

351837

成都工学院图书馆
基本馆藏

祿符演祿

[波兰] 楊·米庫辛斯基著 王建午譯



上海科学技术出版社

算符演算

〔波兰〕楊·米庫辛斯基 著

王 建 午 譯

上海科学技术出版社

內 容 提 要

本书直接用代数的方法引进算符的概念,从而建立了独立的算符演算的理論,較之一般的以拉普拉斯或其他变换为根据的算符演算理論更为簡單而且更为普遍。全书共分七个部分,其中算符代数,算符的叙列和級数,算符的微分法,常系数綫性微分方程一般理論的概述,算符的积分法等六个部分 24 章是本书的中心內容,詳細闡述了各种理論和应用,第七部分附录的 12 章是原书英文版新增加的內容,对正文中的許多定理作了詳細証明,討論了本书理論与数学其他分支之間的关系,和一些新的結果。本书既可供工程技术人員閱讀,也适宜于数学工作者参考。

本书是根据原书的第五版(即英文版)譯出。

OPERATIONAL CALCULUS

Jan Mikusinski

- Pergamon Press · 1959

算 符 演 算

王建午 譯

上海科学技术出版社出版 (上海瑞金二路 450 号)

上海市书刊出版业营业許可証出 093 号

上海大东集成联合印刷厂印刷 新华书店上海发行所发行

开本 850×1168 1/32 印张 16 28/32 排版字数 410,000

1964 年 5 月第 1 版 1964 年 5 月第 1 次印刷 印数 1—3,000

統一书号 13119·569 定价 (十四) 2.80 元

譯 者 序

本书是按照波兰数学家楊·米庫辛斯基 (J. Mikusiński) 教授所著的“算符演算” (Rachunek Operatorów) 一书 1959 年英文版 (原书第五版) 譯出, 在翻譯过程中, 又参照了該书的 1957 年波文版 (原书第二版)。英文的第五版除增添了附录之外与波文的第二版内容完全相同。

本书是作者所創建的理論的系統綜述, 它不同于多年来广泛使用的以拉普拉斯变换为基础的算符演算 (或称运算微积) 理論。本书的算符是連續函数的卷积的逆运算, 其理論基础是 Titchmarsh 关于卷积的定理 (第一部分第二章) 和近世代数中的商体概念, 把函数概念包含在算符概念之内, 因此, 算符可象普通数那样简单自如地运算, 不仅在应用上更为方便有效, 而且还具有严格的理論基础。

本书第一部分討論算符的代数运算, 給出了常微分方程的代数解法。作者在第五章和第八章中詳細深入地討論了算符演算在电路理論和靜力学中的应用, 并举出了大量的重要例题。

在第二部分和第三部分中, 作者在算符域中引进了算符叙列的收斂性、算符函数的連續性、可导性等概念, 討論了某些重要的級数 (例如移动算符級数、算符系数的幂級数等) 和算符指数函数, 为解算符微分方程作了准备。作为在偏微分方程中的应用, 第三部分还討論了弦振动方程、热傳导方程和电报方程。

第四部分討論常算符系数綫性微分方程的一般理論，它是綫性偏微分方程的一种推广。某些結果与普通的常系数綫性常微分方程类似，例如解的唯一性定理、一般解和特解的問題，但是一般的存在定理并不成立。在这里作者按照解的性质对算符微分方程作了分类。这一部分还討論了各种特殊类型的非齐次方程的解法以及算符微分方程在解偏微分方程中的应用。

第五部分討論算符的积分运算，它指出本书的理論与以拉普拉斯变换为基础的演算理論之間的关系。說明了本书的理論比原有的算符演算理論在方法上更为簡單，而其应用則更为广泛。

本书第六部分附录的内容已由作者在英文版序言中作了說明。它主要是为研究本书中所提出的数学問題的讀者而写的。在这一部分中，作为算符理論的基础，作者补充了无零因子代数环的扩域概念，用集合論和代数学的观点来看，算符是連續函数的某种等价类，即連續函数的某种分数类。这种抽象数学概念的应用是作者杰出的貢獻。此外，作者还指出了算符与广义函数和泛函分析的联系，就是說，在算符域和广义函数空間之間有一个公共部分，即在某种相等的意义下，有的算符是广义函数，有的广义函数就是算符；而从泛函分析的角度来看，算符域中的收敛概念恰好使算符域成为 Banach 空間組成的半序集合的和。需要指出的是近年来数学界把本书的算符特称为 Mikusiński 算符，对它作了許多研究和討論。这些研究主要是：1° 把算符演算推广到多元的問題，因为本书的理論还只限于討論两个变元的偏微分方程，討論多元的算符演算将有助于解决多元偏微分方程的問題。2° 算符演算与泛函分析，特别是广义函数的关系問題，這個問題已由 Mikusiński, Wloka, Fenyő 等人解决（見关肇直在岩村联著《广义函数》中譯本（现代应用数学丛书，1961 年上海科学技术出版社）的校后記）。

本书各章节之末都附有大量习题，书末有这些习题的答案，这

将有助于讀者掌握巩固。

正如作者在序言中所指出，本书的对象是工程技术人員和数学工作者。閱讀本书的全文(附录除外)只要求具备普通微积分的知識和一定的数学理解能力。对工程技术人員來說，如果只限于把算符演算应用于实际工作，則可略去本书某些定理的証明的細节。对本书理論有兴趣的讀者除附录外尚可参考书末所列的文獻。

在本书的翻譯过程中，得到很多同志的帮助，陈天权同志譯出了第六部分的前三章，梁鉄錚同志帮我审閱了第一部分第五章电路理論，上海科学技术出版社对出版本书的支持，譯者借此机会向他們深表謝意。限于譯者的业务和語文水平，錯誤或不妥之处在所难免，望讀者指正。

王建午 1963.3. 于內蒙古大学

英 文 版 序

本书过去已出过四版：第一版为波文版（华沙，1953），第二版为俄文版（莫斯科，1954），第三版为德文版（柏林，1957），第四版为波文版（华沙，1957）。这次是第五版，用英文写成，增加了112頁的附录而扩大了篇幅，其内容包括

1° 以前諸版略去的定理的証明（这样可免除讀者去查閱分散在各种杂志上的原著的麻煩）。

2° 自第一版出版以来有关算符演算的新結果。

3° 算符演算与其他数学分支（如抽象代数，广义函数和 Banach 空間理論）之間的关系的討論。

4° 尚未解决的問題。

在本书中，算符是作为一类分数而用代数的方法引进的，它們是数的概念的一种推广，即算符可象数一样进行同样的运算。这种方法要比其他书籍中介绍的方法来得简单而且更为普遍（其他书籍是以 Laplace 变换为基础的），不熟悉解析函数理論的讀者也能讀懂本书。

本书是作者在 1950~1957 年間所发表的論文及其应用的系統介紹。編写本书所采用的方式是希望对工程师和数学工作者都能有用，工程师可以把算符演算只看作自己工作中的一項工具，而数学工作者为了他們自己的目的可以着眼于有兴趣的一些定理証明和各种数学問題。

在本书的编写过程中，我得到了许多帮助，S. Drobot 与我合作写成关于静力学的应用一章（第一部分第八章），C. Ryll-Nardzowski 与我讨论了本书某些部分的细节，M. Warmus 阅读了本书的第一版，作出了习题的答案并核对了演算，S. Gładysz, W. Nowacki 和 H. Pidek-Łopuszańska 的许多有价值的意见对我也是有帮助的。本书所附的插图是由 S. Gutek 画成的。

楊·米庫辛斯基 1959 年

目 录

譯者序

英文版序

第一部分 算符代数

第一章 連續函数的卷积概念与性质	1
§ 1. 卷积的定义	1
§ 2. 类 $\mathcal{S}$	2
§ 3. 卷积的可交换性	2
§ 4. 卷积的可結合性	3
§ 5. 加法和卷积作为算符演算中的基本运算	4
§ 6. 函数与函数值	5
§ 7. 記号	7
§ 8. 积分算符	8
第二章 Titchmarsh 定理	9
§ 9. 定理的叙述和一般注解	9
§ 10. Phragmén 定理	9
§ 11. 矩量定理	12
§ 12. 当 $f=g$ 时 Titchmarsh 定理的証明	14
§ 13. 一般証明	16
第三章 算符	19
§ 14. 卷积的逆运算	19
§ 15. 算符	20
§ 16. 算符的运算	21

§ 17. 数算符	21
§ 18. 关于名词的注解	22
§ 19. 数与函数的乘积	23
§ 20. 数 0 与 1	24
§ 21. 微分算符	25
§ 22. 算符 s 的幂	27
§ 23. 算符 s 的多项式	27
§ 24. 算符 s 与指数函数的关系	28
§ 25. 算符 s 与三角函数的关系	29
§ 26. 关于 s 的有理算符	30
§ 27. 关于 s 的有理算符的某些性质	34
第四章 常系数常微分方程	37
§ 28. 一般方法和例	37
第五章 电路理论	43
§ 29. 关于算符演算理论在物理和技术问题方面的应用的注解	43
§ 30. 电路	45
§ 31. 短路电流	47
§ 32. 阻抗	51
§ 33. 正弦电流	52
§ 34. Kirehhoﬀ 定律	55
§ 35. Wheatstone 桥	56
§ 36. Anderson 桥	57
§ 37. 关于列出电网的电流方程的一般注解	58
§ 38. 复合二端网络的阻抗与短路电流	62
§ 39. 正弦电动势的情形	67
§ 40. 电压脉冲和它在测量阻抗中的应用	69
§ 41. 电感耦合	71
§ 42. 四端网络	74
§ 43. 两个联接的四端网络	77
§ 44. 三个四端网络的联接	79
§ 45. 一端短路的四端网络	81
§ 46. 具有自由端的四端网络	83
§ 47. 用一个二端网络短路的四端网络	84

§ 48. 四端网络链	86
§ 49. 变压器	87
§ 50. 作为四端网络的阴极管	90
§ 51. 行列式等于 1 的四端网络	92
§ 52. 反四端网络 and 对称四端网络	95
第六章 微分方程的一般解和边值问题	97
§ 53. 一般解	97
§ 54. 边值问题	100
§ 55. 已知点 $t_0 \neq 0$ 处的初始条件, 求微分方程的解	102
第七章 不连续函数	104
§ 56. 函数类 $\mathcal{X}$	104
§ 57. 类 $\mathcal{X}$ 中函数的运算	105
§ 58. Euler 的 $\Gamma(\lambda)$ 积分	108
§ 59. 算符 l 和 $s-\alpha$ 的非整数幂	110
§ 60. 导函数属于类 $\mathcal{X}$ 的函数	112
§ 61. 右端不连续的微分方程	113
§ 62. 函数的跳跃与算符的移动	115
§ 63. 某些不连续函数的导函数	119
§ 64. 移动算符的函数逼近	120
§ 65. 移动算符的不同解释	122
§ 66. 在整个 t 轴上定义的函数	123
第八章 在梁的静力学中的应用	126
§ 67. 载荷的类型	126
§ 68. 横截力和弯曲力矩	128
§ 69. 平衡条件	131
§ 70. 梁的弯曲	133
§ 71. 被支架住的梁	135
§ 72. 静力学上不确定的情形	135

第二部分 算符的叙列和级数

第一章 算符叙列	141
§ 1. 一致收敛性	141
§ 2. 算符叙列的极限	144

§ 3. 算符叙列极限的性质	146
第二章 移动算符的級数	149
§ 4. 数系数級数	149
§ 5. 更一般的移动算符級数	151
§ 6. 算符 $1/(1-\beta h^\lambda)$	152
§ 7. 施加周期电动势的电网絡	154
第三章 差分方程	159
§ 8. 差分方程的例	159
§ 9. 算符 $1/(1-\beta h^\lambda)^k$	162
§ 10. 任意阶的差分方程	163
§ 11. 把解的复形式化为实形式	165
§ 12. 一般注意	166
第四章 幂級数	167
§ 13. 以算符为系数的数的幂級数	167
§ 14. 幂級数的乘法	168
§ 15. 数值系数的算符幂級数	169
§ 16. 任意实指数的乘幂	172
§ 17. 电工学中的一个問題	175
§ 18. Bessel 函数 J_0	176
§ 19. 电工学中一个更一般的問題	176
§ 20. n 为任意自然数时的 Bessel 函数 J_n	179

第三部分 算符的微分法

第一章 算符函数及其导数	181
§ 1. 算符函数	181
§ 2. 算符函数的連續性	182
§ 3. 算符函数的連續导数	185
§ 4. 連續导数的性质	187
§ 5. 高阶連續导数	190
§ 6. 在无限区間上的連續导数	191
§ 7. 导数的一般定义	192
第二章 指数函数	194
§ 8. 微分方程 $x'(\lambda) = wx(\lambda)$	194

§ 9. 广义的指数函数	195
§ 10. 幂级数的导数	196
§ 11. 函数 $\exp \lambda(s - \sqrt{s^2 + a^2})$ 及有关函数	198
第三章 微分方程 $x''(\lambda) = wx(\lambda)$	201
§ 12. 唯一性定理	201
§ 13. 解的开拓	202
第四章 弦振动	206
§ 14. 振动弦的算符方程	206
§ 15. 振动弦的形状	209
§ 16. 更一般的边界条件	213
§ 17. 解的唯一性	215
§ 18. 无限长的弦	216
§ 19. 在某些特殊的初始条件下的弦振动	218
§ 20. 初始位置任意固定的弦振动	220
§ 21. 具有给定初速度的弦振动	223
§ 22. 其他解释	224
第五章 热传导方程	225
§ 23. 抛物型指数函数	225
§ 24. 抛物型指数函数的某些解析性质	227
§ 25. 导热杆的温度	228
§ 26. 解的无穷级数展开	230
§ 27. 不等式与模	231
§ 28. 无穷长的杆	233
§ 29. 热绝缘的杆	236
§ 30. 三角级数	237
§ 31. 杆在给定初温下的温度变化	242
§ 32. 解的合理性的验证	244
§ 33. 某些特殊情形	246
§ 34. 一端绝缘的杆	247
§ 35. 一端是调节的热传导	250
§ 36. 导热环	252
§ 37. 运算 T^α 和它的应用	254
§ 38. 非绝缘的热传导	259

第六章 电报方程	262
§ 39. 电报方程的一般形状	262
§ 40. 无损耗的电导	263
§ 41. 沒有畸变的电导	264
§ 42. Thomson 电纜	265
§ 43. 沒有自感的电纜	266
§ 44. 沒有漏导的电纜	267
§ 45. 四个电导参数全为正的情形	268
第七章 代数导数	270
§ 46. 定义及其性质	270
§ 47. 算符 $1/(s^2 + \beta^2)$ 的幂	273

第四部分 常系数綫性微分方程一般理論的概述

第一章 齐次方程	276
§ 1. 引言	276
§ 2. 特征方程	276
§ 3. 关于指数函数	277
§ 4. 对数	278
§ 5. 特征方程的重根	279
§ 6. 一般解	280
§ 7. 解的唯一性定理	282
§ 8. 对数方程	285
§ 9. 綫性微分表示式	286
§ 10. 綫性微分表示式的运算	287
§ 11. 綫性微分表示式的特征多項式	288
§ 12. 单纯方程	288
§ 13. 混合方程	289
§ 14. 合于给定初始条件、边值条件和其他条件的解	289
第二章 非齐次方程	293
§ 15. 非齐次方程的一般解	293
§ 16. 右端是多項式的情形	294
§ 17. 右端是指数函数的情形	295
§ 18. 右端是多項式和指数函数的乘积的情形	297

§ 19. 右端是两个函数的綫性組合的情形	298
§ 20. 右端是三角函数的情形	298
§ 21. 适合附加条件的解	300
第三章 在偏微分方程中的应用	302
§ 22. 把偏微分方程化为算符方程	302
§ 23. 关于附加条件的注	309
§ 24. 錯誤的解	309
§ 25. 表观矛盾的解釋	311
§ 26. Cauchy 条件和它等价于一般条件的問題	313
§ 27. 解限制方程	315
§ 28. 偏微分方程和算符方程的等价性問題	317
§ 29. 解偏微分方程的其他例子	319
§ 30. 用算符方法解偏微分方程的一般注記	322
§ 31. 混合問題	325

第五部分 算符的积分法

第一章 算符函数的积分及其应用	333
§ 1. 类 $(\mathcal{X})$ 的算符函数	333
§ 2. 积分的定义	334
§ 3. 积分的性质	336
§ 4. 二元算符函数	338
§ 5. 函数的切割	340
§ 6. 对数微分方程的某一特解的积分形式	342
§ 7. 在弦振动方程中的应用	344
§ 8. 无穷級数和定积分的应用	348
第二章 积分变换	351
§ 9. Laplace 变换	351
§ 10. Laplace 变换作为算符演算的一个基础	352
§ 11. 直接方法和 Laplace 变换方法的比較	353
§ 12. 其他有关的方法	354

第六部分 附 录

第一章 用抽象代数的概念定义算符	355
-------------------------------	------------

§ 1. 交换环	355
§ 2. 商体	356
§ 3. 算符	358
第二章 局部可积函数	359
§ 1. 可积函数的卷积	359
§ 2. 这个卷积的性质	359
§ 3. 局部可积函数看作算符	360
§ 4. 类 $\mathcal{X}$ 的函数	361
§ 5. 绝对连续函数	363
§ 6. 局部可积函数环	363
第三章 广义函数	365
§ 1. 引言	365
§ 2. 广义函数算符	365
§ 3. 广义函数	366
§ 4. 广义函数的导数	368
§ 5. 上述理论和其他广义函数理论的等价性	369
§ 6. 广义函数数列	371
§ 7. 算符和广义函数	371
第四章 有收敛概念的抽象空间	374
§ 1. 一致收敛和几乎一致收敛	374
§ 2. 抽象空间中收敛性的扩张	376
§ 3. 在算符演算中的应用	377
§ 4. 收敛性的累次扩张	378
§ 5. 连续有界函数集合看作 Banach 空间	378
§ 6. 算符集合看作由 Banach 空间组成的半序集合的和集	379
§ 7. 算符集合不是一个 Banach 空间	380
§ 8. 几个注释	381
§ 9. 正则运算	383
§ 10. 算符函数的极限, 导数和积分	384
第五章 算符的幂级数	387
§ 1. 可积函数的幂级数	387
§ 2. 一个更一般的情形	389
§ 3. 某些特殊的幂级数	391

第六章 Laplace 变换	396
§ 1. Laplace 变换的基本性质	396
§ 2. 复的反演公式	397
§ 3. Post 反演公式	399
§ 4. 卷积的 Laplace 变换	402
§ 5. 有限 Laplace 变换	402
第七章 一类 Dirichlet 级数	404
§ 1. 引言	404
§ 2. Hirschman-Widder 函数	405
§ 3. 移动的 Hirschman-Widder 函数的叙列	406
§ 4. 由给定的指数叙列生成的整函数	407
§ 5. Euler 的 Γ 函数的推广	409
§ 6. Phragmén 的不連續因子的推广	412
§ 7. 关于有界矩量的一个定理	413
§ 8. 关于卷积的 Titchmarsh 定理	415
第八章 指数函数 $\exp(-\lambda s)$	418
§ 1. 引言	418
§ 2. $\alpha < 0$ 的情形	418
§ 3. $\alpha = 0$ 的情形	419
§ 4. $0 < \alpha < 1$ 的情形	419
§ 5. Taylor 级数展开	424
§ 6. 函数 $U_\alpha(t)$	426
§ 7. $U_\alpha(t)$ 的实的公式	427
§ 8. $U_\alpha(t)$ 在实轴上的性质	429
§ 9. $\alpha > 1$ 和实的 λ 的情形	430
§ 10. 算符的实部和虚部	432
§ 11. $\alpha > 0$ 及 λ 是复(非虚)数的情形	433
§ 12. $\alpha \geq 1$ 且 λ 为虚数的情形	434
§ 13. $\alpha = 1$ 的情形	436
§ 14. 存在性的表	437
第九章 带有算符系数的线性微分方程的一般理论	438
§ 1. 记号	438
§ 2. 解的空间	438