高等数学（一）

（2002年版）

全国高等教育自学考试全程应试指导

组　编／全国高等教育自学考试全程应试指导编委会
丛书主编／北京大学　林　娅
本书主编／中央财经大学　吴秉坚　王细

全国高等教育自学考试指定教材辅导用书　经济管理类专业

學苑

全国高等教育自学考试指定教材辅导用书

全国高等教育自学考试全程应试指导

高等数学(一)

(串讲指导·题型训练·模拟试题·最新真题)

组　　编　全国高等教育自学考试全程应试指导编委会

丛书主编　北京大学　林　娅

本书主编　中央财经大学　吴秉坚　王纲

学苑出版社

图书在版编目(CIP)数据

全国高等教育自学考试全程应试指导:公共类(2002年版)/林娅主编.—北京:学苑出版社,2001.12

ISBN 7-5077-1849-2

Ⅰ.全… Ⅱ.林… Ⅲ.高等教育 自学考试—复习参考资料 Ⅳ.G73

中国版本图书馆CIP数据核字(2001)第17394号

全国高等教育自学考试全程应试指导

高等数学(一)

北京大学 林娅

中央财经大学 吴秉坚 王纲

*

学苑出版社出版发行

北京市万寿路西街11号 100036

北京市朝阳印刷厂排版印刷 新华书店经销

880×1230毫米 1/32开本 130印张 5000千字

2001年12月北京第1版 2001年12月北京第1次印刷

印数:0001—5000册 定价:166.40元

(图书出现印装问题,本社负责调换)

前　　言

全国高等教育自学考试指导委员会颁布的《高等数学(一)微积分自学考试大纲》及全国高等教育自学考试指导委员会组编的教材《高等数学(一)微积分》(武汉大学出版社,高汝熹主编)而编写的自学辅导用书。本书的内容及主要特点是:

1. 对考试大纲要求掌握的知识点进行概括总结,通过举例讲解对基本概念、基本方法作系统复习。

2. 根据考试大纲的要求并参考近年自学考试的命题特点编写了大量的例题,将例题按照考试的题型(单项选择题、计算题、应用题、证明题)进行分类解析。本书各篇中共选编了七百余道例题,涉及的内容包括了考试大纲要求的全部知识点并尽量突出重点、难点内容。

3. 本书选编了五份模拟测试题,供考生检验自己的应试能力。

4. 本书编写过程中的指导思想是力求使广大考生在系统复习基础知识的同时尽可能的提高分析问题与解决问题的能力,从而达到提高应试水平的目的。

本书是作者在总结近二十年实际教学经验基础上精心完成的作品,希望本书能够为广大考生顺利通过高等数学(一)的自学考试提供帮助。但是,书中不免会有疏漏之处,谨请指教。

编者

2001 年 12 月于中央财经大学

目　　录

第一编　串讲指导

第二编　题型训练

第三编　模拟试题

第四编　最新真题

第一编　串讲指导

本篇内容是按照《高等数学(一)微积分自学考试大纲》的要求，并参考近几年的考题及本课程的知识系统与学习特点，按章对主要知识内容进行总结，其中对许多关键知识点都通过举例作了一定的分析与讲解。为了帮助考生更好的掌握分析问题与解决问题的方法，本篇各章中均特别配有一定数量的例题，例题选择的主要特点是既考虑到每章应掌握的基本概念与基本方法，也充分考虑到针对自学考试应复习到的重点与难点内容。总之，本篇内容的主要目的是，为了使广大考生在学习完《高等数学(一)微积分》之后，能够结合考试的要求及重点、难点内容进行知识系统的概括总结，以满足全面复习的需要。

第一章　函数及其图形

§1.1　集　合

[**集合的概念**]集合是指具有某种共同属性的若干对象的全体,其中构成集合的每一个对象称为该集合的元素。

设 A、B 是两个集合,如果集合 A 中的每一个元素又是集合 B 中的元素,则称集合 B 包含集合 A,或称集合 A 是集合 B 的子集,记作 $A \subseteq B$;如果集合 A 是集合 B 的子集,同时集合 B 又是集合 A 的子集,则称集合 A 与集合 B 相等,记作 $A = B$。

[**集合的运算**]设 A、B 是两个集合,集合 A 与集合 B 的所有元素合并后构成的集合称为集合 A 与集合 B 的并,记作 $A \cup B$,即 $A \cup B = \{x \mid x \in A$ 或 $x \in B\}$;既属于集合 A 又属于集合 B 的所有元素构成的集合称为集合 A 与集合 B 的交,记作 $A \cap B$,即 $A \cap B = \{x \mid x \in A$ 且 $x \in B\}$;如果集合 A 是集合 B 的子集,则所有属于 B 而不属于 A 的元素构成的集合称为集合 A 关于集合 B 的补集,记作 A_B^c,即 $A_B^c = \{x \mid x \in B$ 且 $\overline{\in} A\}$。

[**实数与区间**]全体实数构成的集合称为实数集,实数集与数轴上的点之间存在一一对应的关系,因此每一个实数都可以视为数轴上的一个点。可以用符号 $(-\infty, +\infty)$ 表示实数集。

数轴上满足 $a < x < b$ 的点的集合记作 (a,b) 称为开区间;数轴上满足 $a \leqslant x \leqslant b$ 的点的集合记作 $[a,b]$ 称为闭区间。

设 x_0 是数轴上的点,δ 是正实数,则开区间 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 称为点 x_0 的 δ 邻域。

【**例 1**】　设集合 A 与集合 B 满足 $A \cup B = B$,问:集合 A 与集合 B 的关系是什么?

【**解**】　由于 $A \cup B = B$,所以 A 中元素均为 B 的元素,因此 $A \subset B$,即 A 是 B 的子集。

【**例 2**】　设集合 $A = \{1,2,3\}$,集合 $B = \{4,5\}$,求集合 $A \cap B$。

【**解**】　由于集合 A 与集合 B 没有公共元素,因此 A 与 B 的交是空集,即 $A \cap B = \varnothing$。

【**例 3**】　设集合 A 为满足不等式 $1 < |x - 2| < 3$ 的实数,将集合 A 用区间形式表示。

【解】 由 $1 < |x-2|$ 得 $x-2 < -1$ 或 $x-2 > 1$ 即 $x < 1$ 或 $x > 3$；
由 $|x-2| < 3$ 得 $-3 < x-2 < 3$ 即 $-1 < x < 5$；
所以集合 A 为 $(-1,1) \cup (3,5)$。

§1.2 映　射

[映射的概念] 集合 A 到集合 B 的映射是指集合 A 与集合 B 之间的满足如下条件的一种对应关系：

1. 对于集合 A 的每一个元素，都能按照某种规则同集合 B 中的某个元素相对应；

2. 对于集合 A 的每一个元素，集合 B 中与它对应的元素只有一个。

从集合 A 到集合 B 的映射 f 记为 $f: A \to B$。

§1.3 函　数

[函数的定义] 实数集合 X 到实数集合 Y 的一个映射 $f: X \to Y$ 称为函数。

【注】 函数定义的实质内容是指在某个变化过程中有两个变量 x、y，其中 x 称为自变量，y 称为因变量或函数值；当自变量在某一范围内变化时，对于每一个 x 通过某种对应关系 f 可以唯一确定 y 的值与之对应，则称 y 是 x 的函数，记作 $y = f(x)$。此处自变量 x 的变化范围称为函数的定义域，记作 Df；由 x 确定 y 的对应关系称为函数关系；因变量的变化范围称为函数的值域，记作 Rf。

[复合函数] 设 $y = f(u)$ 和 $u = g(x)$ 是两个函数，如果 g 的值域 Rg 是 f 的定义域 Df 的子集，即 $Rg \subseteq Df$，则由映射

$$x \in Dg: x \xrightarrow{u = g(x)} u \xrightarrow{y = f(u)} y \in Rf$$

所确定的函数称为 $u = g(x)$ 与 $y = f(u)$ 的复合函数，记作 $y = f[g(x)]$。

【注】 复合函数的概念可以由两个函数作复合推广到有限多个函数作复合，例如，

$y = f(u) = \sin u$ 与 $u = g(x) = x^2 + x + 1$ 的复合函数为 $y = \sin(x^2 + x + 1)$；

$y = f(u) = \mathrm{arctg} u$，$u = 1 + v^2$，$v = \ln x$ 的复合函数为 $y = \mathrm{arctg}(1 + \ln^2 x)$。

[反函数] 设 $y = f(x)$ 是给定函数，如果对其值域 Rf 中的任一值 y 都可以通过函数关系 f 在其定义域 Df 中确定唯一的 x 与之对应，则得到一个以 Rf 为定义域的新的函数，称此函数为 $y = f(x)$ 反函数，记作 $x = f^{-1}(y)$。

【注】 (1) 习惯上将函数 $y=f(x)$ 的反函数记作 $y=f^{-1}(x)$,其定义域 $Df^{-1}=Rf$,值域 $Rf^{-1}=Df$。

(2) 函数 $y=f(x)$ 与反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图象在同一坐标系上关于直线 $y=x$ 对称。

(3) 一般情况一个函数 $y=f(x)$ 不一定有反函数。例如 $y=f(x)=x^2$, $Df=(-\infty,+\infty)$, $Rf=[0,+\infty)$,当取 $y=1$ 时,有 $x=\pm1$ 在 $y=x^2$ 下与之对应。然而,当 $y=f(x)$ 在定义域上是严格单调函数时,$y=f(x)$ 的反函数一定存在,例如,$y=\lg x$ 在定义域$Df=(0,+\infty)$上是严格单调函数,其反函数为 $y=10^x$。有时一个函数虽没有反函数,但为了讨论问题的需要可以将其定义范围缩小后定义其反函数。例如,正弦函数 $y=\sin x$ 在定义域$Df=(-\infty,+\infty)$上没有反函数,然而在其主值区间$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$上有反函数称为反正弦函数,记作 $y=\arcsin x$。

[基本初等函数]

(1) 幂函数 $y=x^\alpha$(α 为实数),常见幂函数的图象如图 1—1 所示。

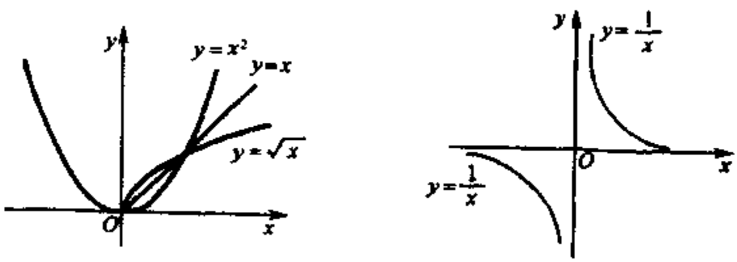


图 1—1

(2) 指数函数 $y=a^x(a>0,a\neq1)$,如图 1—2 所示,指数函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$,值域为$(0,+\infty)$;图象经过$(0,1)$点;当 $a>1$ 时,$y=a^x$ 为单调增函数,当 $0<a<1$ 时,$y=a^x$ 为单调减函数。

(3) 对数函数 $y=\log_a x(a>0,a\neq1)$,如图 1—3 所示,指数函数的定义域为$(0,+\infty)$,值域为$(-\infty,+\infty)$;图象经过$(1,0)$点;当 $a>1$ 时,$y=log_a x$ 是单调增函数,当 $0<a<1$ 时,$y=log_a x$ 是单调减函数。

(4) 三角函数

正弦函数 $y=\sin x$,定义域为$(-\infty,+\infty)$,值域为$[-1,1]$,是周期2π 的周期函数,图象如图 1—4 所示。

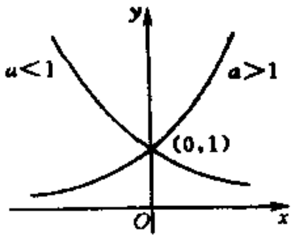


图 1—2

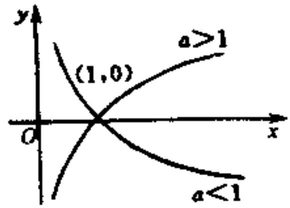


图 1—3

余弦函数 $y=\cos x$,定义域为$(-\infty,+\infty)$,值域为$[-1,1]$,是周期2π的周期函数,图象如图 1—5 所示。

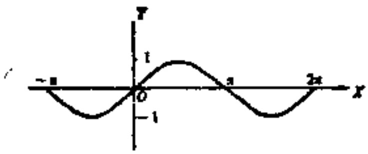


图 1—4

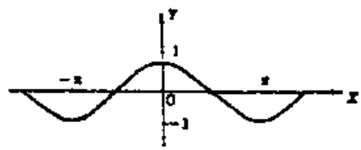


图 1—5

正切函数 $y=\operatorname{tg}x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$,定义域为 $x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k=0,\pm1,\pm2,\cdots\cdots)$的全体实数,值域为$(-\infty,+\infty)$,是周期 π 的周期函数,图象如图 1—6 所示。

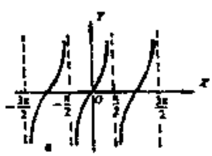


图 1—6

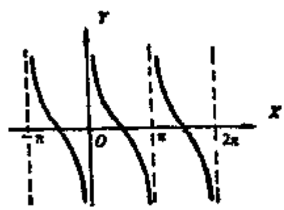


图 1—7

余切函数 $y=\operatorname{ctg}x=\dfrac{\cos x}{\sin x}$,定义域为 $x\neq k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots\cdots)$的全体实数,值域为$(-\infty,+\infty)$,是周期 π 的周期函数,图象如图 1—7 所示。

正割函数 $y=\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$

余割函数 $y=\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$

(5) 反三角函数

反正弦函数 $y=\arcsin x$ 是正弦函数 $y=\sin x$ 在主值区间 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 上的反函数,其定义域为 $[-1,1]$,值域为 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$,图象如图 1—8 所示。

反余弦函数 $y=\arccos x$ 是余弦函数 $y=\cos x$ 在主值区间 $[0,\pi]$ 上的反函数,其定义域为 $[-1,1]$,值域为 $[0,\pi]$,图象如图 1—9 所示。

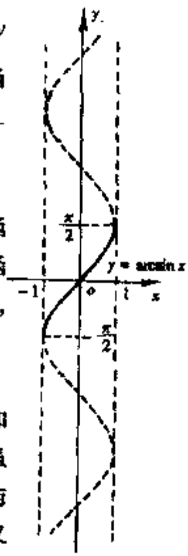


图 1—8

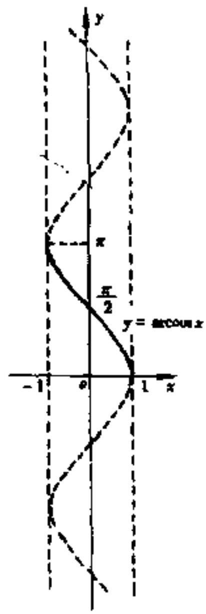


图 1—9

反正切函数 $y=\mathrm{arc\,tg}x$ 是正切数 $y=\mathrm{tg}x$ 在主值区间 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 上的反函数,其定义域为 $(-\infty,+\infty)$,值域为 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$,图象如图 1—10 所示。

反余切函数 $y=\mathrm{arcctg}x$ 是余切函数 $y=\mathrm{ctg}x$ 在主值区间 $(0,\pi)$ 上的反函数,其定义域为 $(-\infty,+\infty)$,值域为 $(0,\pi)$,图象如图 1—11 所示。

复习本节内容时应注意如下几点:

(1) 确定函数的两要素为定义域和函数关系,例如,$y=\sin x$ 和 $y=\sin t$,虽然自变量用不同的字母表示但定义域与函数关系均相同,因而是同一个函数。又例如,$y=x+1$ 和 $y=\frac{x^2-1}{x-1}=x+1(x\neq1)$,虽然函数关系相同但定义域不同,因而是不同的函数。

(2) 分段函数是指函数的定义域被分为若干部分,在不同的部分上是由不同的表达式确定函数关系,例如

$$y=f(x)=\begin{cases}x+1 & x<0\\ 0 & x=0\\ 1-x & x>0\end{cases}$$

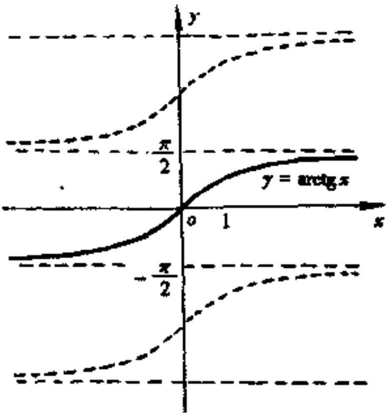
是分段函数。在微积分课程中经常需要讨论分段函数。

(3) 由基本初等函数经过有限次四则运算或经过有限次复合而得到的,用一个表达式表示的函数称为初等函数。例如,

$$y=\arcsin\sqrt{x}+\frac{1-x^2}{1+x^2}$$

$y = \log a(1 + e^{\mathrm{arctg}x})$

$y = \cos(x^2 + 1)\ln(1 + x + x^2)$



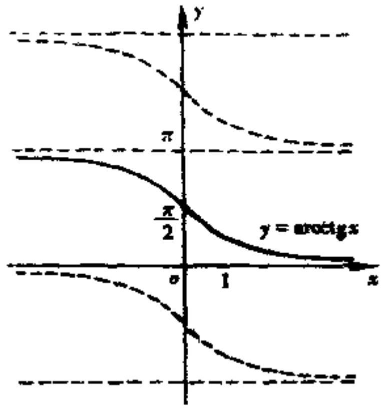


图 1—10　　　图 1—11

是初等函数。对于一个给定的初等函数求其定义域是本节的一个重要内容,求定义域的基本准则是找出使函数表达式有意义的自变量的范围就是其定义域。但是在具体问题中要充分利用基本初等函数定义域的有关结论。例如,$y = \arcsin\frac{3x-1}{5}$,由于反正弦函数的定义域为$[-1,1]$,故$-1 \leqslant \frac{3x-1}{5} \leqslant 1$,因而$-\frac{4}{3} \leqslant x \leqslant 2$,即定义域为$[-\frac{4}{3},2]$。又例如,$y = \lg\frac{x}{x-2}$,由于对数函数的定义域为$(0,+\infty)$,因此$\frac{x}{x-2} > 0$,又一个分式的分母不能等于 0,因而 $x > 0$ 且 $x - 2 > 0$,或者 $x < 0$ 且 $x - 2 < 0$,所以定义域为$(-\infty,0) \cup (2,+\infty)$。

【例 1】 设 $y = f(x)$ 的定义域是$[0,1]$,求(1) $y = f(x^2)$ (2) $y = f(x + \frac{1}{4}) + f(x - \frac{1}{4})$ 的定义域。

【解】 (1)$0 \leqslant x^2 \leqslant 1$,因此$-1 \leqslant x \leqslant 1$,所以 $y = f(x^2)$ 的定义域为$[-1,1]$。(2) $0 \leqslant x + \frac{1}{4} \leqslant 1$ 且 $0 \leqslant x - \frac{1}{4} \leqslant 1$,因此$-\frac{1}{4} \leqslant x \leqslant \frac{3}{4}$ 且 $\frac{1}{4} \leqslant x \leqslant \frac{5}{4}$,所以 $y = f(x + \frac{1}{4}) + f(x - \frac{1}{4})$ 的定义域为$[\frac{1}{4},\frac{3}{4}]$。

【例 2】 求函数 $y = \sqrt{3-x} + \arccos\frac{x-2}{3}$ 的定义域。

【解】 $3 - x \geqslant 0$ 且 $-1 \leqslant \frac{x-2}{3} \leqslant 1$,因此

$x \leqslant 3$ 且 $-1 \leqslant x \leqslant 5$,

所以定义域为$[-1,3]$。

【例 3】 设 $f(\sin x) = 3 - \cos 2x$,则 $f(\cos x) =$ ________

A.$3 - \sin 2x$　　B.$3 + \sin 2x$　　C.$3 - \cos 2x$　　D.$3 + \cos 2x$

【解】 应选 D.

因为 $f(\sin x) = 3 - \cos 2x = 3 - (1 - 2\sin^2 x) = 2 + 2\sin^2 x$ 得$f(x) = 2 + 2x^2$,因而

$$f(\cos x) = 2 + 2\cos^2 x = 3 + (2\cos^2 x - 1) = 3 + \cos 2x.$$

【例 4】 下列 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是相同函数的为________

A.$f(x) = x, g(x) = (\sqrt{x})^2$

B.$f(x) = \sqrt{x^2}, g(x) = |x|$

C.$f(x) = \lg x^2, g(x) = 2\lg x$

D.$f(x) = \lg\sqrt{x}, g(x) = \frac{1}{2}\lg|x|$

【解】 应选 B.

因为 A 中$f(x)$的定义域为$(-\infty, +\infty)$,$g(x)$的定义域为$[0, +\infty)$,是不同函数。

C 中$f(x)$的定义域为$(-\infty,0) \cup (0, +\infty)$,$g(x)$ 的定义域为$(0, +\infty)$,是不同函数。

D 中$f(x)$的定义域为$(0, +\infty)$,$g(x)$的定义域为$(-\infty,0) \cup (0, +\infty)$,是不同函数。

B 中$f(x)$与 $g(x)$ 的定义域和函数关系均相同,是同一个函数。

【例 5】 设 $f(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leqslant 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$,求函数 $f[f(x)]$。

【解】 当 $|x| \leqslant 1$ 时,$f(x) = 1$,因此 $f[f(x)] = f(1) = 1$;

当 $|x| > 1$ 时,$f(x) = 0$,因此 $f[f(x)] = f(0) = 1$;

所以 $f[f(x)] = 1$。

【例 6】 设 $f(x) = \ln x + 1, g(x) = \sqrt{x} + 1$,则 $f[g(x)] =$ ________

A.$\ln\sqrt{x} + 1$　　B.$\ln\sqrt{x} + 2$

C.$\ln(\sqrt{x} + 1) + 1$　　D.$\sqrt{\ln(x + 1)} + 1$

【解】 应选 C.

因为 $y = f(u) = \ln u + 1, u = g(x) = \sqrt{x} + 1$,所以 $y = f[g(x)] = \ln(\sqrt{x} + 1) + 1$。

【例 7】 设 $f(x) = \lg(x + \sqrt{1 + x^2})$,验证 $f(x)$ 是奇函数。

【解】 $f(-x)=\lg(-x+\sqrt{1+(-x)^2})$

$$=\lg(\sqrt{1+x^2}-x)$$

$$=\lg[\frac{(\sqrt{1+x^2}-x)(\sqrt{1+x^2}+x)}{\sqrt{1+x^2}+x}]$$

$$=\lg[\frac{(1+x^2)-x^2}{x+\sqrt{1+x^2}}]$$

$$=\lg[(x+\sqrt{1+x^2})^{-1}]$$

$$=-\lg(x+\sqrt{1+x^2})=-f(x)$$

因此 $f(x)$ 为奇函数。

【例 8】 设 $f(\frac{1}{x}-1)=\frac{x}{2x-1}$,求 $f(x),f(x+1)$。

【解】 $f(\frac{1}{x}-1)=\frac{x}{2x-1}=\frac{1}{2-\frac{1}{x}}=\frac{1}{1+1-\frac{1}{x}}=\frac{1}{1-(\frac{1}{x}-1)}$, 令 $\frac{1}{x}-1=t$, 则有 $f(t)=\frac{1}{1-t}$

所以 $f(x)=\frac{1}{1-x}$,$f(x+1)=\frac{1}{1-(x+1)}=-\frac{1}{x}$ 。

【另解】 令$\frac{1}{x}-1=t$,则 $x=\frac{1}{t+1}(t\neq-1)$

因此

$$f(t)=f(\frac{1}{x}-1)=\frac{x}{2x-1}\Bigg|_{x=\frac{1}{t+1}}$$

$$=\frac{\frac{1}{t+1}}{2\cdot\frac{1}{t+1}-1}=\frac{1}{1-t}$$

所以 $f(x)=\frac{1}{1-x}$,$f(x+1)=\frac{1}{1-(x+1)}=-\frac{1}{x}$ 。

【例 9】 函数 $y=\frac{x-1}{x+1}$ 的反函数是______

A. $y=\frac{x-1}{x+1}$　　　　B. $y=\frac{1-x}{1+x}$

C. $y=\frac{x+1}{x-1}$　　　　D. $y=\frac{1+x}{1-x}$

【解】 应选 D.

因为由 $y=\frac{x-1}{x+1}$ $(x\neq-1)$ 得

$(x+1)y=x-1$　即 $xy+y=x-1$

得　$xy - x = -y - 1$　即 $x(y-1) = -(1+y)$

所以 $x = -\dfrac{1+y}{y-1} = \dfrac{1+y}{1-y}$

将上式中 x 换成 y，y 换成 x 得到反函数

$$y = \frac{1+x}{1-x}$$

【例 10】　求函数 $y = f(x) = 2^{x-1}$ 的反函数 $y = f^{-1}(x)$.

【解】　$y = 2^{x-1}$，因此 $\log_2 y = \log_2 2^{x-1} = x - 1$

即 $x = 1 + \log_2 y$，所以反函数为 $y = 1 + \log_2 x$.