

编号 96

航空科学技术文献译丛

机翼及机身的 跨音速空气动力学



1960年9月

北京

目 录

摘要.....	(1)
引言.....	(1)
跨音速气流理論的基本方程式.....	(2)
跨音速气流理論方程式的某些基本性质.....	(3)
馬赫数在 $M_\infty=1$ 时的冻结.....	(4)
相似定律.....	(5)
跨音速相当定律.....	(7)
跨音速面积定律.....	(8)
速端图方法.....	(9)
逐次近似法.....	(11)
积分方程式方法, $M_\infty < 1$	(12)
局部綫化方法.....	(14)
馬赫数为 1 时的風洞壁干扰.....	(21)
結論.....	(25)
参考文献.....	(25)

机翼及机身的跨音速空气动力学

J.R. 斯激端透

NASA 艾姆斯研究中心

摘 要

本文总结了由无数实验及理论研究所得出的有关流经薄翼及细长物体的气流方面的基本概念及主要结果。全文的重点放在小扰动跨音速气流理论中各种非线性方程式近似解法的相互关系及计算上，同时也放在实验结果的分析上。

引 言

虽然确定跨音速时机翼和机身空气动力性能的方法想像起来并不比亚音速或超音速情况更难，但对实验及理论工作者说来，获得跨音速气流的解答还是很困难的。例如，有许多气流的实验数据在接近于马赫数 1 时便中断，许多理论结果甚至在最普遍的场合下也不符合于实验观察。这说明了求解跨音速气流的困难。

大约在十年前由于两方面的發展：洞壁部分开口的跨音速风洞及跨音速气流的小扰动理论，上述困难情况开始得到改善。但当需要高度精确地求解各种类型的物体时，仍旧会遇到困难。风洞虽可随着物体的形状而变，然而最近的发展指出，风洞壁的干扰效应要比所假设的大得多，并且很难用试验较小模型的方法来消除。另一方面，跨音速气流理论看来虽能给出很圆满的解答，但其应用范围却受到限制，因为该理论要求解出混合椭圆型及双曲线型的非线性偏微分方程式，而这方面的数学理论目前还处于原始状态。由于这第二个困难，这个理论的大多数解答直到最近才用速端图法(Hodograph Method)求出，并只限于楔形及平板翼型的二元气流。

然而，最近发现了求解跨音速气流理论非线性方程式近似值的新方法，它们可以为许多平的或曲线边界的二元及三元物体计算理论值。这些数值能很好地符合前述用速端图方法所得出的理论结果，同时也符合用小模型在跨音速风洞中所得出的实验结果。

在仔细地比较了理论与实验结果后，已经发现，风洞壁的干扰效应要比预计的大得多，特别是当马赫数接近于 1 时；同时也发现，在某些场合下为了得到可应用的数据，必须采用非常小的模型。虽然干扰效应的全面情况还有待于进一步了解，但是基于跨音速气流理论的初步分析还是提供了这种干扰效应的主要特性。这些研究的一个有趣的结论是：老式的实心壁亚音速风洞可以可靠地用来获得自由流马赫数为 1 的气流的数据。

本文的目的是扼要地叙述跨音速气流理论的基本概念，并讨论一些较有用的特殊结果。在多数场合下，这些结果都与用实验或更精确的理论所得出的相应结果作了比较。

* 机身是指长度大于宽度及高度的各种物体，在航空上它可以是机身、弹身、外挂油箱等——譯者。

跨音速气流理论的基本方程式

奥斯华铁许(Oswatish)和威哈脱(Wieghardt)、布塞曼(Busemann)和古得来(Guderley)、冯·卡门(von Kármán)以及其他(见参考文献1—6)所提出的跨音速气流的小扰动理论,原来是作为一种当自由流马赫数非常接近于1时的气流的一级近似方法的。它已发展为亚音速、跨音速以及超音速气流的联合理论,并且到目前为止,它是在整个速度范围内,能对薄翼及细长物体给出可靠结果的最简单理论。这一理论的基本方程式曾被写成许多稍有区别的形式[7, 8]。其中具有特殊价值的一种形式列在下面。

令自由流的速度及马赫数分别为 U_∞ 及 M_∞ , 引入笛卡尔坐标系,使其 x 轴与自由流方向平行,并以 u, v 及 w 分别表示平行于 x, y 及 z 轴的扰动速度分量。扰动速度分量是能满足下列非线性偏微分方程式的扰动位 φ 的梯度:

$$(1-M_\infty^2)\varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz} = M_\infty^2[(\gamma+1)/U_\infty]\varphi_x\varphi_{xx} = k\varphi_x\varphi_{xx} \quad (1)$$

可以看出,此式与浦朗陀—葛劳涅(Prandtl-Glauert)的线性压缩性气流方程式的差别,只是在右边多了一个非线性项。

因为激波是跨音速及超音速气流的固有特点,所以对于穿过激波的变化,还须加上附加的关系。这些关系是: φ 连续地穿越激波,而 u, v 及 w 却是不连续的,紧接激波前后的 u, v 及 w 之间的关系应能满足下列方程式:

$$(1-M_\infty^2)(u_a - u_b)^2 + (v_a - v_b)^2 + (w_a - w_b)^2 = M_\infty^2[(\gamma+1)/U_\infty][(u_a + u_b)/2](u_a - u_b)^2 \quad (2)$$

对应的线性理论公式只是略去了右边项。

边界条件要求在物体的远前方 φ 的梯度为零,并且气流与物体表面相切。在跨音速气流理论中,上述后面的条件按线性理论中相同的方法简化。例如,对于坐标为 $Z(x, y)$ 的薄翼,简化关系为

$$(w)_{z=0} = U_\infty(\partial Z / \partial x) \quad (3a)$$

对于流经轴向截面分布为 $S(x)$ 的细长回转体的轴对称气流,简化关系为

$$(r\varphi_r)_{r=0} = (U_\infty/2\pi)(dS/dx) \quad (3b)$$

其中

$$r = (y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}.$$

联系压力系数 C_p 与速度的关系式也像在线性理论中那样地取近似形式。所以在研究绕薄翼的气流时,相当的压力表示式为

$$C_p = -2(\varphi_x/U_\infty) \quad (4a)$$

而在研究绕细长物体的轴对称气流时,压力表示式为

$$C_p = -2(\varphi_x/U_\infty) - (\varphi_z^2/U_\infty^2) \quad (4b)$$

还必须假定,当垂直于尖锐后缘的速度分量是亚音速时,必然可以应用库塔条件(Kutta Condition)*;此外,在超音速区域内,扰动的直接影响只限于下游方向。

有许多跨音速气流方面的研究是基于将系数 $M_\infty^2(\gamma+1)$ 换成 $\gamma+1$ 的方程式的。这里并不推荐这个方程式,因为当马赫数不等于1时,就会出现很大的误差(参看参考文献7及8)。但是将

* 即后缘上的速度方向是切向的——译者。

各种 k 值所推出的結果轉化到与跨音速气流理論相一致的結果，还是很容易的。在后面的討論中，除非加以特別的声明，在必要时这种轉化都已应用于所有理論結果。

跨音速气流理論方程式的某些基本性質

在研究了基本方程式的一些基本性質后，就可进一步了解跨音速小扰动理論中所采用的近似簡化的實質。方程式 (1) 的最基本性質，就是方程式类型取决于 $1 - M_\infty^2 - ku$ 的符号：

$$1 - M_\infty^2 - ku \begin{cases} > 0, \text{ 橢圓型 (亞音速)} \\ < 0, \text{ 双曲綫型 (超音速)} \end{cases} \quad (5)$$

在压縮性气流的理論研究中，方程式的类型是很重要的，因为当速度是亞音速时，方程式应屬橢圓型，当速度是超音速时，則方程式应屬双曲綫型。

方程式 (1) 的第二个性質是：在流場中，特性面或馬赫錐的方向随不同的点而变化，但該面始終与 x 軸交成 μ 角。 μ 角由下列关系式决定：

$$\cot \mu = \sqrt{M_\infty^2 - 1 + ku} \quad (6)$$

在 $M_\infty^2 - 1 + ku$ 大于零的区域内，特性面是实数的；但在 $M_\infty^2 - 1 + ku$ 小于零的区域内，特性面則是虛数的。

跨音速气流理論方程式的第三个基本性質是：該方程式指出，在 $1 - M_\infty^2 - ku$ 等于零的点上，任意无穷小的流管都呈現喉管。这个結果祇要在一元气流的假設下积分方程式 (1) 就可証明。这时得到

$$(1 - M_\infty^2 - ku)(du/U_\infty) = -(dA/A) \quad (7)$$

其中 A 表示流管的横截面积。

在認清量 $1 - M_\infty^2 - ku$ 在一般近似上相当于 $1 - M^2$ (其中 M 为局部馬赫数) 后，上述三項性質的意义就很清楚。这也說明了为什么在跨音速气流的分析中經常出現量 $1 - M_\infty^2 - ku$ ，以及为什么它在小扰动理論中起着与更精确的压縮性气流理論中的 $1 - M^2$ 相同的作用。

上述跨音速气流理論非綫性方程式的性質，正好与压縮性气流綫化方程式的对应性質相反。綫化理論的結果可用零代入 (5)、(6) 及 (7) 式中的 ku 而立即得出。这样所得出的关系式清楚地显示了綫化理論的著名特点——即气流的类型取决于自由流馬赫数，而不取决于局部馬赫数；在整个流場內，特性面与 x 軸的交角是相等的；方程式中并未包含指示在无穷小流管中可能存在音速喉管的項。

由 (5) 式可以知道，出現局部音速的 u 的临界值 (以及因此而产生的微分方程类型的变化) 可采取使 $1 - M_\infty^2 - ku$ 等于零的方法来确定。联合所得出的表示式与方程式 (3a)，得出临界压力系数与自由流馬赫数之間的簡單关系

$$C_{p_{cr}} = -2[(1 - M_\infty^2)/M_\infty^2(\gamma + 1)] \quad (8)$$

重要的是，跨音速气流理論提供临界压力系数随馬赫数变化的良好近似式。圖 1 中的曲綫显示，

(8) 式所給出的結果确实是很好的近似值。圖中的实綫表示 (8) 式所給出的近似結果，虛綫表示等熵气流精确关系式所給出的对应結果。

方程式 (2) 所給出的激波关系的近似度如圖 2 所示。圖中表示了著名的激波極綫，把激波后的横向速度分量 v_b 画成纵向速度分量 u_b 的函数。在这一特定例子中，激波前的气流被認為是均匀的，并与 x 軸平行，其馬赫数为 1.2。实綫表示用 (2) 式計算而得的近似激波極綫，虛綫表示

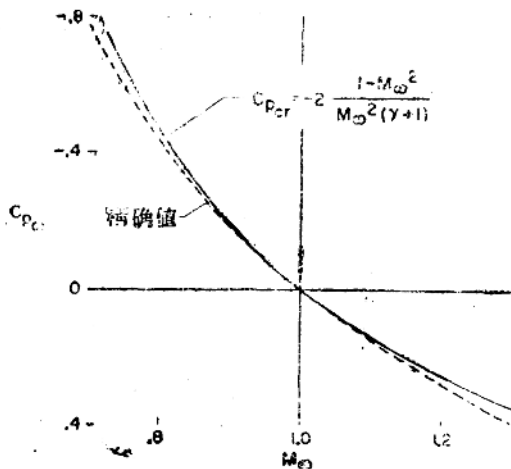


圖1 临界压力系数随马赫数的变化

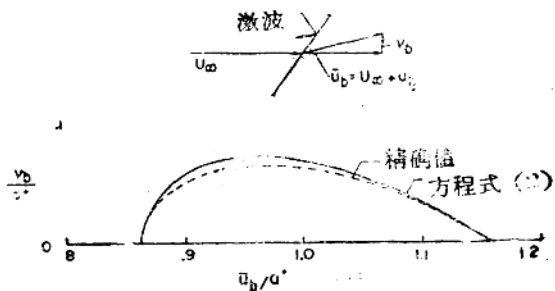


圖2 $M_{\infty}=1.2$ 的激波極線圖

对应的精确结果。可以看到，跨音速（流理论方程式的近似结果在激波右端（对应于弱激波）提供了正确的切线，同时在左端（对应于正激波）提供了正确的速度突变。这个结果不同于用压缩性气流线性化理论方程式所得出的近似值，在线性理论中，近似激波曲线是一条与极线弱激波端相切的直线。

马赫数在 $M_{\infty}=1$ 时的冻结

跨音速气流最吸引人的特性之一，乃是当自由流马赫数接近1时，翼型上的局部马赫数分布就与自由流马赫数无关（参考文献9，第274页以后；参考文献10，第293页以后）。这种现象表示在图3（a）中，图上画出了在几种自由流马赫数下，来流曼（Liepmann）及勃利生（Bryson）[11, 12]在单楔形表面上所测得的一系列局部马赫数分布。可以看出，当自由流马赫数自0.85变到1.24时，局部马赫数基本上保持不变，或所谓冻结了。

在图3（b）上给出了根据不琪（Page）数据[13]所得出的流经细长圆锥—圆柱体的轴对称（流

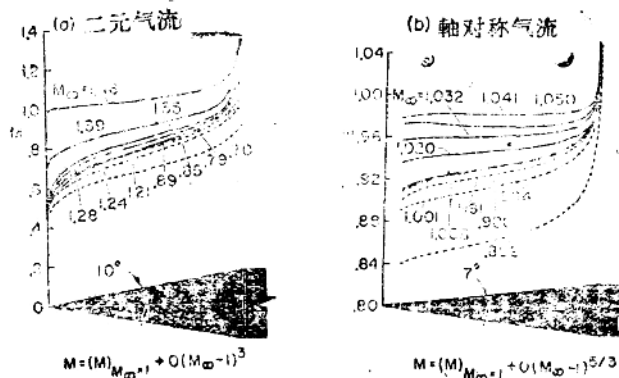


圖3 馬赫数的冻结, $(dM/dM_{\infty})_{M_{\infty}=1} = 0$

的相应結果。由此看出，局部馬赫数分布冻结时的自由流馬赫数范围是很小的，大約祇由0.99到1.01。必須注意到不琪还曾証明，这种冻结效应可能完全为風洞壁的干扰所遮蔽，除非模型的尺寸远較試驗段的尺寸为小。在圖3(b)所示的特殊場合中，圓錐的長度为13.9厘米，而試驗段方形截面的每边長4.2米。如将这一圓錐置于每边長0.6米的正方形截面的試驗段中，則風洞壁的干扰效应将使馬赫数冻结現象消失不見。

在二元气流及軸对称气流之間，局部馬赫数冻结时的馬赫数范围的差别，至少在質的方面是与古得来所得出的理論結果[10]相符的。古得來的理論指出，对于二元气流， M 值与 $M_\infty = 1$ 之間的差别（展开为級数）的主要項与 $(M_\infty - 1)^3$ 成正比，但对軸对称气流，主要項与 $(M_\infty - 1)^{5/3}$ 成正比。

相 似 定 律

在跨音速气流理論方程式的分析中，首要的結果是相似定律。我們可以通过相似定律将二元气流中具有相似几何形状的翼型族的空气动力性能联系起来。馮·卡門在参考文献[6]中比較詳細地描述了这个結果，并且它被很快地推广到三元气流方面。在参考文献[7]、[14]、[15]及[16]中给出了相似迴轉体族及有限翼展机翼族的相似定律。这些定律的意义，在于它們提供了一些适当的无因次量，从而减少了用以表示关联气流族解的独立变数。

有限翼展机翼

圖4中的数据表明，如何利用相似律来組織实验数据，以便使决定有限翼展机翼族的空气动力性能的試驗工作量大为减少。在零攻角下，一族相似无弯度机翼的阻力及升力曲綫斜率的相似律为：

$$\bar{C}_D = \mathcal{D}(\xi_\infty, \bar{A}), \quad \bar{C}_{L\alpha} = \mathcal{L}(\xi_\infty, \bar{A}) \quad (9)$$

其中：

$$\begin{aligned} \bar{C}_D &= \{ [M_\infty^2(\gamma+1)]^{1/3} / \tau^{5/3} \} C_D \\ \xi_\infty &= (M_\infty^2 - 1) / [M_\infty^2(\gamma+1)\tau]^{2/3} \\ \bar{A} &= [M_\infty^2(\gamma+1)\tau]^{1/3} A \\ \bar{C}_{L\alpha} &= [M_\infty^2(\gamma+1)\tau]^{1/3} C_{L\alpha} \end{aligned}$$

上式說明，祇需要两个参数 ξ_∞ 及 $\bar{A}$ 就足以表示結果了；这种結果本来是須要四个参数来表示的，即展弦比 A 、相对厚度 τ 、馬赫数 M_∞ 以及可能的比热比值 γ （假如試驗是在几种气体中进行的）。在自由流馬赫数等于1的情况下，因为参数 ξ_∞ 等于零，結果祇依赖于一个参数，所以問題就大为简化。参考文献[17]中的一族机翼实验数据証实了这个結論（見圖4），这族机翼的平面形状是長方形的，其翼型为对称的NACA63AOXX。

令人感到兴趣的是，这两条曲綫的基本形状相似，都显示出两种趋向：一种对应于

小展弦比，另一种对应于大展弦比。对于小展弦比机翼，此曲綫接近于穿过原点的直綫；对于大

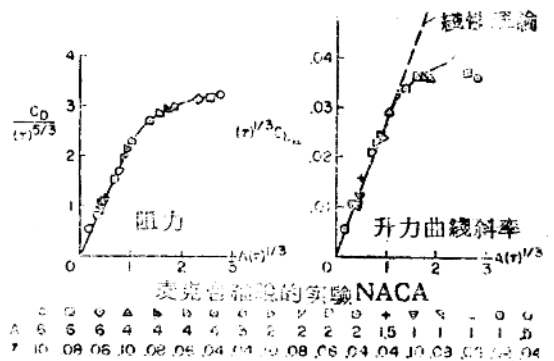


圖4 長方形机翼的相似律，NACA63AOXX 翼型， $\alpha=0, M_\infty=1$

展弦比机翼，则接近于水平线。后一性质说明，展弦比已不成为一参数了，而升力及阻力系数都趋近于其二元值。对于 $At^{1/3}$ 小于 1 的机翼，升力的实验值实际上相同于用线性理论所得出的数值，即升力曲线斜率 $C_{L\alpha}$ 等于 $\pi/2$ 乘以展弦比。但是对于阻力，线性理论并不能给出良好的近似，因为对于所有有限厚度机翼，它都给出无穷大值。应当注意这样的事实：假定全部机翼都具有相同的弦长，并位于具有相同动压力的气流中，则此结果说明，这族机翼中的小展弦比机翼的阻力与其前视面积的平方成正比。

在参考文献 [17] 中还列出了类似于图 4 所示的一些其他数据（同一族机翼的），同时也列出了长方形平面形状的弯度机翼族的数据。三角形平面形状机翼的类似结果见参考文献 [18]。

迴轉体

对于绕细长尖头迴轉体的轴对称气流，相似律说明相似物族的表面压力可用下式表示或联系起来：

$$C_p + (1/\pi) S''(x) \ln[\tau^2 M_\infty (\gamma + 1)^{1/2}] = \tau^2 \mathcal{P}[\xi_\infty, (x/l)] \quad (10)$$

其中

$$\xi_\infty = (M_\infty^2 - 1)/M_\infty^2 (\gamma + 1) \tau^2$$

图 5 表示在自由流马赫数 1 下，将相似律应用于二个抛物线迴轉体的表面压力分布时的情况。图中的实线及数据点表示得劳琪 (Drougge) 对相对厚度为 $1/6$ 及 $\sqrt{2}/12$ 的物体所作出的实验结果。虚线表示相对厚度 $1/6$ 的物体的实验数据，以及利用 (10) 式计算而得的相对厚度为 $\sqrt{2}/12$ 的物体的结果。可以看出，用相似律所得出的结果几乎与测量结果完全一致。

将 (10) 式直接积分，可得阻力的相似律：

$$(D/ql^2) + \{[S'(l)]^2/2\pi l^2\} \ln[\tau^2 M_\infty (\gamma + 1)^{1/2}] = \tau^4 \mathcal{R}(\xi_\infty) \quad (11)$$

其中 l 表示物体的长度， $S'(l)$ 表示横截面积在物体尾部的轴向分布。假如物体的尾部是圆柱形的或是尖头的，则因 $S'(l)$ 等于零，所以这个关系就变得非常简单了。由此得出，对于这种几何相似并有相同长度的物体族，其自由流马赫数为 1 时的阻力与前视面积的平方成正比，这正与图 4 的几何相似小展弦比机翼族的情况一样。

在参考文献 [19] 及 [20] 中给出了类似于图 5 所示，但马赫数不等于 1 的其他物体的比较曲线。这些结果证明，轴对称气流的相似律适用于在 1 附近的马赫数，以及很

大或很小的马赫数，也即纯超音速或纯亚音速气流。但是参考文献 [20] 指出，在跨音速范围的边界附近，应用相似律会出现根本的差错。(10) 式所给出的 ξ_∞ 决定着相联气流的马赫数及物体相对厚度。由此清楚地看出，在某些场合下跨音速气流被联系到亚音速气流或超音速气流上去；根据这些气流间的本质差别，特别是考虑到激波系及其阻力时，这些简单关系的相似律所给出的结果当然是没有物理意义的。这种困难的来源，估计是在推导轴对称气流的相似律时没有对超音速气流区的依赖条件及影响条件给以足够的注意。

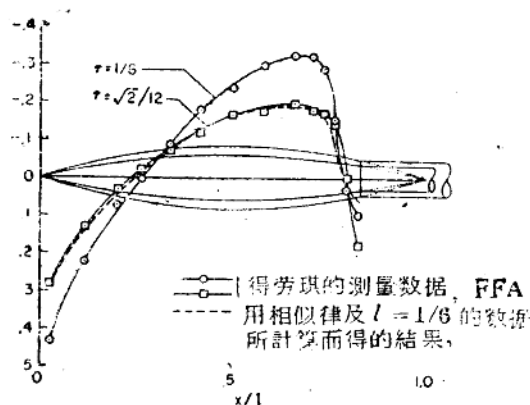


图 5 抛物线迴轉体的相似定律， $\alpha=0, M_\infty=1$

跨音速相当定律

奥斯华铁许所提出的跨音速相当定律 (Equivalence Rule) (其摘要见参考文献 21 及 22), 将绕任意截面细长物体的气流与绕具有同样纵向横截面积分布 $S(x)$ 的“相当”非升力迴轉体的气流联系起来。这条定律紧密地关系到跨音速细长物体理论的一个最简单结果——即在细长物体附近, φ 的表示式近似地具有这样的形式:

$$\varphi = \varphi_2(x; y, z) + g(x) \quad (12)$$

其中 φ_2 是 yz 平面中每个 x 点在既定边界条件时拉普拉斯方程式

$$\varphi_{yy} + \varphi_{zz} = 0 \quad (13)$$

的解; $g(x)$ 是取决于 M_∞ 及 $S(x)$ 的附加项。于是就可以由比较简单的相当物体轴对称气流的解答来决定 $g(x)$ 。相当定律的数学形式为:

$$\varphi_W = \varphi_{2W} - \varphi_{2B} + \varphi_B \quad (14)$$

我们可以首先对任意截面物体 (脚注 W) 写出 (12) 式, 然后对相当物体 (脚注 B) 写出 (12) 式, 再把它們相减而得到上式。

对于脚注 W 对应于展弦比为 A , 弦长为 c , 相对厚度为 τ 的薄翼的情况, (14) 式的误差级见参考文献 [22]。其中证明, (14) 式中量 $\varphi_W/U_\infty c$ 的大小属于 $O(A\tau \ln A)$ 的级*, 而在 $M_\infty=1$ 时所略去的量的级为 $O(A^4 \tau^2 \ln A)$ 。因为在线性理论中, 推导同样结果而略去的量的级为 $O(A^3 \tau \ln A)$, 所以在 $M_\infty=1$ 下, (14) 式可应用于展弦比远较在其他马赫数下为大的机翼。

现在来考虑将这一理论用于椭圆截面的薄锥体-柱体, 因为这种物体有实验数据。在参考文献 [22] 中证明, 由上述方法得出的该物体圆锥部分表面上的压力系数值 C_{pW} 与相当圆锥-圆柱体表面上的 C_{pB} 之间的关系为

$$C_{pW} = C_{pB} - (A\tau/8)[1 + \ln(A/8\tau)] \pm (\alpha A/2\sqrt{1-y^2/s^2}) \quad (15)$$

符号 A 及 τ 分别表示椭圆锥体的展弦比及相对厚度, 其平面形状为 $y = \pm s(x)$; α 表示攻角; 负号用来表示上表面, 正号用来表示下表面。

下面考虑将 (15) 式应用于 $A=2$, $\tau=0.06$ 的薄椭圆锥体-柱体。丕琪最近在参考文献 [13] 中列出了这种锥体-柱体上压力分布的实验结果, 另外也给出了相当迴轉体的实验结果。图 6 中的左图表示在几个关键点上, 非升力椭圆锥体-柱体与圆锥体-柱体间的压力系数差别, 以一条直线所表示的理论 $C_{pW} - C_{pB}$ 值 [公式 (15)]。左图表示在椭圆锥体-柱体的一系列点上, 气动力载荷 $\Delta p/q$ 或上下表面 C_{pW} 的差的理论数值与实验数值的比较。我们看到, 除了锥体底面附近的一小块区域外, 理论结果与实验结果的符合相当令人满意。

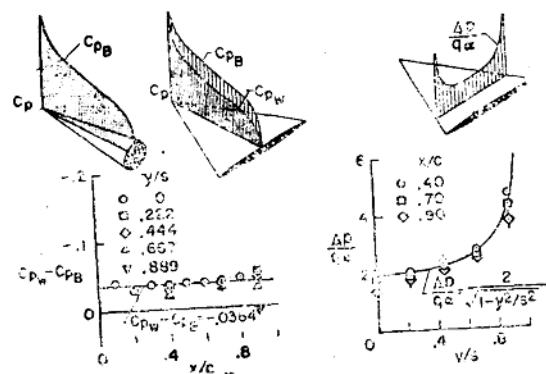


图 6 跨音速相当定律应用于薄椭圆锥体-柱体时的情况, $A=2$, $\tau=0.06$, $\alpha=0$, $M_\infty=1$

从上面的讨论中可以看出, 对于小展弦比机翼及细长物体, 空气动力载荷, 也即升力及其他横

* $O(A\tau \ln A)$ 中的“O”就是 Order (级) 的意思——译者。

向力以及力矩完全是因 q_2 而引起的。因此这些量不依赖于马赫数，并与亚音速或超音速气流的细长物体线化理论所得出的相同。这个结果证实了几年前的说法，即细长机翼*的线化理论能正确地给出小展弦比机翼在 $M_\infty=1$ 下的气动力载荷[23]、[24]。

跨音速面积定律

跨音速气流的最著名特性之一就是挥脱康勃(Whitcomb)在参考文献[25]中所提出的跨音速面积定律。该定律指出，在音速附近，小展弦比薄翼-机身组合的零升力阻力主要取决于垂直于主流的轴向横截面积分布。这条定律是在跨音速流场的某些基本特性上建立起来的，并由实验所证实。很显然，它紧密地联系着跨音速相当律，并且的确是在某些限制下由相当律推导出来的。在参考文献[22]中详细讨论了这两个定律间的关系，并且证明可由相当律导出用相当物体阻力来表示任意物体阻力的公式：

$$D_W = D_B - \frac{\rho_\infty}{2} \left(\int_{C_W} q_{2W} \frac{\partial q_{2W}}{\partial n} d\sigma_C - \int_{C_B} q_{2B} \frac{\partial q_{2B}}{\partial n} d\sigma_C \right) \quad (16)$$

这两个积分都是沿位于垂直于 x 轴的平面内的曲线 C 的线积分，曲线 C 包围了物体的底面，也包围了任何存在的涡迹。因此 $D_W - D_B$ 的差值与马赫数无关，并与线化细长机身理论所给出的相同。假如任意物体位于倾角 α 的位置上，则第一积分项所给出的阻力部分与 α^2 成正比。这个量正好是旋涡阻力。假如只限于非升力情况，则对于某几种形状，这两个积分的数值互相抵消，并且

$$D_W = D_B \quad (17)$$

其中的一种形状在尾部尖缩成一点，这时两个积分都等于零。另一种形状的底部是柱形的，这时 $\partial q_{2W}/\partial n = \partial q_{2B}/\partial n = 0$ 。此外还有一些物体在尾部具有相同的形状及表面斜率，这时两个积分都沿着相同的曲线 C 进行，在这曲线上 $q_{2W} = q_{2B}$ 以及 $\partial q_{2W}/\partial n = \partial q_{2B}/\partial n$ ，所以积分也互相抵消了。上述这些以及其他一些积分项抵消的情况组成了能应用跨音速面积律的一类物体形状。

挥脱康勃在参考文献[25]中用来引证跨音速面积律的某些数据列于图7中。从左图看出，在这一对物体上减去低速摩擦阻力后的阻力部分是非常接近于相等的。并不是所有的挥脱康勃结果（特别是蜂腰形相当物体的结果）都能像此图所示结果那样地符合面积律，但是误差中的一部分很可能是边界层效应的结果。

可是，挥脱康勃的主要目的并不在于研究面积律的精确性，而是找出能以低阻力穿过跨音速范围的机翼-机身组合形状。面积律提供了解决这个问题的途径，它指出低阻力的机翼-机身组合形状必须使相当物体具有低阻力迴转体的光滑外形。因此，在机翼附近，机身的横截面积应予减小。挥脱康勃的结果（其中的一例示于图7的右图中）证明，这种机翼-机身组合的阻力

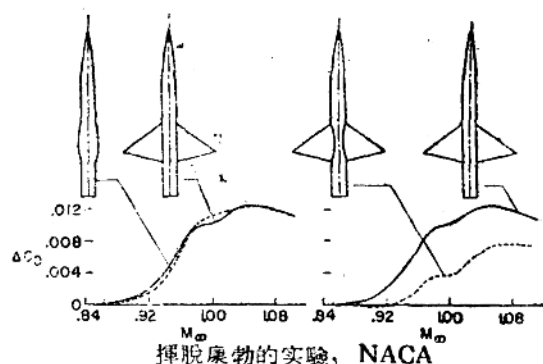


图7 跨音速面积律

*这里的细长机翼 (Slender Wing) 是指弦向尺寸与展向尺寸比较起来显得很大的机翼，其中“细长”两字的意义与细长物体中的相同——译者。

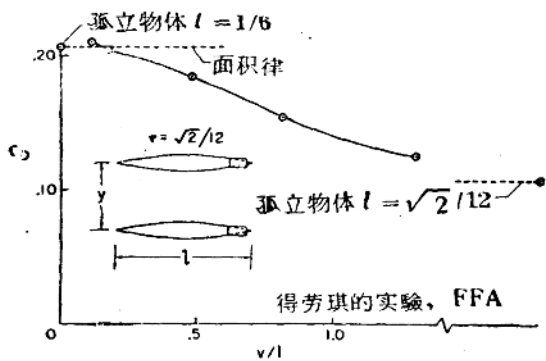


圖8 一对截尾抛物綫迴轉体的横向間隔对阻力的影响, $M_\infty = 1$

厚度为 $\sqrt{2}/12$ 的单个物体的值。

研究圖4所示長方形机翼族的阻力, 可以进一步了解面积律的应用范围。在可用一条通过原点的直綫来表示結果的 $Az^{1/3}$ 范围内, 各种長方形机翼的阻力值可按面积律联系起来。可以看到, 当 $Az^{1/3}$ 小于1时, 面积律适用于这族机翼中的任一个。在这一点上, 应当注意这族机翼的相当物体是鈍头而粗短的, 并不是尖头而細長的。由此看来, 相当迴轉体的阻力特性与关連机翼族的阻力特性大不相同, 虽然这族机翼中的一些小展弦比机翼的阻力特性可用跨音速面积律联系起来。这族机翼阻力特性的进一步討論以及弯度机翼族問題, 都載于参考文献[26]中。

应当明确, (16) 式中的积分并不經常互相抵消, 所以面积律并不是对所有的薄翼与細長相当物体的組合都能成立的。对于阻力由下式給出的橢圓錐体-柱体族的特殊情况:

$$C_{D_W} = C_{D_B} - \omega^2 \ln \left\{ \left(\frac{a}{4b} \right) \left[1 + \left(\frac{b}{a} \right) \right]^2 \right\} \quad (18)$$

这种效应的大小示于圖9中。上式中的量 C_{D_W} 表示基于最大横截面积的橢圓錐体阻力系数; C_{D_B} 表示相当迴轉体的阻力系数; 分数 a/b 表示橢圓横截面的長軸与短軸之比; ω 表示相当圓錐-圆柱的半頂角。这个关系式来自参考文献[22], 与圓錐-圆柱的理論阻力表示式

$$C_{D_B} = -\omega^2 (1.09 + 4 \ln \omega) \quad (19)$$

联系起来后, 就可定出任意截面的錐体-柱体的阻力表示式。圖9表示一組橢圓錐体-柱体的数字結果, 其横截面积的軸向分布与半頂角 ω 为0.1225弧度 (7°) 的圓錐-圆柱相同。我們看到, 当橢圓横截面逐漸变扁时, 阻力会显著地减少。还应指出, 当截面为圓形时, 阻力最大。这一結論符合勃恩脱 (Berndt) [27, 28] 的更为普遍的結論, 他研究了 $M_\infty = 1$ 时相当物体族的某些最大及最小性質。

要比无蜂腰机身的小得多。

很明显, 假如机翼的横向尺寸无限地增大, 則跨音速相当定律及面积定律都不能再繼續应用了。得劳琪在参考文献[19]中作了一对平行安置的抛物綫迴轉体的阻力試驗(圖8)。物体的相对厚度 t 为 $\sqrt{2}/12$, 它位于自由流馬赫数为1的气流中。对这一实验数据进行观察, 就可了解这些定律的适用范围。我們看到, 假如物体間的距离很小, 則基于最大横截面积的阻力系数接近于相对厚度为 $1/6$ 的单个物体按面积律所确定的阻力系数。但当这两物体逐漸远离时, 阻力系数就减小了, 最后接近相对

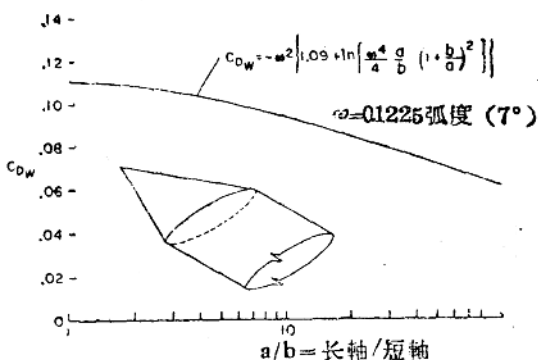


圖9 橢圓錐体-柱体的阻力, $M_\infty = 1$ 。

速端圖方法

在許多二元跨音速气流的研究中, 第一步就是利用速端圖轉換来綫化 q 的主微分方程式

(1)。速端圖轉換顛倒了自變數與隨變數的關係。假定轉換行列式

$$J = u_x^2(M_\infty^2 - 1 + ku) - u_z^2 \quad (20)$$

不等於零，則可直接得出下列二方程式：

$$(1 - M_\infty^2)z_w + x_u = kuz_w, \quad x_w = z_u \quad (21)$$

在亞音速氣流區域內，行列式不可能等於零；但在超音速氣流區域內，行列式可能並且經常等於零。因此，速端圖法在跨音速氣流方面的應用通常局限於亞音速區域及小部分超音速區域。解答的其他部分可用別的方法計算，例如特性綫法，這對超音速氣流是特別合適的。

消去 x ，令 z 與流函數 ψ 相同，並引入新變數 η 及 θ

$$\eta = (M_\infty^2 - 1 + ku)/(U_\infty k)^{2/3}, \quad \theta = w/U_\infty \quad (22)$$

便得出所謂特里考密 (Tricomi) 方程式

$$\psi_{\eta\eta} - \eta \psi_{\theta\theta} = 0 \quad (23)$$

它是最簡單的混合型線性二階偏微分方程式。雖然不難決定特里考密方程式的簡單解，並且因為方程式是線性的，所以可以採用疊代原則，但是對於繞翼型的跨音速氣流，求解邊界值的問題仍很複雜。當翼型由直綫組成時，這個困難就大大減少了。在繞楔形及平板翼型的跨音速氣流的研宄中，速端圖方法的應用是很成功的。在這些研宄中，同時採用了解析法及數字法(衰減法)。

楔形翼型的數據最為完全：考爾 (Cole) 給出了馬赫數小於 1 的近似解 [29]，這種近似解最近由約希哈拉 (Yoshihara) 作了改善 [30]；古得來及約希哈拉求得馬赫數等於 1 的近似解 [31]；

而文生梯 (Vincenti) 及華貢納 (Wagoner) 則得出了馬赫數大於 1 的近似解 [32]；另外，來潑曼和勃利生給出了三種不同楔形的實驗數據 [11, 12]。在圖 10 中用跨音速相似參數 $\bar{c}_d$ 及 ϵ_∞

(其定義見圖) 總結了各種方法的阻力結果 (考爾的結果以虛綫表示)。由此看出，這三個楔形的數據一致地形成一條符合跨音速相似律的曲綫，並且這條曲綫也與理論曲綫很符合。必須注意，本圖所示的全部理論結果都是在將原論文中的形式修改後得到的，所以在它們的

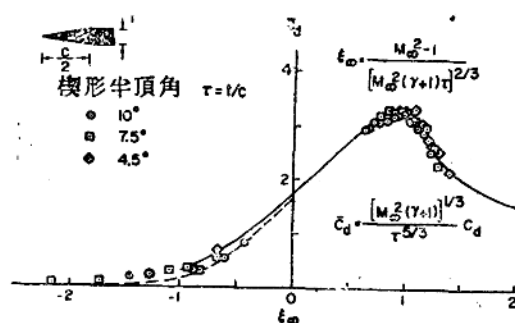


圖 10 單楔形截面的壓差阻力

推導過程中所採用的跨音速理論方程式與方程式 (1) 及 (2) 的不同，其中以 $\gamma + 1$ 代替了 $M_\infty^2(\gamma + 1)$ 。在參考文獻 [7] 及 [8] 中指出，假如理論結果保持其原來的形式，那麼它們就不會與實驗結果符合得那麼好。在最近幾年中，許多學者研宄了繞楔形及平板翼型的跨音速氣流的其他各種速端圖解答。其中大部分都總結在古得來最近出版的書中 [10]。參考文獻 [33] 給出了類似於圖 10 所示的理論與實驗結果的一些其他的比較。

伊瑪依 (Imai) 在參考文獻 [34] 中指出，假定我們認為氣流在有限楔形肩角處自翼型表面分離，並沿着速度為音速的自由流綫運動，則求解自由流馬赫數 1 的氣流問題就會比在肩角處遵循浦朗陀—梅葉爾 (Prandtl-Meyer) 膨脹的氣流簡單得多。在這樣的假設下，對於所有 1 以下 (包括 1) 的自由流馬赫數都不會出現超音速氣流區域，因此也就避免了混合型主方程式所引起的困難。海里威爾 (Helliwell) 及麥基 (Mackie) 最近在參考文獻 [35] 中對此問題作出了跨音速氣流理論方程式的精確解。幾乎在同時，庫蘇卡瓦 (Kusukawa) 發現了同一問題的有趣近似解 [36]。

这一解答的决定很简单,利用了压缩性气流的压力系数 C_p 与非压缩性气流*的压力系数 C_{p1} 之间的近似关系。当自由流马赫数为 1 时,此关系化为下列形式:

$$C_p = [(9/2)/(\gamma+1)]^{1/3} C_{p1}^2 \quad (24)$$

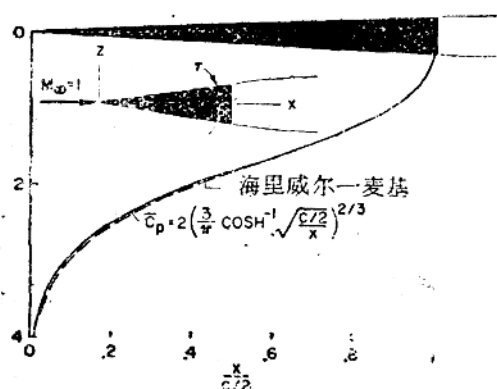


圖11 有限楔形上分离气流的压力分布,
 $M_\infty = 1$

参考文献中也包括马赫数小于 1 的结果。

库苏卡瓦采用依玛依用来分析压缩性气流的 WK B 近似法 (见参考文献 37, 第 6 章) 得出了上列表示式。将 (24) 式与非压缩性气流解的近似表示式联系起来, 可以得出处于自由流马赫数 1 气流中的楔形表面上压力分布的简单表示式 (楔形的弦长为 $c/2$, 半顶角为 τ):

$$\bar{C}_p = [(\gamma+1)^{1/3}/\tau^{2/3}] C_p \\ = 2[(3/\pi) \cosh^{-1} \sqrt{(c/2)/x}]^{2/3} \quad (25)$$

精确的及近似的压力分布的比较示于图 11 中。我们看到, 这两个结果在数值上几乎是相同的。

在参考文献 [38, 39 及 40] 中, 对于流经倾斜平板的及流经位于阻塞 (Choked) 渠道中楔形的自由流方向的气流, 给出了解答。其中后面两篇

逐次近似法

在许多文献中, 经常采用重复法来求出压缩性气流完全方程式及跨音速气流简化方程式的近似解。在许多这样的方法中, 可以用来分析绕薄翼型及细长物体的气流的最著名及最简单的方法是逐次近似法 (Method of Successive Approximation)。在这一方法中, 所寻求的解答具有展开为相对厚度幂级数的形式。这个方法的一级近似解 $q^{(1)}$ 可由解浦朗陀-葛劳涅方程式

$$(1-M_\infty^2)q_{xx}^{(1)} + q_{yy}^{(1)} + q_{zz}^{(1)} = 0 \quad (26a)$$

而得。将 (1) 式的右边项代以零, 就可得出这个方程式。这个结果就是线性理论的结果, 当马赫数朝两头远离 1 时, 此跨音速气流的解是收敛的。二级近似解系由下列方程式 (也是线性的) 获得:

$$(1-M_\infty^2)q_{xx}^{(2)} + q_{yy}^{(2)} + q_{zz}^{(2)} = k q_x^{(1)} q_{xx}^{(1)} \quad (26b)$$

此式系将一级近似解代入 (1) 式右边项而得。亚音速或超音速气流的较高级近似可按相似的方法求得。

虽然曾经发展了许多特殊的方法来帮助求解方程式 (见参考文献 37, 41, 42 及 43), 但是积分中的困难仍然很大, 对于高于二级的近似解, 只能求得极少数的解答。其中之一是流经对称圆弧翼型的亚音速气流, 阿萨卡 (Asaka) 得出了它的三级近似 [44]。(阿萨卡所处理的问题是求解压缩性气流理论完全方程式的三级近似解, 但从他的结果中也可很简单地引出跨音速气流小扰动理论方程式的解。) 在相对厚度为 τ 的这种翼型的中点上, 压力系数随马赫数的变化为

$$C_p = -2.5465 (\tau/\sqrt{1-M_\infty^2}) - 0.5132 [M_\infty^2(\gamma+1)/(1-M_\infty^2)^2] \tau^2 \\ - 0.6339 [M_\infty^4(\gamma+1)^2/(1-M_\infty^2)^{7/2}] \tau^3 + \dots \quad (27)$$

*原文此处误为压缩性气流——译者。

对于 $\tau=0.06$ 的特殊情况,前三項近似結果 C_{p1} 、 C_{p2} 及 C_{p3} 示于圖 12 中。可以看出,每加上一項都会增大最大負压力系数值,另外,表示結果的曲線在穿过临界压力系数 $C_{p_{cr}}$ 綫时也沒有引起明显的影响。在所有小于 1 的馬赫数下,用逐次近似法所得出的通常是无激波、无阻力的气流。現在認為,假如气流是跨音速的,則其結果的級数展开式并不收敛。

在轉向另一个題目之前,还应当談一下另一种逐次近似法。在参考文献 [8; 20, 45 及 46] 中曾把它用于亞音速气流。用这个方法所得出的結果,过高地估計了最大負压力系数随馬赫数的变化。这个方法紧密地联系着上述方法,并且最好这样来进行叙述:首先将逐次近似法結果的級数展开式的普遍形式写成轉化变数 $\bar{u}$ 及 $\bar{\tau}$ 的函数:

$$\bar{u}_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \bar{\tau}^n \quad (28)$$

其中

$$\begin{aligned} \bar{u} &= [M_{\infty}^2(\gamma+1)/(1-M_{\infty}^2)](u/U_{\infty}) \\ \bar{\tau} &= [M_{\infty}^2(\gamma+1)/(1-M_{\infty}^2)^{3/2}]\tau \\ \bar{C}_p &= \{[M_{\infty}^2(\gamma+1)]^{1/3}/\tau^{2/3}\} C_p = -2(\bar{u}/\bar{\tau}^{2/3}) \end{aligned}$$

这一种方法的 N 級近似值,可利用关系式

$$\bar{u}_N = 1 - \sqrt{1 - 2\bar{u}_N + \bar{u}_{N-1}^2} \quad (29)$$

从級数展开法的 n 級近似值直接得出。在参考文献 [8] 的附录中証明,对于到处都是亞音速的气流,用 (29) 式所得出的結果在无限次重复計算的情况下,收敛为用 (28) 式所得出的最終結果。但是 (29) 式不适用于在流場中出现音速的場合,所以不能提供混合气流或跨音速气流的結果。

曾經用 (29) 式計算过对称圆弧翼型中点上压力随馬赫数变化的前三級近似 C_{p1} 、 C_{p2} 及 C_{p3} ,它們示于圖 12 中。由此圖看出,在小馬赫数下,各种近似結果都符合得很好;但在接近其临界值的馬赫数下,它們之間就会出现很大的差別。在临界值以下的各个馬赫数上,曲綫一般趋向位于比較狹窄的界限內,因为以跨音速气流理論方程式的精确解所表示的 C_p 随 M_{∞} 的变化,要比第一种方法的第三級近似值大,但又比第二种方法的近似值小。

积分方程式方法, $M_{\infty} < 1$

将格林理論 (Green's Theorem) 应用到圍繞物体及其尾迹以及激波的适当区域上去,就可把跨音速气流理論的基本方程式变成具有非綫性积分方程式的形式。格林理論的形式很多,所以可导出許多不同的积分方程式。在繞任意非升力翼型的二元跨音速气流的分析中(其自由流馬赫数小于 1),一个有用的积分方程式是

$$\bar{u} - \frac{\bar{u}^2}{2} = \bar{u}_L - \frac{1}{2\pi} \times \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{\bar{u}^2}{2} \frac{(\bar{x}-\bar{\xi})^2 - (\bar{z}-\bar{\zeta})^2}{[(\bar{x}-\bar{\xi})^2 + (\bar{z}-\bar{\zeta})^2]^2} d\bar{\xi} d\bar{\zeta} \quad (30)$$

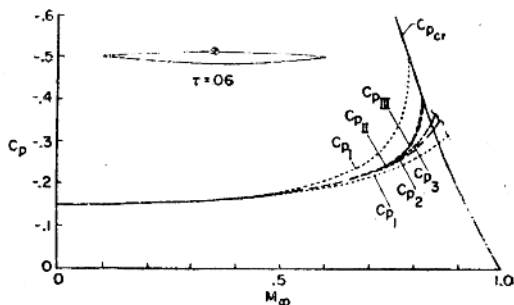


圖12 圆弧翼型中点上的压力分布,
 $\tau=0.06$

其中

$$\bar{u} = u/u_{cr} = [M_\infty^2(\gamma+1)/(1-M_\infty^2)](u/U_\infty),$$

$$\bar{x} = x,$$

$$\bar{z} = \sqrt{1-M_\infty^2} z$$

此式中的符号 $\bar{u}_L$ 表示由压缩性气流线性方程式[即公式(26a)]的解答所给出的 $\bar{u}$ 的表示式。

引入缩写 $1/2$ 来代表积分,可简化对(30)式性质的讨论。再令 $L=2\bar{u}_L-1$,可写出

$$\bar{u} = 1 \pm \sqrt{1-L} \quad (31)$$

由此立即得出 $1 \geq L$ 。正负号的选择决定气流是亚音速的还是超音速的。在 $1=L$ 的点上,符号的变换对应于穿过音速时的转变很平稳。在 $1 > L$ 的点上,符号的变换会引起速度上的不连续跳跃,并在物理上对应于一道激波。假如在这样的点上, 1 及 L 是连续的,则不连续对应于一正激波。当由较大的速度降为较小的速度时,这种不连续是合理的(压缩激波);但当速度沿反方向变化时,则是不合理的。

现在必须引入近似关系来简化(30)式,以便计算结果。参考文献[8,46,47及48]证明,在一些双凸翼型的压力分布计算中有一种简化是非常有用的,即以

$$\left. \begin{aligned} \bar{u}(\bar{\xi}, \bar{\xi}) &= \bar{u}(\bar{\xi}, 0) / [1 + (\bar{\xi}/b)]^2, \\ b &= -2[(1-M_\infty^2)^{3/2}/M_\infty^2(\gamma+1)] \times [\bar{u}(\bar{\xi}, 0)/(d^2Z/dx^2)] \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

来近似地表示积分中的 $\bar{u}(\bar{\xi}, \bar{\xi})$,这样就可对 $\bar{\xi}$ 进行积分,由此而得的积分方程式可用数字法及重复法求解。

这个方法在参考文献[46]中用来决定五族相关联的翼型的压力分布,这些翼型的最大厚度点

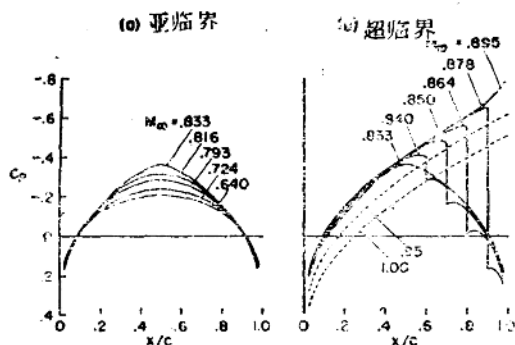


图13 圆弧翼型的压力分布, $\tau=0.06$, $M_\infty=1$

的位置各不相同,由30%至70%弦长。图13表示了6%厚度对称圆弧翼型的结果。图13中的部份(a)说明,在临界马赫数以下的压力分布是对称的,并且没有激波,同时最大负压力系数随马赫数的增大而缓慢地增加,正如图12中较高级近似一样。部份(b)表示马赫数超过其临界值后出现了激波,随着马赫数的继续增加,激波迅速地而后移动。在比1小得多的马赫数下,激波到达后缘。应当指出,在整个激波沿翼弦运动的马赫数范围内, C_p 值几乎保持相同于临界马赫数下的值。当马赫数增大到使激波到达后缘

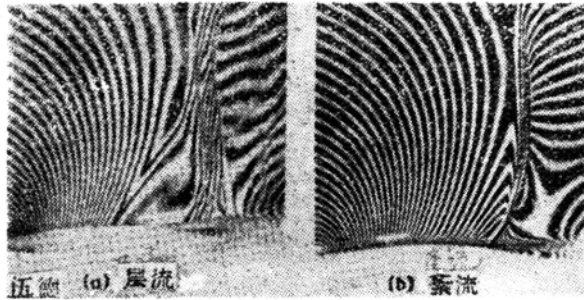
时,整个压力分布的形状(而不是大小)与马赫数1时的压力分布相似。在图13中,马赫数为1时的结果以一虚线表示,这并不是用积分方程式方法计算出来的,而是用下一节中所谈到的方法决定的。

示于图13部份(b)中的超临界马赫数的结果指出,紧接着激波之后有一个压力梯度是负的小区域。虽然气流的这种细节在实验而得的压力分布中并不明显,同时也已超过了(32)式近似法所能提供的精确度范围,但是在与爱芒斯(Emmons)[49]几年前用衰减法计算得出的结果和齐来激(Zierp)[50]最近对双凸表面与激波相交区域的分析比较后,发现对于非粘性气流,这

个结果在本质上是正确的。参考文献[50]指出，压力在激波后立即按 $\Delta x/R$ 的 $2/3$ 次幂降低，其中 Δx 为到激波的距离， R 为固体表面的曲率半径*。

虽然这种现象曾由阿克来脱 (Ackeret)、费尔得曼 (Feldman) 以及劳脱 (Rott) [51] 在边界层的紧外面观察到，并且也曾出现在艾姆斯研究中心最近所作的抽吸边界层翼型试验中，但在实验时，这种现象几乎经常被激波-边界层干扰效应所遮蔽。

为了更好地显示这种激波-边界层干扰现象的本质，在图 14 中复制了 12% 相对厚度的圆弧



伍德 (WOOD) 及高得尔伦 (GOODERUM) 的实验 NACA

图14 边界层效应，圆弧翼型， $\tau=0.12$, $M_\infty=0.88$, $Re=600,000$

翼型气流的两幅光干涉图。在这两幅图中，气流条件的差别只在于 (a) 图的边界层是层流的，(b) 图的边界层是紊流的。层流情况的光干涉图显示激波是 λ 型的，并且气流在弦长中点处自表面分离。但当边界层为紊流时，激波是单波型的，而气流则延迟到 70% 弦长处才开始分离。对应于这两种气流的理论的及测得的压力分布的比较 (参考文献 8) 指出，在分离点前面的翼型部份上，两者很符合，但在翼型的其余部份上，两者之间的差别就很大。这说明，不仅应对非粘性气流找出求解方法，而且对边界层激波干扰现象也应建立求解方法。参考文献[53]中所记载的飞行试验证明，在大雷诺数下这个问题的困难会减少些，因为层流边界层中的激波看来和紊流边界层的一样，也是单波型的。

局部线性化方法

参考文献[20, 45 及 54]所采用的求解跨音速气流理论方程式近似解的简单方法，是建立在下列基础上的：在一小区域内线性化方程式，将非线性项用一常数 λ 代替，然后对流场中的不同点引入不同的值。当然，用这种方法所得出的结果取决于 λ 的选择，而且为了得出最后结果还须要集合起来。令结果具有这样的形式，使 λ 原来所表示的值代入 λ 中去后能得出一个一阶非线性常微分方程。在许多场合下，这个方程式的形式是很简单的，可解析地积出，而解答由闭合的解析形式来表示；在另外的一些场合下，必须采用数值积分法，但是方程式的形式使我们可以采用标准

* 证明上的附注：作者通过与 J. 齐来脱及 D. G. 兰恩道尔 (Randall) 的通信了解到这种说法必须予以修正。兰恩道尔在 RAE TN Aero 2592 中证明，参考文献[50]中的分析会导出 (翼型表面曲率的符号及绝对大小都保持原状) 令人惊异的结果，即：在非粘性跨音速气流中，凸翼型上不可能存在激波。但是 P. R. 加拉贝地恩 (Garabedian) 指出，这两篇论文中所采用的基本假设——紧接激波后的流线曲率以连续的方式趋近翼型表面的曲率——是与在激波和曲线固体边界的交点上超音速气流的已知渐近膨胀相矛盾的。因此，跨音速气流的这一特殊区域还是一个未解决的问题，有待进一步研究。

的数字积分法。虽然这个方法的数学基础并未完全建立，但是在与用其他理论方法或实验所得出的结果进行了多次比较后，发现这个方法还是很有用的。下面就来简单地论述一下这个方法。

二元气流。

亚音速气流——首先考虑绕非升力翼型的二元亚音速气流，其翼型上表面的座标为 $Z(x)$ 。令符号 λ 表示 $1 - M_\infty^2 - ku$ ，然后将 (1) 式改写成

$$\lambda g_{xx} + g_{zz} = 0; \quad \lambda = 1 - M_\infty^2 - ku > 0 \quad (33)$$

现在假定 λ 变化得非常慢，以致在分析的初期，可把 λ 看成常数。翼型表面上 u_E 的解答为：

$$u_E = (U_\infty / \pi \sqrt{\lambda}) \int_0^x [(dZ/d\xi) / (x - \xi)] d\xi = u_i / \sqrt{\lambda} \quad (34)$$

其中脚注 i 对应于 $M_\infty = 0$ 的值。微分并以 $1 - M_\infty^2 - ku$ 代回 λ ，使在每一点上采用 λ 的局部值，便得到下列 u 的非线性常微分方程：

$$du/dx = (1/\sqrt{1 - M_\infty^2 - ku}) (du_i/dx) \quad (35)$$

这个方程式可用分离变数法求解。其结果为（以 C_p 而不是以 u 表示）

$$C_p = -[2/M_\infty^2(\gamma + 1)] \{ (1 - M_\infty^2) - [C + (3/4)M_\infty^2(\gamma + 1)C_{p,i}]^{2/3} \} \quad (36)$$

这里， $C_{p,i} = -2u_i/U_\infty$ ； C 为积分常数。假定气流在各处都是亚音速的，则可利用 (34) 式所提供的结果， $u_i = 0$ 处 $u = 0$ ，来简单地算出 C 。这样就可得出 C_p 与 $C_{p,i}$ 之间的关系为

$$C_p = -[2/M_\infty^2(\gamma + 1)] \{ (1 - M_\infty^2) - [(1 - M_\infty^2)^{3/2} + (3/4)M_\infty^2(\gamma + 1)C_{p,i}]^{2/3} \} \quad (37)$$

公式 (37) 被称为压力修正公式，它联系了压缩性气流中翼型上给定点的压力与非压缩性气流中

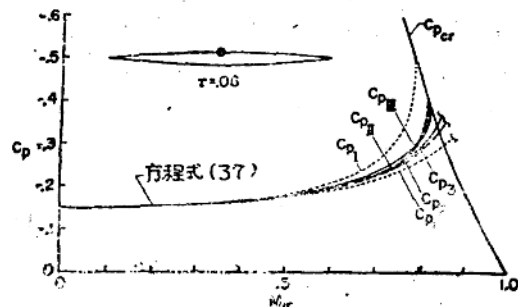


图15 圆弧翼型中点上的压力， $\tau = 0.06$

同一翼型上同一点的压力。在过去，曾经提出过许多压力修正公式，因而在参考文献[45]中就将 (37) 式的结果与其他的几个修正公式作了比较。因为所有这些表示式都包含以不定方式影响着最后结果的近似假设，所以最好将 (37) 式的结果与逐次近似法的结果进行比较。图15表示在 6% 厚度的圆弧翼型的中点上，各种 C_p 随 M_∞ 变化规律的比较。我们看出，(37) 式的结果非常相似于采用 (29) 式的第二种逐次近似法的三级近似结果。这说明 (37) 式的结果还是很好的，虽然最大负压力随马赫数的变化稍嫌大了一些。

应当指出，库苏卡瓦特 WK B 近似法应用于以速端圆变数表示的跨音速气流理论方程式后，也得出了 (37) 式的结果 [只是因为基本方程式上以 $(\gamma + 1)$ 代换了 $M_\infty^2(\gamma + 1)$ ，所以在结果上也有类似的差别]，由此得出，图 11 中所示由 (25) 式得出的有限楔形的压力分布近似结果（自由流马赫数为 1 时），也可用上述方法求得。

超音速气流——将同样的方法应用于超音速气流， $\lambda < 0$ ，则可得出对应于 (36) 及 (37) 式的下列结果：

$$C_p = [2/M_\infty^2(\gamma + 1)] \{ (M_\infty^2 - 1) - [C - (3/2)M_\infty^2(\gamma + 1)(dZ/dx)]^{2/3} \} \quad (38)$$

$$C_p = [2/M_\infty^2(\gamma + 1)] \{ (M_\infty^2 - 1) - [(M_\infty^2 - 1)^{3/2} - (3/2)M_\infty^2(\gamma + 1)(dZ/dx)]^{2/3} \} \quad (39)$$

这后面的关系式乃是跨音速气流理论中相当于超音速气流中用简单波理论 (Simple Wave Theory)