时代教育

立足高考大纲　探究知识内涵　解读奥赛真题
揭示思维规律　点击高考难题　登上名校殿堂

奥赛·高考全程对接

高二数学

北京四中
北师大实验中学
人大附中
清华附中
北师大二附中
首师大附中
北京八中
北京101中学
民族大学附中
北京13中

教师联合编写组编写

本书主编　李双平　刘建玉

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

ISBN 7-111-01708-0/G·763
封面设计／电脑制作：鞠杨

奥赛·中考全程对接　初一数学
奥赛·中考全程对接　初二数学
奥赛·中考全程对接　初二物理
奥赛·中考全程对接　初三数学
奥赛·中考全程对接　初三物理
奥赛·中考全程对接　初三化学
奥赛·高考全程对接　高一数学
奥赛·高考全程对接　高一物理
奥赛·高考全程对接　高一化学
奥赛·高考全程对接　高二数学
奥赛·高考全程对接　高二物理
奥赛·高考全程对接　高二化学
奥赛·高考全程对接　高三数学
奥赛·高考全程对接　高三物理
奥赛·高考全程对接　高三化学
奥赛·高考全程对接　高中生物

ISBN 7-111-01708-0
9 787111 017080 >
定价：14.00元

地址：北京市百万庄大街22号　邮政编码：100037
联系电话：(010) 68326294　网址：http://www.cmpbook.com
E-mail:online@cmpbook.com

奥赛·高考全程对接

高 二 数 学

丛书总策划：蔡　晔
本书主编：李双平　刘建玉

机械工业出版社

本书以高中二年级教学大纲中的重点、难点和高中竞赛大纲中被加深、拓展的知识点为知识基础，结合涉及到的本年级各类典型竞赛例题，剖析知识的内涵，发掘思维的本质，介绍解决难题的常规方法，归纳发散，培养和训练开放型创新思维，对接历年高考中有关本知识段的“难题”，用奥赛解题思维巧解高考难题，并通过举一反三训练及时巩固，引导创新。

图书在版编目(CIP)数据

奥赛·高考全程对接．高二数学/李双平，刘建玉主编．—北京：机械工业出版社，2003.9

ISBN 7-111-01708-9

Ⅰ．奥… Ⅱ．①李…②刘… Ⅲ．数学课-高中-升学参考资料 Ⅳ．G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 070042 号

机械工业出版社(北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037)

策划编辑：邝 鸥 责任编辑：王春雨

版式设计：郑文斌 封面设计：鞠 杨

责任印制：路 琳

北京市樱花印刷厂印刷·新华书店北京发行所发行

2003 年 9 月第 1 版·第 1 次印刷

880mm×1230mm 1/32·10.125 印张·311 千字

定价：14.00 元

前 言

如今，奥林匹克这个名字，已经成为人类最高水平竞赛的代名词，对每一位有竞争意识的人，都充满着无法抗拒的诱惑力。能够得到它的垂青，是一个人一生中无上的荣誉，哪怕是仅仅参与一下都会让人激动不已。

本书编写意图

中学生学科奥林匹克竞赛也是如此。

1959年第一届国际中学生数学奥林匹克竞赛（IMO）在罗马尼亚成功举办，拉开了中学生学科奥林匹克竞赛的序幕，紧接着又相继产生了中学生物理（IPHO）、化学（ICO）、生物（IBO）、信息学（IOI）等学科奥林匹克竞赛。我国自1985年参加这一赛事以来，取得了辉煌的成绩，为祖国争得了很高的荣誉，同时也使得国内奥林匹克选拔赛轰轰烈烈地开展来。国家的最高教育和科技行政部门也对中学生的各学科奥林匹克的一系列竞赛给予了足够重视。不仅形成了规范的竞赛制度，还制定了与普通教学大纲相衔接的三级竞赛大纲，如此系统的大纲，除高考外还是第一个。

在2003年高考招生过程中，全国一流重点大学及各地招生办对高中应届毕业生的保送资格有如下要求："获全国高中数学联赛、全国中学生物理竞赛、全国高中学生化学竞赛、全国青少年信息学奥林匹克联赛、全国中学生生物学联赛，省级赛区一等奖；获全国数学奥林匹克竞赛、全国中学生物理竞赛、全国高中学生化学竞赛、全国青少年信息学奥林匹克竞赛、全国中学生生物学竞赛，全国决赛一、二、三等奖。"而且，对于以上获奖又参加高考的，享有10到20分的特征加分待遇。

看到以上这段文字，每一位面临高考的同学都不免会怦然心动：既是一种莫大的荣誉，又有实实在在的收获。

但是，要想攀上奥林匹克的高峰可不是一件容易事，因为它首先要求同学们在具有扎实的课本知识的基础上还要了解知识的更深层的内涵和更广的外延；其次，还要求同学们具有很强的综合创新解题能力。这两点要求，就目前正常的中学教学和学习深度还是很难达到的。所以要在掌握好教学大纲规定的知识和能力的同时，进行一些拓展学习和训练。日积月累、循序渐进，把自己也培养成一个“天才”。

如何进行课外拓展学习，不能盲目操作，要有一套科学的方法和计划，还要有一个得力的助手——辅导参考书。否则，会顾此失彼，得不偿失。

另外，奥林匹克竞赛受到如此程度的重视，其根本原因是各级“奥赛”试题具有很强的创新性、灵活性、综合性，注重考查学生对知识的理解及综合运用能力和思维方法的掌握和创新能力。而这一点恰恰是素质教育的核心内容，也是高考改革的精神实质。

下面是有关 2003 年的高考试卷的一段报道：“‘今年的数学题新而不怪，试题难，易拉开档次，每位考生可以根据自己的能力爬台阶式的做题。’高考数学阅卷组组长周兴和教授谈起今年的高考数学试卷时说。据介绍，今年的数学试卷就连小题目都没有明显的送分题，考查点偏重于知识网络的交汇点。周兴和指出：这张数学试卷是对沉迷于题海战术式教育的一次沉重打击，用常规的课堂教学思维应付这张试卷显然不太够。据了解，从部分批阅的考卷看，考生缺乏开放性思维、应用意识不完美等问题已暴露无遗。”

从以上这段报道，我们可以更清晰的看出学习“奥赛”的重要性。对比“奥赛”初赛、复赛大纲和高考大纲，以及历年初赛、复赛试题和高考中的难题、压轴题也不难得出这一结论。因此，我们学习和研究奥林匹克竞赛不光是为了夺取“奥赛”金牌，更重要的是可以让我们站在一个更高的高度俯视普通的中学学习和高考，在学习和应考上能够登上一个新的台阶，更加从容地面对高考的洗礼，取得出色成绩。

基于以上几方面原因，我们编写了这套丛书，希望能为同学们找到一条通向更大成功的有效捷径。

本书编写特点

本书内容的难度定位在略高于高考水平，不超过奥赛复赛的最高

难度，以中学教学大纲中的重点、难点和被奥赛大纲加深、拓展的知识点为知识基础。结合各类典型竞赛例题，剖析知识的内涵，发掘思维的本质，介绍解决难题的常规方法，归纳发散，培养和训练开放型创新思维，对接历年高考中的经典“拔高”题，用奥赛解题思维巧解高考难题，并通过举一反三训练及时巩固，引导创新。

本书编写形式为讲练结合，重点放在例题讲解上。各栏目所选例题具有典型的代表性，思路剖析透彻，解答过程详尽，点津之笔富有启发性，练习题少而精，能起到举一反三的效果，避免“偏题”、“怪题”和“题海战术”。对于较难的练习题，一般会给出全解或解答提示，但这仅作参考。同学们要自己开动脑筋，结合例题，想出自己的解决方案来。

本套丛书涉及数学、物理、化学、生物各科，涵盖中学各个年级，共计 16 分册，知识讲解系统，题型全面，可作为同步辅导教材使用。

本书编写力量

本套丛书由中学教育专家、全国化学教学研究会副理事长、北京化学奥校校长、特级教师黄儒兰担任编委会主任，主持丛书编写工作。

参加本套丛书编写的人员均为来自北京四中、北师大附属实验中学、人大附中、清华附中、首师大附中、北师大二附中、北京八中、北京 101 中学、北京 13 中、民族大学附中等一批京城重点名校的一线优秀教师和奥赛辅导教练；几位清华大学和北京大学的奥赛保送生和高考理科状元也为本书做了许多有益工作。

由于编写时间较紧，可能存在一些缺憾，敬请广大读者批评指正。

编　者

目　　录

注：每节均包含[知识对接]、[经典名题]、[思维发散]、[高考对接]、[举一反三训练]、[答案与提示]六个板块。

第一章　不等式的证明方法

第一节　基本方法

知识对接

证明不等式，是以不等式的性质作为理论依据，利用一些基本不等式作为基础，而且证明的方法很多，技术性较强．因此，在证明不等式时，既要重视基本方法的运用，又要考虑其他方法和变形的技巧．本节所涉及的方法都是证明不等式时常用的基本方法．

1．比较法

分比差和比商两种：即欲证明 $A > B$，可以证明 $A - B > 0$ 或在 $B > 0$ 条件下，证明 $\frac{A}{B} > 1$．

2．分析法

从所求证的不等式出发，将其逐步转化为明显、常见的不等式(注意转化过程中每步应可逆推)．

3．综合法

从已知条件、已知定理和不等式出发，以推理方式，每步阐明原因、根据，逐步推导求出结论．

4．反证法

从所证不等式不成立的假定出发，推出与已知条件或与事实明显相矛盾的结果，从而证明结论成立．

经典名题

例 1 已知 a、$b \in \mathbf{R}^+$，m、$n \in \mathbf{N}^*$．

求证：$a^{m+n} + b^{m+n} \geqslant a^m b^n + a^n b^m$．

【思路导航】 用作差比较法，便于化简．

【证明】 $\because$ $a^{m+n} + b^{m+n} - (a^m b^n + a^n b^m)$

$= (a^{m+n} - a^m b^n) + (b^{m+n} - a^n b^m)$

$= a^m(a^n - b^n) - b^m(a^n - b^n)$

$=(a^n-b^n)(a^m-b^m)$

$\because$ $a、b\in\mathbf{R}^+$,

$m、n\in\mathbf{N}^*$, $\therefore$ 当 $a>b>0$ 时,

$a^m>b^m, a^n>b^n$.

即 $a^m-b^m>0, a^n-b^n>0$.

$\therefore$ $(a^m-b^m)\cdot(a^n-b^n)>0$,

$\therefore$ $a^{m+n}+b^{m+n}>a^mb^n+a^nb^m$.

当 $b>a>0$ 时, $\because$ $m、n\in\mathbf{N}^*$.

同理有: $a^m-b^m<0, a^n-b^n<0$.

$\therefore$ $(a^m-b^m)\cdot(a^n-b^n)>0$,

$\therefore$ $a^{m+n}+b^{m+n}>a^mb^n+a^nb^m$.

当 $a=b>0$ 时, $a^m=b^m, a^n=b^n$.

$\therefore$ $a^{m+n}+b^{m+n}=a^mb^n+a^nb^m$.

总之, $a^{m+n}+b^{m+n}\geqslant a^mb^n+a^nb^m$.

【点津】 作差比较法,作差后的变形要有目的,作差的目的在于判断它的符号.因此,变形的主要方法有分解因式和配方.

例 2 已知: a,b,c 是互不相等的正数.

求证: $a^{2a}b^{2b}c^{2c}>a^{b+c}b^{c+a}c^{a+b}$.

【思路导航】 由于所证不等式的两边都是幂与积的形式,而且都是正数,因此可考虑用作商比较法来证明.

【证明】 由于所证不等式是一个轮换对称不等式,因此,可不妨假设 $a>b>c$.

考查比值 $p=\dfrac{a^{2a}b^{2b}c^{2c}}{a^{b+c}b^{c+a}c^{a+b}}=a^{(a-b)+(a-c)}b^{(b-c)+(b-a)}c^{(c-b)+(c-a)}=$

$(\dfrac{a}{b})^{a-b}(\dfrac{b}{c})^{b-c}(\dfrac{c}{a})^{c-a}$ 与 1 的大小关系.

$\because$ $a>b>c>0$

$\therefore$ $\dfrac{a}{b}>1, a-b>0, \dfrac{b}{c}>1, b-c>0$

$0<\dfrac{c}{a}<1, c-a<0$

根据指数函数的性质可知

$(\dfrac{a}{b})^{a-b}>1, (\dfrac{b}{c})^{b-c}>1, (\dfrac{c}{a})^{c-a}>1$

全程对接

$\therefore \quad p=(\frac{a}{b})^{a-b}(\frac{b}{c})^{b-c}(\frac{c}{a})^{c-a}>1$

即 $\quad \frac{a^{2a}b^{2b}c^{2c}}{a^{b+c}b^{c+a}c^{a+b}}>1$

$\because \quad a^{b+c}b^{c+a}c^{a+b}>0$

$\therefore \quad a^{2a}b^{2b}c^{2c}>a^{b+c}b^{a+c}c^{a+b}$.

【点津】 一般地，当所证不等式的左边和右边都是幂或积的形式，而且两端的符号可以确定时，可考虑选用作商比较法来证明.

例3 已知 $0<x<1$，求证：

$$\left|\log_a(1-x)\right|>\left|\log_a(1+x)\right|.$$

【证法一】 作差，并分两种情形.

（Ⅰ）当 $0<a<1$ 时，因 $0<x<1$，故

$$\begin{aligned}&\left|\log_a(1-x)\right|-\left|\log_a(1+x)\right|\\&=\log_a(1-x)+\log_a(1+x)\\&=\log_a(1-x^2)>0.\end{aligned}$$

（Ⅱ）当 $a>1$ 时，因 $0<x<1$，故

$$\begin{aligned}&\left|\log_a(1-x)\right|-\left|\log_a(1+x)\right|\\&=-\log_a(1-x)-\log_a(1+x)\\&=-\log_a(1-x^2)>0.\end{aligned}$$

综合（Ⅰ），（Ⅱ），知不等式成立.

【证法二】 因为 $0<x<1$，所以 $\left|\log_a(1-x)\right|>0$，$\left|\log_a(1+x)\right|>0$，有

$$\frac{\left|\log_a(1-x)\right|}{\left|\log_a(1+x)\right|}=\left|\log_{(1+x)}(1-x)\right|=-\log_{(1+x)}(1-x)$$

$$=\log_{(1+x)}\frac{1}{1-x}=\log_{(1+x)}\frac{1+x}{1-x^2}$$

$$>\log_{(1+x)}(1+x)=1,$$

所以不等式成立.

例4 设△ABC 的边长分别为 a、b、c，且 $m>0$. 求证：

$\frac{a}{a+m}+\frac{b}{b+m}>\frac{c}{c+m}$.

【证明】 由已知 $a>0,b>0,c>0,m>0$.

欲证 $\frac{a}{a+m}+\frac{b}{b+m}>\frac{c}{c+m}$

只需证 $\frac{a(b+m)+b(a+m)}{(a+m)(b+m)}>\frac{c}{c+m}$

即证 $\frac{2ab+m(a+b)}{ab+m(a+b)+m^2}>\frac{c}{c+m}$

只需证 $(c+m)[2ab+m(a+b)]>c[ab+m(a+b)+m^2]$

即证 $(a+b-c)m^2+2abm+abc>0$

$\because$ $a+b-c>0$

$\therefore$ 上式显然成立.

$\therefore$ 原不等式成立.

【点津】 本题采用了分析法证明不等式，而用分析法证明命题"若 A 则 B"，实质上就是从结论 B 出发，逐步寻求使 B 成立的充分条件，其格式为：欲证 B，只需证 B_1，又需证 B_2，…，只需 A，或者最后是一个显然成立的结论.

例5 设有 n 个实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 满足条件：

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=0,$$
$$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1,$$

其中 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中最小者为 a，最大者为 b，分别记作 $a=\min\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，$b=\max\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$. 求证：$ab\leqslant-\frac{1}{n}$.

【证明】 只须证明

$$1+nab\leqslant 0. \cdots\cdots ①$$

根据题设条件，①可改写为

$$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2-(x_1+x_2+\cdots+x_n)(a+b)+nab\leqslant 0. \cdots\cdots ②$$

②又可改写为

$$[x_1^2-(a+b)x_1+ab]+[x_2^2-(a+b)x_2+ab]+\cdots+[x_n^2-(a+b)x_n+ab]\leqslant 0. \cdots\cdots ③$$

现只须再证明

$$x_i^2-(a+b)x_i+ab\leqslant 0(i=1,2,\cdots,n),$$

即 $(x_i-a)(x_i-b)\leqslant 0(i=1,2,\cdots,n)$. ………………… ④

④式显然成立,故命题得证.

【点津】 将①改为②,是本例分析中关键一步.这一"妙招"与发掘题设中所隐含的关系$(x_i-a)(x_i-b)\leqslant 0$,可以说是一脉相承.

例6 求证:$\pi^e<e^\pi$

【思路导航】 e,π为数学中两个最重要常数(π为圆周率,e为自然对数之底),它们之间是指数不等式,用自然对数来证明为宜.

【证明】 由e定义知$x>0$时,$(1+x)^{\frac{1}{x}}<e$.以e为底取对数($e>1$),有$\frac{1}{x}\ln(1+x)<\ln e=1$,即$\ln(1+x)<x$,对$x>0$均成立.取$x=\ln\pi-1$,则有$\ln(\ln\pi)<\ln\pi-1=\ln\frac{\pi}{e}$,于是$\ln\pi<\frac{\pi}{e}$.故$\pi<e^{\frac{\pi}{e}}$,即$\pi^e<e^\pi$.

【点津】 本题已知条件不明显.用综合法应从与e,π有关的重要关系式出发,是证明问题的关键.本题是将不等式$(1+x)^{\frac{1}{x}}<e$作为已知.

例7 对于实数$x_1,x_2,\cdots,x_n,x_1+x_2+\cdots+x_n=0$,求证:不等式$x_1x_2+x_2x_3+\cdots+x_{n-1}x_n+x_nx_1\leqslant 0$在$n=3,4$时成立,$n\geqslant 5$时不成立.

【证明】 (1)若$x_1+x_2+x_3=0$,那么

$$\begin{aligned}&x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1\\&=\frac{1}{2}[(x_1+x_2+x_3)^2-(x_1^2+x_2^2+x_3^2)]\\&=-\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2+x_3^2)\leqslant 0.\end{aligned}$$

(2)若$x_1+x_2+x_3+x_4=0$,那么

$x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+x_4x_1=(x_1+x_3)(x_2+x_4)$

$\leqslant(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{2})^2=0.$

(3)当$n\geqslant 5$时,取$x_1=x_2=1,x_4=-2,x_3=x_5=x_6=\cdots=x_n=0$,此时$x_1+x_2+\cdots+x_n=0$,但

$$x_1x_2+x_2x_3+\cdots+x_{n-1}x_n+x_nx_1=1>0,$$

可见不等式不成立.

例8 设$\triangle ABC$的三边分别是a、b、c.求证:$a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ca>\frac{1}{4}(a+b+c)^2$.

【思路导航】 左边的不等式是平方和与积的关系，我们可用 $a^2+b^2\geqslant 2ab$ 来证，右边的不等式在证明时，要注意应用“在同一三角形中，任意两边之和大于第三边”.

【证明】 $\because\quad a^2+b^2\geqslant 2ab,b^2+c^2\geqslant 2bc,c^2+a^2\geqslant 2ca.$

将上面三个不等式相加，得

$2(a^2+b^2+c^2)\geqslant 2(ab+bc+ca)$

即 $\quad a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ca$

$\because\quad a$、b、c 是三角形的三边

$\therefore\quad a+b>c,b+c>a,a+c>b$

$\therefore\quad ac+bc>c^2,ba+ca>a^2,ab+bc>b^2$

将上面三个不等式相加，得

$$2(ab+bc+ca)>a^2+b^2+c^2$$

又 $\because(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca<4(ab+bc+ca)$

$\therefore\quad \dfrac{1}{4}(a+b+c)^2<ab+bc+ca$

$\therefore\quad a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ca>\dfrac{1}{4}(a+b+c)^2$

例 9 已知 $0<a<1,0<b<1,0<c<1$. 求证：$(1-a)b,(1-b)c,(1-c)a$ 中至少有一个不大于 $\dfrac{1}{4}$.

【证明】 假设 $(1-a)b,(1-b)c,(1-c)a$ 都大于 $\dfrac{1}{4}$，

则 由 $0<a<1,0<b<1,0<c<1$，有 $0<1-a<1,0<1-b<1,0<1-c<1$.

$\therefore\quad \dfrac{(1-a)+b}{2}\geqslant\sqrt{(1-a)b}>\dfrac{1}{2}$

$\dfrac{(1-b)+c}{2}\geqslant\sqrt{(1-b)c}>\dfrac{1}{2}$

$\dfrac{(1-c)+a}{2}\geqslant\sqrt{(1-c)a}>\dfrac{1}{2}$

三式相加有

$$\frac{(1-a)+b}{2}+\frac{(1-b)+c}{2}+\frac{(1-c)+a}{2}>\frac{3}{2},$$

即 $\quad \dfrac{3}{2}>\dfrac{3}{2}$，这显然是一对矛盾.

$\therefore\quad$ 假设不成立.

∴ 原结论成立.

【点津】 "不大于"的反面是"大于"."至少有一个"的反面是"一个也没有".在结论的反面较为简单,容易表述时,往往要用反证法.

例 10 设 $f(x)$,$g(x)$都是$[0,1]$上的实值函数.试证:必存在 $x_0,y_0\in[0,1]$使不等式$|x_0y_0-f(x_0)-g(y_0)|\geqslant\frac{1}{4}$成立.

【思路导航】 这个不等式直接证明很困难,因为要找到使不等式$|x_0y_0-f(x_0)-g(y_0)|\geqslant\frac{1}{4}$成立的 x_0,y_0 的具体值不容易,因此,我们可以考虑利用反证法来证明这个问题.

【证明】 假设在区间$[0,1]$上不存在使不等式$|x_0y_0-f(x_0)-g(y_0)|\geqslant\frac{1}{4}$成立的 x_0,y_0,则对任意的 $x,y\in[0,1]$都有$|xy-f(x)-g(y)|<\frac{1}{4}$. ………………………… ①

取 $x_1=y_1=0$;$x_2=0,y_2=1$;$x_3=1,y_3=0$;$x_4=y_4=1$.分别代入不等式①,得

$|f(0)+g(0)|<\frac{1}{4}$,$|f(0)+g(1)|<\frac{1}{4}$,$|f(1)+g(0)|<\frac{1}{4}$,$|1-f(1)-g(1)|<\frac{1}{4}$.由此可得 $1=|[1-f(1)-g(1)]+[f(1)+g(0)]+[f(0)+g(1)]+[f(0)+g(0)]|\leqslant|1-f(1)-g(1)|+|f(1)+g(0)|+|f(0)+g(1)|+|f(0)+g(0)|<\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=1$.这是一个矛盾,这个矛盾表明原假设不成立.因此,必存在 $x_0,y_0\in[0,1]$,使不等式$|x_0y_0-f(x_0)-g(y_0)|\geqslant\frac{1}{4}$成立.

思维发散

"经典名题"例 8 采用了综合法证明不等式,而本题的证法很多,可用作差比较法证明.

【证法一】 作差比较法.

$\because\ 2(a^2+b^2+c^2)-2(ab+bc+ca)$
$=(a^2+b^2-2ab)+(b^2+c^2-2bc)+(c^2+a^2-2ca)$
$=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\geqslant0$

$\therefore\ a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ca$.

$\therefore \quad 4(ab+bc+ca)-(a+b+c)^2$

$=2ab+2bc+2ca-a^2-b^2-c^2$

$=(ab+bc-b^2)+(bc+ca-c^2)+(ca+ab-a^2)$

$=b(a+c-b)+c(b+a-c)+a(c+b-a)>0$

$\therefore ab+bc+ca>\frac{1}{4}(a+b+c)^2$

$\therefore a^2+b^2+c^2>ab+bc+ca>\frac{1}{4}(a+b+c)^2$

【证法二】 由$(a-tb)^2+(b-tc)^2+(c-ta)^2\geqslant 0$恒成立，

即 $(a^2+b^2+c^2)t^2-2(ab+bc+ca)t+(a^2+b^2+c^2)\geqslant 0$恒成立，

$\therefore \Delta=4(ab+bc+ca)^2-4(a^2+b^2+c^2)^2\leqslant 0.$

$\therefore a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ca$

$\because a$、b、c为三角形的三边.

$\therefore$存在正实数x、y、z，使$a=x+y, b=y+z, c=z+x$

$\therefore$不等式$ab+bc+ca>\frac{1}{4}(a+b+c)^2$将化为

$(x+y)(y+z)+(y+z)(z+x)+(z+x)(x+y)>(x+y+z)^2$

即$xy+yz+zx>0$，这是显然成立的不等式.

$\therefore ab+bc+ca>\frac{1}{4}(a+b+c)^2.$

$\therefore a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ca>\frac{1}{4}(a+b+c)^2$

高考对接

例 (1993·全国高考)已知关于x的实系数二次方程$x^2+ax+b=0$有两个实数根α,β,证明

(1)如果$|\alpha|<2$,且$|\beta|<2$,那么$2|a|<4+b$,且$|b|<4$;

(2)如果$2|a|<4+b$,且$|b|<4$,那么$|\alpha|<2$,且$|\beta|<2$.

【思路导航】 依题设,二次方程有两个实根α、β,所以判别式$\Delta=a^2-4b\geqslant 0$.

不妨取$\alpha=\frac{1}{2}(-a-\sqrt{\Delta})$,$\beta=\frac{1}{2}(-a+\sqrt{\Delta})$.

【解答】 (1)$\because \quad |\alpha|<2, |\beta|<2,$

$\therefore \quad |b|=|\alpha\beta|=|\alpha|\cdot|\beta|<4.$

且$-2<\frac{1}{2}(-a-\sqrt{\Delta}),\frac{1}{2}(-a+\sqrt{\Delta})<2$;