应点的连线交于一点。

此外，笛沙格定理及其逆定理不仅适用于空间的，不在同一平面上的两个三角形的情况，而且也适用于在同一平面上两个三角形的情况（如图1-17）。详细证明可参阅射影几何学的有关章节，这里从略。

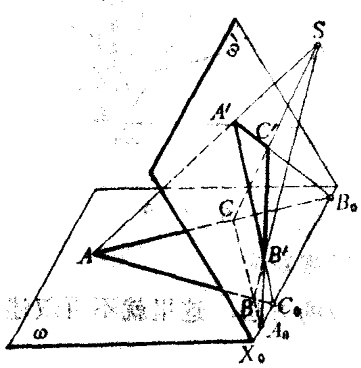


图 1-16

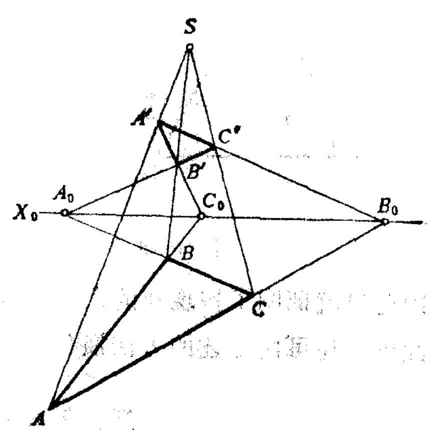


图 1-17

由笛沙格定理的叙述可知，成透视对应的两个三角形，它们的对应中心S和对应轴X_0不是独立的，只要知道对应中心S，则对应轴X_0是唯一确定的（正定理）。反过来，知道了对应轴X_0，则对应中心S也是唯一确定的（逆定理）。

四、透视对应的确定

1　已知透视对应中心S，透视对应轴X_0及一对对应点A、A'，就可以完全确定一个透视对应

这从下面的作图就可得到证明（图1-18）。

如图1-18，点A与X_0轴确定了平面ω，点A'与X_0轴确定了平面ω'。如果在ω上指定任一点B，就可根据作图在ω'上求出唯一的一个对应点B'。

作图步骤如下：

1）连点S、B，点B'一定在直线SB上；

2）连点A、B，并求出直线AB与X_0轴的交点C_0；

3）连点A'、C_0，得到与直线AB对应的直线，点B'一定在直线$A'C_0$上；

4）在$A'C_0$与SB的交点处得到与点B对应的唯一的一个点B'。

这也就证明了按上述已知条件完全确定一个透视对应。

2　已知透视对应中心S，以及三对对应点A、A'；B、B'；C、C'，就完全确定一个透视对应

根据上述已知条件，只要能求出透视对应轴，这一问题就得到了解决。

如图1-19，把点A、B、C和点A'、B'、C'分别连成两个三角形。根据已知条件，$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$的三对对应顶点连线交于点S，因此，根据笛沙格定理，它们的三对对应边的交点为：$AB\cap A'B'=C_0$；$BC\cap B'C'=A_0$；$CA\cap C'A'=B_0$。点A_0、B_0、C_0一定在一条直线上，这条直线就是要求的对应轴X_0。

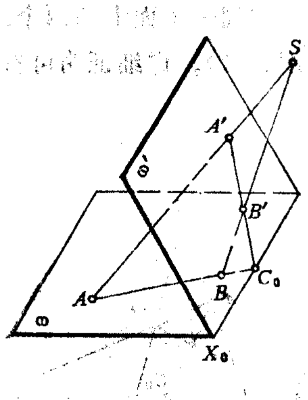


图　1-18

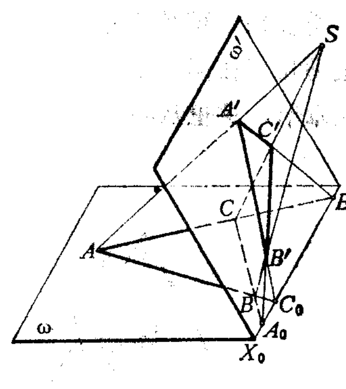


图　1-19

因此也就证明了按现在的已知条件可以确定一个透视对应。

此外，还可由上述的方法演化出其它确定透视对应的方法，这里就不再叙述。

五、平面到自身的透视对应（透射）

如图1-20，首先以S_1为对应中心，$\triangle ABC$对应$\triangle A_1B_1C_1$，在平面ω和ω_1之间建立一个

透视对应。此时三对对应边分别交X_0轴于A_0、B_0、C_0三点。再以S_2为对应中心，将ω_1上的$\triangle A_1B_1C_1$投向ω'平面（ω'与ω重合），得到对应的$\triangle A'B'C'$，则在ω_1和ω'两平面间建立了一个透视对应。在这个对应中对应轴也是X_0（因ω与ω'重合），三对对应边的交点也分别交X_0轴于A_0、B_0、C_0三点。

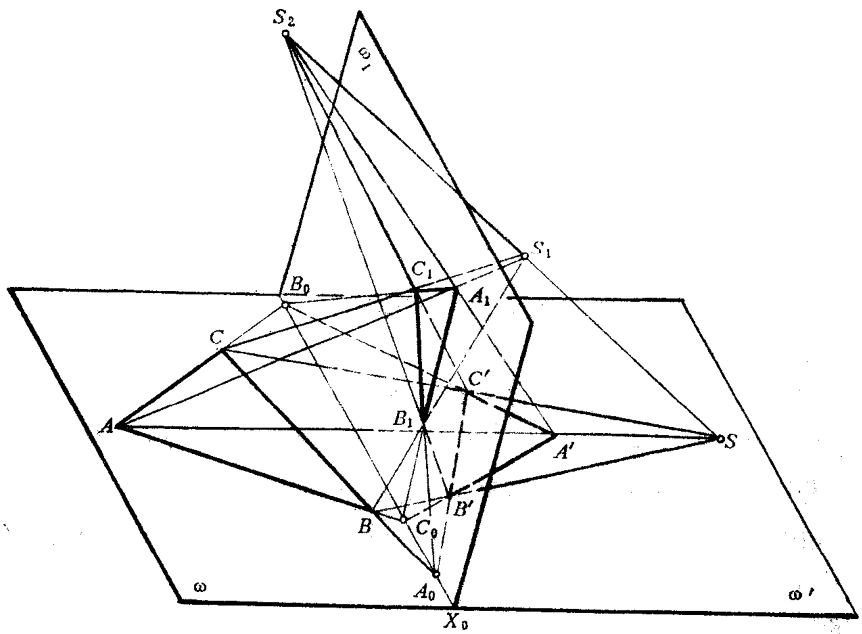


图 1-20

由于$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$都与$\triangle A_1B_1C_1$相对应，显然$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$也相互对应，并且在重合的两个平面ω和ω'之间（或者说是在一个平面的两个场ω和ω'之间）建立了一种对应关系。这种对应就称为平面到自身的透视对应。

由图1-20可见，平面到自身的透视对应与一般的透视对应有相同的性质，即这种对应是相互单值的对应，具有同素性，点与直线的从属关系不变，交比是对应的不变量，各对应直线的交点都在一条直线——X_0轴上（如图1-20，$AB\cap A'B'=C_0$，$BC\cap B'C'=A_0$，$CA\cap C'A'=B_0$，且A_0、B_0、C_0都在X_0轴上），即这种对应也是有轴的，这个轴是二重点的轨迹，但已不是ω与ω'的交线。此外，根据笛沙格定理，在这个对应中对应点的连线（如AA'、BB'、CC'）都交于一点S，即这个对应也是有中心的。

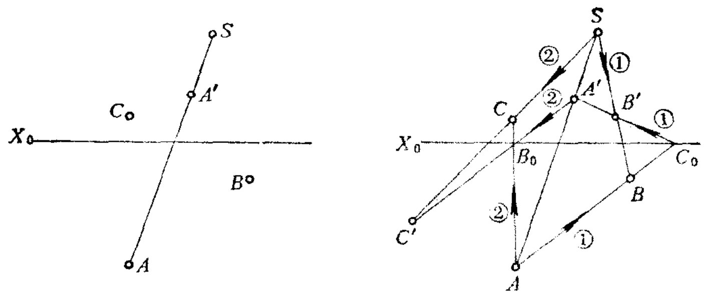
平面到自身的透视对应实质上就是建立在同一平面的两个场（ω、ω'）之间的一种特殊的透视对应。这种对应在正投影图上的应用还是比较多的，为了方便起见，今后把这种对应也一律称为透视对应。

因为这种对应是在同一平面上建立起来的对应，所以平面上的同一个点，既可看成是场ω上的点，也可看成是场ω'上的点。

确定平面到自身的透视对应的方法与确定两平面间的透视对应的方法是一样的，这里不再证明。

下面举例说明这种透视对应的作图。

例 1．已知透视对应由中心S、对应轴X_0和一对对应点A、A'确定。求点B、C的对应点B'、C'（图1-21 a）。



（a）已知条件　　（b）作图

图 1-21

求点B'的步骤如下（参阅图 1-21 b 箭头①）：

1）连点A、B，$AB\cap X_0=C_0$；

2）连点A'、C_0。$A'C_0$即为与AC_0对应的直线；

3）连点S、B。点B'应在SB上，同时应在$A'C_0$上，所以$SB\cap A'C_0=B'$。

求点C'的作图步骤如图1-21 b 上箭头②所示。

例 2．已知透视对应由中心S，以及三对对应点A、A'；B、B'；C、C'确定。求点D的对应点D'（图 1-22 a）。

作图步骤：

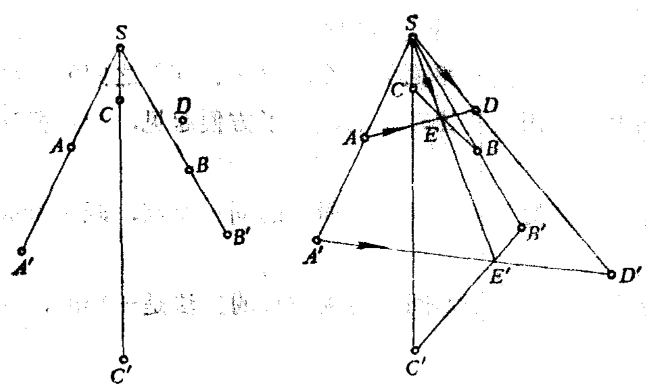
1）连接直线BC及其对应的直线$B'C'$；

2）连接直线AD，$AD\cap BC=E$；

3）因$E\in BC$，所以其对应点$E'\in B'C'$。连直线SE，则$SE\cap B'C'=E'$；

4）因$D\in AE$，所以一定有$D'\in A'E'$。连直线SD，则得$SD\cap A'E'=D'$。

本例还可先求出对应轴X_0，然后再按例 1 的步骤求D'。为求出对应轴X_0，只要求出两对对应直线的交点即可。如图1-23中，$AC\cap A'C'=B_0$，$CB\cap C'B'=A_0$，连接A_0、B_0就得到X_0轴。求D'的步骤见图。



（a）已知条件　　（b）作图

图 1-22

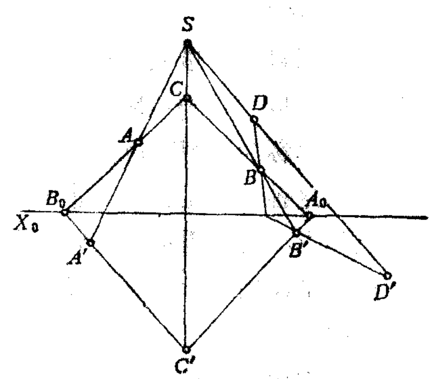


图 1-23

§ 1-4* 透视仿射对应（亲似对应）

一、两平面间的透视仿射对应

设有相交两平面ω和ω′。以S为投射方向进行平行投射（如图1-24）。这样，在平面ω上的每个点（如点A、B）都可在ω′上找到它们各自对应的点（A'，B'）；同样，平面ω上的任何图形都可在ω′上找到它的对应图形。反过来，从ω′到ω也是这样。这种以平行投射为基础，在平面ω和ω′之间建立起来的对应称为透视仿射对应，简称透仿对应（也称为亲似对应）。

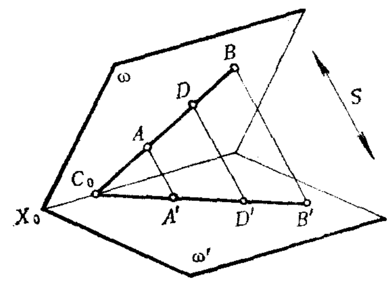


图 1-24

此时方向S称为对应方向。所有对应点的连线——对应线（如AA'、BB'）都与S平行，因而对应线相互平行。

两平面ω和ω′的交线X_0上所有的点都是自身对应的，所以交线X_0是二重点的轨迹，称为透视仿射对应轴。

今后我们还经常利用平行投射将一个平面上的图形单方面地变换为另一平面上的图形，这样的变换过程称为透视仿射变换，简称透仿变换。

二、透仿对应的性质

由于透仿对应可以看作是透视对应的特殊情况，即透视中心为非固有点的情况，因此透仿对应与透视对应有共同点。

（1）点对应点，而且对应是相互单值的；

（2）直线对应直线。对应两直线的交点一定在对应轴X_0上（特殊情况都平行于X_0轴，即交X_0轴于非固有点）。如图1-24，$AB\cap A'B'=C_0$，$C_0\in X_0$。

由于有上述性质，所以透仿对应也具有同素性。

（3）点和直线的从属关系是对应的不变性。

由于透仿对应是以平行投射为基础建立起来的，因此还有它的特点。

（4）在一条直线上三个点的简单比是对应的不变量，如图1-24中$\dfrac{AD}{BD}=\dfrac{A'D'}{B'D'}$。

上述的各性质即为透仿对应的基本性质。如果两平面之间所确定的对应满足上述基本性质，而且对应线是相互平行的，则所确定的对应就是透仿对应。

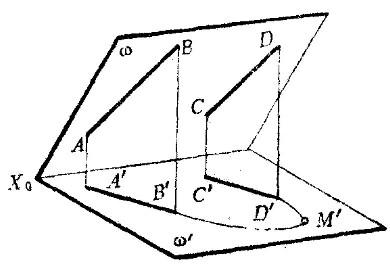


图 1-25

此外，根据上述基本性质还可推出许多其它性质。例如，两平行直线所对应的两直线仍平行，即两直线的平行是透仿对应的不变性。如图1-25，已知$AB//CD$，它们所对应的直线分别为$A'B'$、$C'D'$。假设$A'B'$和$C'D'$相交，则其交点M'既属于$A'B'$，也属于$C'D'$。根据点和直线的从属关系不变这一性质，点M'的对应点M应当既属于AB，也属于CD，即直线AB和CD应相交。这显