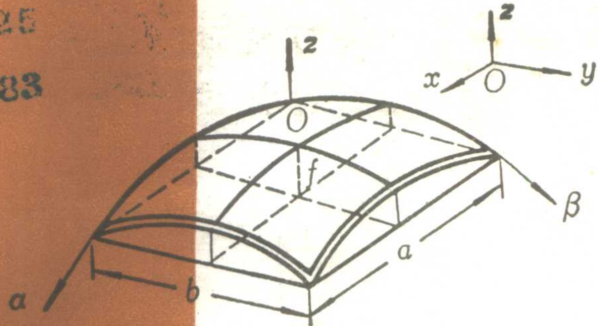

弹性力学专题教材

弹性薄壳理论

翁智远 王远功

高等教育出版社

弹性力学专题教材

弹性薄壳理论

翁智远　王远功

高等教育出版社

本书是与徐芝纶撰写的《弹性力学简明教程》配套使用的专题教材，也可供单独设课使用。

全书共分五章，在第一章讲述薄壳的一般理论之后，分章讲述了柱形薄壳、旋转壳体、双曲扁壳和弹性薄壳振动。本书适用于高等学校水利、土建类专业，也可供教师和工程技术人员参考。

本书稿的审阅者是清华大学龙驭球、匡文起两同志。

弹性力学专题教材

弹性薄壳理论

翁智远　王远功

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

北京印刷三厂印装

*

开本850×1168 1/32 印张 4.375 字数 109,000

1986年 月第1版 1987年2月第1次印刷

印数 00,001—3,130

书号 15010·0752　　定价 0.80元

前　言

本书是在我们过去编写的讲义基础上，根据一九八二年和一九八三年分别在杭州、西安召开的结构力学教材编审小组会议的意见及讨论确定的大纲编写的。本书是与徐芝纶撰写的《弹性力学简明教程》配套使用的专题教材，供高等学校水利、土建类专业使用，也可用作单独设课时的教材，并可供有关工程技术人员在实际工作中参考。

全书共分五章，第一章和第五章由翁智远编写，第二章至第四章由王远功编写，最后由翁智远汇总定稿。限于编者的水平和经验，书中不妥之处在所难免，尚希读者给予批评指正。

编者

一九八四年二月

目　　录

第一章　薄壳的一般理论……………………………………………1
§ 1-1　概述与基本假设……………………………………………1
§ 1-2　曲面理论的一些知识……………………………………………2
§ 1-3　壳体的变形及其中面的变形……………………………………………10
§ 1-4　壳体的内力、内矩与中面变形的关系……………………………………………19
§ 1-5　壳体的平衡方程……………………………………………23
§ 1-6　解壳体问题的途径和边界条件……………………………………………26
§ 1-7　壳体的无矩理论……………………………………………30
第二章　柱形薄壳……………………………………………33
§ 2-1　概述……………………………………………33
§ 2-2　柱形薄壳的无矩理论……………………………………………34
§ 2-3　轴对称荷载下的闭口圆柱形薄壳……………………………………………38
§ 2-4　一般荷载下圆柱形薄壳的基本方程……………………………………………48
§ 2-5　圆柱形长薄壳的简化理论……………………………………………52
第三章　旋转壳体……………………………………………61
§ 3-1　旋转壳体的无矩理论……………………………………………61
§ 3-2　荷载与角度 θ 无关时旋转壳体的无矩理论……………………………………………64
§ 3-3　圆顶的无矩理论……………………………………………66
§ 3-4　球形贮罐的无矩理论……………………………………………69
§ 3-5　圆锥面壳体、双曲线旋转壳体的无矩理论……………………………………………71
§ 3-6　“风型”荷载下的旋转壳体无矩理论……………………………………………74
§ 3-7　轴对称荷载下旋转壳体的位移(无矩理论)……………………………………………78
§ 3-8　轴对称荷载下的球面圆顶的边缘干扰问题……………………………………………80
第四章　双曲扁壳……………………………………………94
§ 4-1　双曲扁壳一般理论的基本微分方程……………………………………………94

§ 4-2 应用差分法计算双曲扁壳……………………………… 102
第五章 弹性薄壳振动……………………………… 110
§ 5-1 概述……………………………… 110
§ 5-2 圆柱扁壳振动……………………………… 110
§ 5-3 具有正高斯曲率的双曲扁壳振动……………………………… 121
§ 5-4 矢高大的圆柱壳振动……………………………… 128
习题……………………………… 131
参考资料 ……………………………… 134

第一章　薄壳的一般理论

§ 1-1　概述与基本假设

所谓壳体是指由两个曲面限定的曲面结构，两曲面间的距离，即壳体的厚度 h 远小于其它的尺寸。在实践中最常遇到的是等厚度壳体。平分壳体厚度的曲面叫做壳体的中面。设 R 为中面的曲率半径，在

$$\max\left(\frac{h}{R}\right)\leqslant\frac{1}{20}$$

的情况下，壳体可按照薄壳理论进行计算，所得结果与按厚壳理论计算所得结果比较起来，误差一般不超过通常工程上所容许的计算误差 5%；因此，我们根据是否满足上列不等式而将壳体划分成薄壳与厚壳两类。实际应用的壳体通常是很薄的，多数在下列范围内：

$$\frac{1}{1000}\leqslant\frac{h}{R}\leqslant\frac{1}{50}$$

壳体具有非常良好的承载性能，能以较小的厚度承载相当巨大的荷载。壳与板相比其优越性类似于拱与梁的情况。对于要求自重轻而又要具有足够的强度和刚度的结构物常采用壳体形式。因此，在土建工程、船舶工程、机械工程、化学工程、核工程以及航空与宇航工程的各个领域中，壳体都得到了广泛的应用。根据实际的工程情况，我们可以采用钢、混凝土、塑料、轻金属以及复合材料等各种工程材料来制造壳体。

壳体理论可分成三部分：壳体静力学、壳体动力学和壳体稳定

理论。每一部分又按各自问题分成若干个分支。本书主要讨论壳体静力学，为使读者对于壳体的动力性能有一个初步的了解，在最后一章我们还将讨论壳体动力学中的几个简单问题。我们假设制造壳体的材料是各向同性的，应力与应变关系服从虎克定律，位移与厚度相比是很小的。至于各向异性的壳体，需要考虑塑性性质的壳体及具有大挠度变形的壳体，即分别或综合考虑材料非线性、几何非线性的壳体问题，我们均不讨论。

在薄壳一般理论中，采用了如下的、类似于薄板理论的基本假设：

(1) 变形前垂直于中面的直线素在变形后仍然是直的，与挠曲了的中面垂直，且其长度保持不变。

(2) 平行于中面的面素上的法向应力与其它应力比较起来，小至可以略去不计。可称此为壳层无挤压假设。

根据上述两个假设，我们可以把薄壳看成是由无限多平行于中面的曲面层所组成；各曲面层之间将互不挤压，各层变形均受到直法线的约束。这样一来，我们就有可能把薄壳的变形问题归结为研究其中面的变形问题，正如采取了平面截面假设可以把梁的弯曲问题化为研究其中性轴的挠曲问题一样。

§ 1-2 曲面理论的一些知识

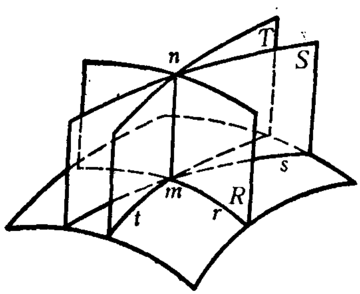

图 1-1

在任意形状的壳的中面上某一点 m(图 1-1) 可作法线 mn。包含该法线可作一系列的平面，各平面与中面相交可得许多具有确定方向的平面曲线，其中有两条相互垂直或正交的曲线 r 和 t 的曲率具有极值，一条的曲率最大，另一条的

曲率最小。这两条曲线的曲率称为曲面在该点的主曲率，分别以 k_1 及 k_2 表示。在 m 点切于这两条曲线的切线方向称为 m 点的主方向。如果在曲面上绘出一条曲线，在其上各点的切线方向都是曲面在该点上的主方向，则这条曲线称为曲率线。

曲面任意点上的高斯曲率等于该点的二主曲率的乘积：

$$K = k_1 \cdot k_2. \tag{1-1}$$

按高斯曲率的符号，可将曲面划分成下列三类：

(1) 正高斯曲率的曲面，即 $K>0$，如球面、椭球面、抛物面等（图 1-2a）。这类曲面上的二个主曲率半径都在曲面的同一侧。

(2) 零高斯曲率的曲面，即 $K=0$，如圆柱面、圆锥面等（图 1-2b）。曲面上每点的二主曲率之一等于零，或二主曲率半径之一是无限大。

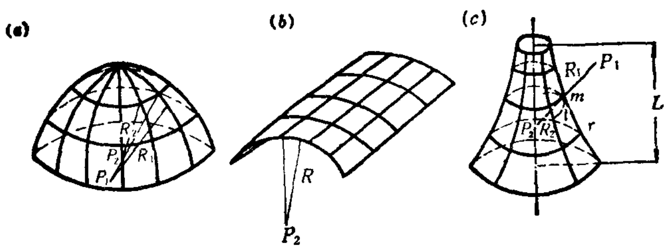

图 1-2

(3) 负高斯曲率的曲面，即 $K<0$，图 1-2c 所示的单叶双曲面可作为这类曲面的例子。在某点 m 上，二曲率线的曲率中心 P_1 及 P_2 位于该点的两侧，因此，

$$k_1 = \frac{1}{R_1} \quad 及 \; k_2 = \frac{1}{R_2}.$$

具有不同的符号，从而高斯曲率 K 是负的。

壳体也可按其中面的高斯曲率符号分类，分别称为正、负、零高斯曲率壳体。

在笛卡尔坐标系中任何曲面可用以下三个方程确定：

$$\left.\begin{aligned} x&=f_1(\alpha,\beta), \\ y&=f_2(\alpha,\beta), \\ z&=f_3(\alpha,\beta). \end{aligned}\right\} \tag{1-2}$$

其中 f_1,f_2,f_3 是参变数 α,β 的单值连续函数。依次给 β 一系列的定值，同时变化 α，在曲面上得到一族曲线；同样，给 α 一系列的定值，同时变化 β，就得到另一族曲线。我们限制参变数的变化范围，使得曲面上的每一个点第一族和第二族曲线中各有一条曲线通过，这样，曲面上的每一个点都可以看成是 α,β 两曲线的交点。两族曲线便组成了曲面的曲线坐标网。为了应用的方便，对于每一个曲面我们可以这样选择函数 f_1,f_2,f_3，使得两族坐标曲线同时是曲面曲率线的坐标系(图 1-3)。例如，地球的经线和纬线就是地球表面的曲率线坐标系。设地球的半径为 R，而 α,β 分别为纬度角与经度角，笛卡尔坐标系原点与球心重合(图1-4)，则(1-2)式有下列形式：

$$x=R\sin\alpha\sin\beta,\quad y=R\sin\alpha\cos\beta,\quad z=R\cos\alpha.$$

三个标量方程(1-2)相当于一个向量方程：

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(\alpha,\beta),$$

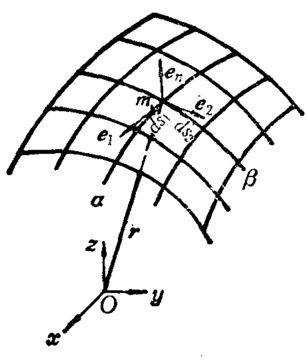

图 1-3

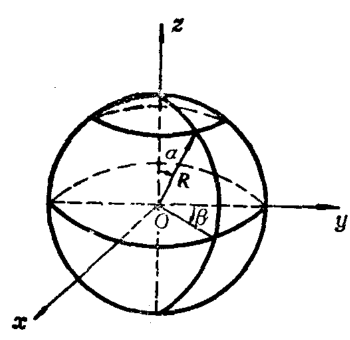

图 1-4

把它投影到 x、y、z 轴上，就得到(1-2)式。$\boldsymbol{r}$ 对 α 及 β 的导数

$$\boldsymbol{r}_\alpha=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \alpha}\ ,\qquad \boldsymbol{r}_\beta=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \beta}\ ,$$

在曲面的每一点上分别与 α,β 线相切，这是因为，如果给一个曲线坐标以增量，则向量 $\boldsymbol{r}$ 的端点在曲面上将沿着相应坐标线的方向移动。由此可知，向量

$$d\boldsymbol{s}=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \alpha}d\alpha+\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \beta}d\beta \tag{1-3}$$

的大小和方向都和连接曲面上相邻点(α,β) 与 ($\alpha+d\alpha,\beta+d\beta$) 而成的线段相同。此线段长度的平方为：

$$|d\boldsymbol{s}|^2=|\boldsymbol{r}_\alpha|^2d\alpha^2+2\boldsymbol{r}_\alpha\cdot\boldsymbol{r}_\beta d\alpha d\beta+|\boldsymbol{r}_\beta|^2d\beta^2. \tag{1-4}$$

由于采用的坐标是正交的，故

$$\boldsymbol{r}_\alpha\cdot\boldsymbol{r}_\beta=0,$$

从而(1-4)式可以写为：

$$ds^2=A^2d\alpha^2+B^2d\beta^2. \tag{1-5}$$

其中：

$$\left.\begin{aligned}A^2&=\left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \alpha}\right|^2,\\ B^2&=\left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \beta}\right|^2.\end{aligned}\right\} \tag{1-6}$$

在只有曲线坐标之一发生改变的情况下，则得：

$$\left.\begin{aligned}ds_1&=Ad\alpha\ ,\\ d\boldsymbol{s}_2&=Bd\beta\ .\end{aligned}\right\} \tag{1-7}$$

这里的 ds_1,ds_2 是 α 和 β 坐标线的弧长增量，分别与参变数增量 $d\alpha$,$d\beta$ 相对应。A 及 B 称为拉梅参数，一般是 α,β 的函数。它们表示曲面的几何性质，不同的曲面有不同的拉梅参数。当 $d\alpha=1$,$d\beta=1$时，A 及 B 分别等于坐标线的弧长增量 ds_1及ds_2，见图 1-3。曲面上任意点 m(图 1-3)处的任意向量 $\boldsymbol{T}$(力、力矩、位移等)可以表示为：

$$\boldsymbol{T}=T_1\boldsymbol{e}_1+T_2\boldsymbol{e}_2+T_n\boldsymbol{e}_n. \tag{1-8}$$

式中 T_1, T_2 及 T_n 分别为 $\boldsymbol{T}$ 在该点上对 α 曲线、β 曲线的切向及法线 z 方向的投影，而$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 及 $\boldsymbol{e}_n$ 分别为 α，β 切向及 z 方向的单位向量。从(1-3)和(1-7)式我们可以求得三个单位向量如下：

$$\left.\begin{aligned}
&\boldsymbol{e}_1=\frac{d\boldsymbol{s}_1}{ds_1}=\frac{1}{A}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \alpha},\\
&\boldsymbol{e}_2=\frac{d\boldsymbol{s}_2}{ds_2}=\frac{1}{B}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \beta},\\
&\boldsymbol{e}_n=\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2.
\end{aligned}\right\} \tag{1-9}$$

所以，要求得各向量的微分结果，就必须研究曲面上单位向量的微分规则。下面我们假设 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_n$ 服从右手螺旋法则，并设 $\boldsymbol{e}_n$ 指向曲面凸起的一侧。

例如为了求单位向量 $\boldsymbol{e}_1$ 的微商的分量，设图 1-5a 为曲面素在 P 点切平面上的投影。首先从图(b)及(c) 可以看出，$\boldsymbol{e}_1$ 的微商向量是垂直于 $\boldsymbol{e}_1$ 本身的，因此它在 $\boldsymbol{e}_1$ 方向的分量为零。$\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_n$ 也有相同性质，由此可以预测方程组(1-10) 的对角线之一的系数均为零是必然的。至于 $\boldsymbol{e}_1$ 的微商在 $\boldsymbol{e}_2$ 方向上的分量有：

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_1}{\partial \alpha}d\alpha=-d\theta_1\cdot\boldsymbol{e}_2,$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_1}{\partial \beta}d\beta=d\theta_2\cdot\boldsymbol{e}_2.$$

其次，再从图 1-5a 上可看出：

$$d\theta_1=\frac{\partial(ds_1)}{\partial\beta}d\beta\frac{1}{ds_2},\qquad d\theta_2=\frac{\partial(ds_2)}{\partial\alpha}d\alpha\frac{1}{ds_1}.$$

将此二值及(1-7)式中的 ds_1 和 ds_2 代入，则得：

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_1}{\partial \alpha}=-\frac{1}{B}\frac{\partial A}{\partial \beta}\boldsymbol{e}_2,$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_1}{\partial \beta}=\frac{1}{A}\frac{\partial B}{\partial \alpha}\boldsymbol{e}_2.$$

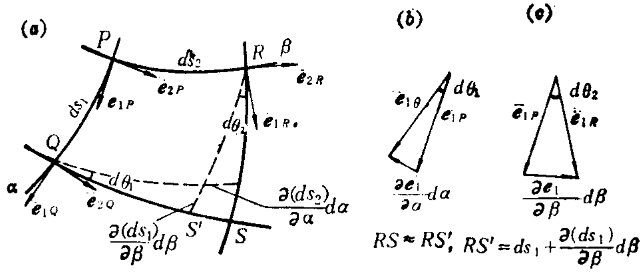

图 1-5

为了求单位向量 $\boldsymbol{e}_1$ 的微商在 $\boldsymbol{e}_n$ 方向的分量，我们考察在 α 主曲率平面的小单元。如图 1-6 所示，从图(a)及(b)得：

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_1}{\partial \alpha} d\alpha = -d\varphi \cdot \boldsymbol{e}_n = -\frac{ds_1}{R_1}\boldsymbol{e}_n = -\frac{A d\alpha}{R_1}\boldsymbol{e}_n,$$

即：

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_1}{\partial \alpha} = -\frac{A}{R_1}\boldsymbol{e}_n.$$

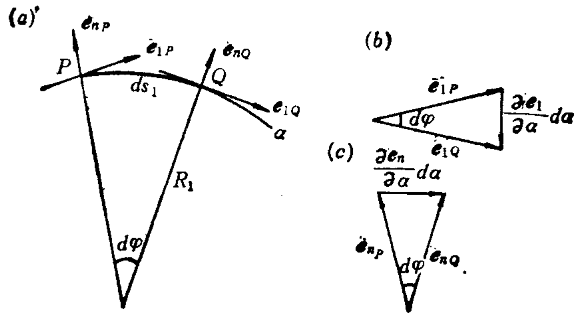

图 1-6

从这个图中还可看出，$\frac{\partial \boldsymbol{e}_2}{\partial \alpha} d\alpha$ 在 $\boldsymbol{e}_n$ 方向的分量为零，同理 $\frac{\partial \boldsymbol{e}_1}{\partial \beta} d\beta$ 在 $\boldsymbol{e}_n$ 方向的分量也等于零。

其次，从图中的(c)可以看出：

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_n}{\partial \alpha} d\alpha = d\varphi \cdot \boldsymbol{e}_1 = \frac{ds_1}{R_1}\boldsymbol{e}_1 = \frac{A d\alpha}{R_1}\boldsymbol{e}_1,$$

即：

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_n}{\partial \alpha} = \frac{A}{R_1}\boldsymbol{e}_1.$$

相似地可以求得：

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_n}{\partial \beta} = \frac{B}{R_2}\boldsymbol{e}_2.$$

用同样的方法可以求出单位向量 $\boldsymbol{e}_2$ 的微商的分量，归纳起来如下：

	$\boldsymbol{e}_1$	$\boldsymbol{e}_2$	$\boldsymbol{e}_n$
$\frac{\partial \boldsymbol{e}_1}{\partial \alpha}=$		$-\frac{1}{B}\frac{\partial A}{\partial \beta}$	$-\frac{A}{R_1}$
$\frac{\partial \boldsymbol{e}_1}{\partial \beta}=$		$\frac{1}{A}\frac{\partial B}{\partial \alpha}$	
$\frac{\partial \boldsymbol{e}_2}{\partial \beta}=$	$-\frac{1}{A}\frac{\partial B}{\partial \alpha}$		$-\frac{B}{R_2}$
$\frac{\partial \boldsymbol{e}_2}{\partial \alpha}=$	$\frac{1}{B}\frac{\partial A}{\partial \beta}$		
$\frac{\partial \boldsymbol{e}_n}{\partial \alpha}=$	$\frac{A}{R_1}$		
$\frac{\partial \boldsymbol{e}_n}{\partial \beta}=$		$\frac{B}{R_2}$	

(1-10)

应用上列公式我们还可以导出曲面参数 A, B 及主曲率半径 R_1, R_2 间的重要微分关系。根据向量的混合二阶导数的微分次序可以互换的条件得到：

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{e}_n}{\partial \alpha \partial \beta} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{e}_n}{\partial \beta \partial \alpha},$$

利用(1-10)式则得：

$$\frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{A}{R_1}\boldsymbol{e}_1\right) = \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{B}{R_2}\boldsymbol{e}_2\right),$$

或：

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{A}{R_1}\right)\boldsymbol{e}_1+\frac{A}{R_1}\frac{\partial\boldsymbol{e}_1}{\partial\beta}=\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{B}{R_2}\right)\boldsymbol{e}_2+\frac{B}{R_2}\frac{\partial\boldsymbol{e}_2}{\partial\alpha}.$$

将 $\frac{\partial\boldsymbol{e}_1}{\partial\beta}$ 及 $\frac{\partial\boldsymbol{e}_2}{\partial\alpha}$ 之值代入，并将所有各项移到左边去，就得到：

$$\left[\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{A}{R_1}\right)-\frac{1}{R_2}\frac{\partial A}{\partial\beta}\right]\boldsymbol{e}_1-\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{B}{R_2}\right)-\frac{1}{R_1}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\right]\boldsymbol{e}_2=0.$$

根据此向量恒等式，就得到两个关系式：

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{B}{R_2}\right)&=\frac{1}{R_1}\frac{\partial B}{\partial\alpha}.\\ \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{A}{R_1}\right)&=\frac{1}{R_2}\frac{\partial A}{\partial\beta}.\end{aligned}\right\}\tag{1-11}$$

同样，等式

$$\frac{\partial^2\boldsymbol{e}_1}{\partial\alpha\partial\beta}=\frac{\partial^2\boldsymbol{e}_1}{\partial\beta\partial\alpha},$$

利用(1-10)式可把它化成：

$$\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\right)+\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial A}{\partial\beta}\right)+\frac{AB}{R_1R_2}\right]\boldsymbol{e}_2$$
$$+\left[\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{A}{R_1}\right)-\frac{1}{R_2}\frac{\partial A}{\partial\beta}\right]\boldsymbol{e}_n=0.$$

此向量等式为恒等式，故方括号中的量应等于零。这样又得到两个微分关系式，但只有第一个是新的，它的形式为：

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\right)+\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial A}{\partial\beta}\right)=-\frac{AB}{R_1R_2}.\tag{1-12}$$

在曲面理论中，关系式(1-11)称为科达齐条件，而关系式(1-12)称为高斯条件。这三个条件说明曲面上任意点的拉梅参数 A，B 与该点的主曲率半径 R_1，R_2 是不能任意选择的。如果曲面形状为已定，则它们一定服从这三个条件。只要不符合这三个条件之一，那就意味着曲面的连续性遭到了破坏。

§ 1-3 壳体的变形及其中面的变形

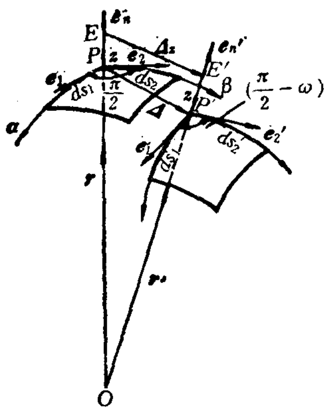

图 1-7

首先，我们来讨论壳中面的变形；其次，寻求壳层的位移与壳中面位移间的关系；最后，研究壳层的变形并按照基本假设建立与壳中面变形的关系，从而把对壳体变形的研究化为对壳中面变形的研究。

设壳中面在 α，β 和中面法线 z 方向的位移分量分别为u,v,w，变形前壳中面的坐标向量为 $\boldsymbol{r}$，变形后的坐标向量为 $\boldsymbol{r}'$(图 1-7)，其表达式为：

$$\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\Delta}=\boldsymbol{r}+u\boldsymbol{e}_1+v\boldsymbol{e}_2+w\boldsymbol{e}_n, \tag{1-13}$$

因而有：

$$\frac{\partial\boldsymbol{r}'}{\partial\alpha}=\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\alpha}+u\frac{\partial\boldsymbol{e}_1}{\partial\alpha}+v\frac{\partial\boldsymbol{e}_2}{\partial\alpha}+w\frac{\partial\boldsymbol{e}_n}{\partial\alpha}$$
$$+\frac{\partial u}{\partial\alpha}\boldsymbol{e}_1+\frac{\partial v}{\partial\alpha}\boldsymbol{e}_2+\frac{\partial w}{\partial\alpha}\boldsymbol{e}_n.$$

将(1-9)式及(1-10)式的向量微商代入，则得：

$$\frac{\partial\boldsymbol{r}'}{\partial\alpha}=A\left(1+\frac{1}{A}\frac{\partial u}{\partial\alpha}+\frac{v}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta}+\frac{w}{R_1}\right)\boldsymbol{e}_1$$
$$+\left(\frac{\partial v}{\partial\alpha}-\frac{1}{B}\frac{\partial A}{\partial\beta}u\right)\boldsymbol{e}_2+\left(\frac{\partial w}{\partial\alpha}-\frac{A}{R_1}u\right)\boldsymbol{e}_n. \tag{1-14}$$

因此，相似于(1-6)式，变形后的曲面参数为：

$$(A')^2=\left|\frac{\partial\boldsymbol{r}'}{\partial\alpha}\right|^2=\frac{\partial\boldsymbol{r}'}{\partial\alpha}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}'}{\partial\alpha}$$
$$\approx A^2\left(1+\frac{1}{A}\frac{\partial u}{\partial\alpha}+\frac{v}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta}+\frac{w}{R_1}\right)^2.$$

在利用(1-14)自乘过程中，只需注意向量$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_n$的正交性，即

$$\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_n=\boldsymbol{e}_n\cdot\boldsymbol{e}_1=0,\quad \boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{e}_n\cdot\boldsymbol{e}_n=1,$$

并将 $\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_2$ 和 $\boldsymbol{e}_n\cdot\boldsymbol{e}_n$ 前面系数自乘积作为二阶微小量加以忽略，便得到上式。由于位移和壳体的厚度相比很小，采用这种简化是容许的，由上式我们得到：

$$A'=A\left(1+\frac{1}{A}\frac{\partial u}{\partial\alpha}+\frac{v}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta}+\frac{w}{R_1}\right). \tag{1-15}$$

中面上 α 方向线素的伸长率，按图 1-7 及公式(1-7)的第一式可写成

$$\varepsilon_1=\frac{ds_1'-ds_1}{ds_1}=\frac{A'd\alpha-Ad\alpha}{Ad\alpha},$$

将 A' 的值代入便得到：

$$\varepsilon_1=\frac{1}{A}\frac{\partial u}{\partial\alpha}+\frac{v}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta}+\frac{w}{R_1}. \tag{1-16}$$

用相似的方法可得到 β 方向线素的伸长率：

$$\varepsilon_2=\frac{1}{B}\frac{\partial v}{\partial\beta}+\frac{u}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha}+\frac{w}{R_2}. \tag{1-17}$$

壳中面的角变(或剪切变形)ω 等于 α 与 β 曲线之间的夹角变化后的余弦，即 $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\omega\right)$。为此，我们来求壳中面在变形后沿 α 和 β 切线方向的单位向量 $\boldsymbol{e}_1'$ 及 $\boldsymbol{e}_2'$(图 1-7)，按(1-9)的第一式有：

$$\boldsymbol{e}_1'=\frac{1}{A'}\frac{\partial\boldsymbol{r}'}{\partial\alpha},$$

将式(1-14)及(1-15)代入上式，则得到：

$$\boldsymbol{e}_1'=\boldsymbol{e}_1+\left(\frac{1}{A}\frac{\partial v}{\partial\alpha}-\frac{u}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta}\right)\boldsymbol{e}_2+\left(\frac{1}{A}\frac{\partial w}{\partial\alpha}-\frac{u}{R_1}\right)\boldsymbol{e}_n. \tag{1-18}$$

在计算中忽略了所有的二阶微小量。同样可以求得：

$$\boldsymbol{e}_2'=\boldsymbol{e}_2+\left(\frac{1}{B}\frac{\partial u}{\partial\beta}-\frac{v}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\right)\boldsymbol{e}_1+\left(\frac{1}{B}\frac{\partial w}{\partial\beta}-\frac{v}{R_2}\right)\boldsymbol{e}_n. \tag{1-19}$$