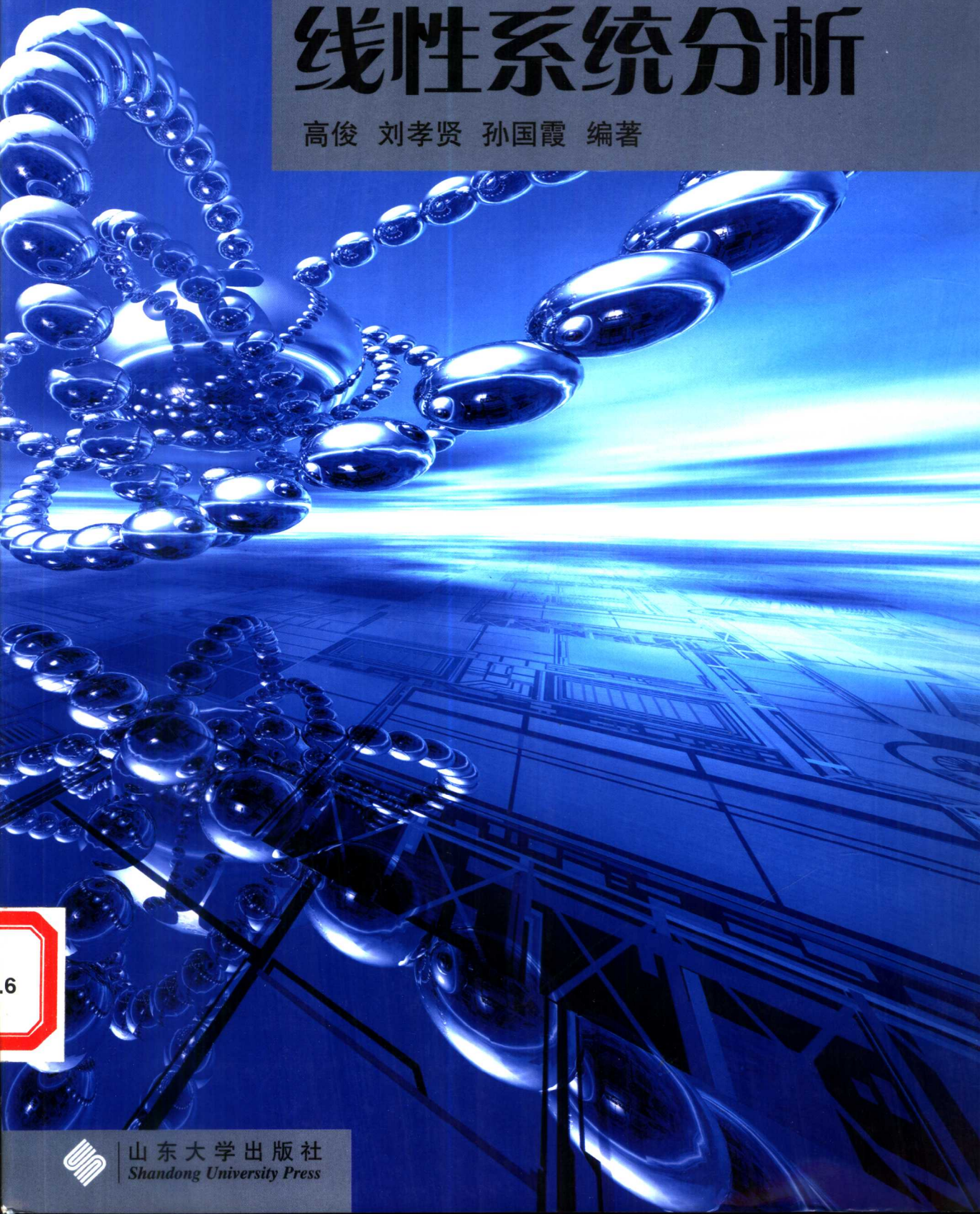


信号与 线性系统分析

高俊 刘孝贤 孙国霞 编著



6



山东大学出版社
Shandong University Press

信号与线性系统分析

高 俊 刘孝贤 孙国霞 编著

山东大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

信号与线性系统分析/高俊,刘孝贤,孙国霞编著. —济南:
山东大学出版社, 2002. 8
ISBN 7-5607-2480-9

I. 信... II. ①高...②刘...③孙...
III. ①信号理论—高等学校—教材②线性系统—系统
分析—高等学校—教材 IV. TN911.6

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第060446号



山东大学出版社出版发行

(山东省济南市山大南路27号 邮政编码:250100)

山东省新华书店经销

莱芜市圣龙印务书刊有限责任公司印刷

787×1092毫米 1/16 23印张 534千字

2002年8月第1版 2002年8月第1次印刷

印数:1—4100册

定价:35.00元

版权所有,盗印必究

凡购本书,如有缺页、倒页、脱页,由本社发行部负责调换

内容提要

本书系统地讨论了信号与线性系统的基本概念,信号经过线性时不变系统传输与处理的基本理论和基本分析方法。主要介绍确知信号的分析方法,本书讲述的次序为先输入输出分析(第一章到第五章)、后状态变量分析(第六章)、先连续后离散、先时域后变换域分析的顺序进行讨论的。

配合正文,各章均附有丰富的例题与习题,便于自学。

本书可作为电子工程、通信技术、自动控制及机电类有关专业本科及专科《信号与线性系统分析》课程的教材。本书也是信号与信息处理、电路与系统、通信与信息系统等专业《信号与线性系统分析》专业课研究生入学考试的参考书。

前 言

《信号与线性系统分析》是电子工程、通信技术、信号与信息处理等专业的主要技术基础课程之一。近年来,信号与信息处理方法更是逐渐扩大了在其他学科中的应用,如计算机、机械、材料、天文、经济、电力、过程控制等,《信号与线性系统分析》课程也成为高等院校中这些专业的必修课程。

原山东大学、山东工业大学和山东医科大学都有信号与信息处理教学科研体系,并各自使用的信号与线性系统分析方面的教材。2000年三校合并后,相关专业合并在一起,为了适应新的形势和要求,在原有相关教材基础上,重新编写了这本教材。

《信号与线性系统分析》全书内容共分为六章,全面阐述了信号与线性系统的特性和分析方法。内容按照由时域分析到变换域分析、由连续时间系统到离散时间系统、由输入—输出分析到状态变量分析的顺序安排,基本分析方法和基本概念逐步引出并加以扩充,有利于使用者接受。

《信号与线性系统分析》课程是在假定系统为线性系统的条件下,研究信号的分解、线性系统的响应、信号与系统相互作用等问题,同时研究由此而引出的各种物理概念和重要应用。学习《信号与线性系统分析》应当具备较好的数学、电路分析和物理学基础。慎密的思考习惯、良好的逻辑思维能力和清晰的思路会有助于更好地掌握本课程的主干内容。

本书使用数学工具较多,对问题的讨论又涉及较多的物理概念,因而本书内容兼有数学和物理课程的特点。学好本课程的标志首先是能用其概念体系解释各种涉及课程内容的物理现象,其次要准确地而简练地解决相应的分析和计算问题。信号分解的条件及方法,不但在各种域中推导求解系统的方法思路统一,同时也是诠释许多物理现象和概念的根本依据。要学会将复杂的问题分解为简单问题,并用叠加的方法求解的思维方式和技巧。从学习知识的较高的层次看,《信号与线性系统分析》课程的核心是处理问题的思想方法和严谨的科学态度。

我国高等学校教学中存在的较普遍的问题之一是课堂灌输偏多,对于学生自己去掌握知识的积极性则发挥得不够。我们不主张在使用本书时逐章逐节地依次在课堂上讲一遍。本书重视基本概念的理解、各种性质和定律的物理解释和应用、数学方法的活用和运算的准确性。在符合教学大纲基本要求的前提下,教师完全可以根据自己的经验和观点,在内容的取舍、讲解的次序和讲解问题的方法上采取不同的做法,而不必过多地受教材的约束。比如,可以减少一点讲课时数,留一部分内容让学生自学并组织讨论,以培养学生独立学习的能力。学生也应当懂得,学习一门课程不能只依靠教科书,应当尽量接触科学和工程实际中出现的信号与系统分析的问题,通过具体问题的分析巩固理论知识。

由于本书内容是信号与系统分析的基础内容,学习者应当通过本书内容的学习集中力量掌握有关的基本理论和基本分析方法。所以,《信号与线性系统分析》不可能也不应当

把信号与线性系统方面的内容包罗无遗。例如随机信号、反馈系统、综合理论等内容,本书基本上未涉及或未作深入讨论。

信号与线性系统这一学科的内容极为丰富,有各种可能的途径和方式来进行取材以形成该方面一门基本课程的内容。在组织该方面课程教学时,为使该教材对教师具有这样的灵活性和最大的可用性,适当深度地选用本教材的一部分内容,可以构成为弱电专业以外的专业开设《信号与线性系统分析》的课程。例如,对于学习过自动控制课程的专业来说,本教材中有关拉普拉斯变换的讨论就可以少讲或不讲。

本书得到山东大学出版基金资助。在重新编写本书过程中,参考了其他高等院校的同类教材及引进的国外教材,并从中获得许多教益和启迪,一些同行专家还提出有益的建议,在此一并致谢。作者希望在使用本书过程中提出宝贵建议和意见,并期望与其他院校师生进行交流,以提高信号与系统理论的教学质量。

作 者

2002年5月于山东大学

目 录

第一章 绪 论	(1)
§ 1.1 信号传输系统	(1)
§ 1.2 信号的概念	(3)
§ 1.3 冲激信号及阶跃信号	(6)
§ 1.4 系统的概念	(10)
§ 1.5 线性非时变系统的分析	(14)
§ 1.6 非电系统的分析	(16)
§ 1.7 非线性系统理论与进展	(20)
习 题	(25)
第二章 连续时间系统的时域分析	(31)
§ 2.1 线性连续系统的数学模型及算子表示法	(31)
§ 2.2 系统的零输入响应	(36)
§ 2.3 冲激响应及阶跃响应	(40)
§ 2.4 信号分解及系统的卷积积分法求解	(44)
§ 2.5 卷积积分及其性质	(51)
§ 2.6 线性系统响应的时域求解	(55)
习 题	(61)
第三章 连续时间系统的复频域分析	(67)
§ 3.1 引 言	(67)
§ 3.2 拉普拉斯变换及其收敛域	(68)
§ 3.3 常用函数的拉普拉斯变换	(73)
§ 3.4 拉普拉斯反变换	(76)
§ 3.5 拉普拉斯变换的基本性质	(83)
§ 3.6 线性系统的拉普拉斯变换分析法	(92)
§ 3.7 激励作用于 RLC 串联电路的响应	(103)
§ 3.8 线性系统的模拟	(110)
习 题	(113)
第四章 傅里叶变换、连续信号与系统的频域分析	(120)
§ 4.1 引 言	(120)
§ 4.2 周期信号的傅里叶级数	(120)
§ 4.3 周期信号的频谱	(122)
§ 4.4 周期信号傅氏级数的性质	(125)

§ 4.5	非周期信号的频域分析——傅里叶变换	(130)
§ 4.6	典型非周期信号的频谱	(132)
§ 4.7	傅里叶变换的性质	(135)
§ 4.8	周期信号的傅里叶变换	(148)
§ 4.9	傅里叶变换与拉普拉斯变换的关系	(149)
§ 4.10	能量密度与功率密度谱, 维纳—欣钦定理	(152)
§ 4.11	连续信号与系统的傅里叶分析方法	(156)
§ 4.12	周期信号激励下系统的响应	(158)
§ 4.13	脉冲信号激励下系统的响应	(160)
§ 4.14	无失真传输与理想滤波器	(162)
§ 4.15	系统的物理可实现性	(167)
§ 4.16	信号时间变化速率与其频带宽度的关系	(168)
§ 4.17	系统频谱图的画法	(171)
§ 4.18	抽样定理	(182)
§ 4.19	调制与解调	(186)
§ 4.20	能量与功率的传输问题	(191)
习 题		(193)

第五章 离散时间系统的分析 (204)

§ 5.1	离散时间信号——序列	(204)
§ 5.2	离散时间系统的基本概念	(212)
§ 5.3	离散时间系统的模型	(214)
§ 5.4	常系数线性差分方程的时域求解方法	(216)
§ 5.5	Z 变换	(224)
§ 5.6	Z 反变换	(232)
§ 5.7	Z 变换的性质	(239)
§ 5.8	利用 Z 变换解差分方程	(248)
§ 5.9	Z 域分析系统的特性	(250)
§ 5.10	离散时间系统的频率响应——傅氏变换分析	(252)
§ 5.11	序列傅氏变换的性质	(255)
§ 5.12	频率响应的几何确定方法	(256)
§ 5.13	连续时间信号拉氏变换与其抽样信号 Z 变换间的关系	(259)
§ 5.14	数字滤波器的设计	(264)
§ 5.15	数字滤波器的实现	(268)
§ 5.16	离散傅里叶变换(DFT)	(273)
§ 5.17	离散傅里叶变换的性质	(278)
习 题		(287)

第六章 线性系统的状态变量分析 (298)

§ 6.1	引言	(298)
-------	----	-------

§ 6.2	连续时间系统状态变量分析的数学模型	(299)
§ 6.3	连续时间系统状态方程的求解	(308)
§ 6.4	离散时间系统状态方程的建立	(320)
§ 6.5	离散系统状态方程的求解	(323)
§ 6.6	状态矢量的线性变换	(329)
§ 6.7	由状态方程判断系统的稳定性	(332)
§ 6.8	系统的可控制性与可观测性	(336)
§ 6.9	状态方程的数值解法	(340)
习 题		(342)
习题答案		(347)

第一章 绪 论

本章主要介绍信号与系统的一般概念,信号和系统的分类,系统的描述和求解,研究系统的一般方法和应用范围。重点介绍了线性系统的线性概念或条件,介绍了《信号与线性系统分析》的组织和学习要求。这类概念或条件是保证对《信号与线性系统分析》展开讨论的基本条件。

§ 1.1 信号传输系统

19 世纪以前,人们传递信息基本上是借助于非电物理量的各种方法。利用电磁波研究传送信息的方法,是在麦克斯韦和法拉第关于电磁感应定律的研究成果之后开始的。

1837 年美国人莫尔斯(Morse) 创立电报码,奠定了至今仍在使用的明码电报的编码体系。1876 年,贝尔(Bell) 发明电话,导致足不出户的通信基础。这两件事之后,利用电磁波传输信息的通信方式就开始了它辉煌的发展历程。从早期极其简单的通断式电路系统,发展到目前深入到人类社会活动中每一处生活空间的广播、电视、有线电视、无线电话、因特网等各种通信设施。此外,还有延伸着人类能力的自动控制、功能繁多的电子器件、代替人进行快速运算的计算机等科学技术。

今天,从气象观测、地震监测到水文地质勘探,从宇宙空间探索到基本粒子研究,从 GPS 系统和因特网到电灯电话,在工农业生产及社会、家庭生活中,没有一处不在应用这类科学技术成果。就这方面的科学技术来说,无论是目前人们所应用的,还是未来将要进一步发展的,其主要任务之一是要解决信息传输的问题,也就是将带有信息的信号,通过某种系统由发送者传送给接收者,或者由信源通过信道传送到信宿,如图 1—1 所示。为了完成这种信息传递的任务,经常需要将信号进行相应的变换和处理。

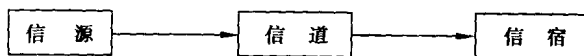


图 1—1 信息的传输

报纸、广播、通讯设施借助文字、图像和声音向公众传播着各种各样的信息。信息要用某种物理方式表达出来,除了使用文字、图像和声音来表达外,还可以用发送、接收双方事先约定其他形式的编码来表达。这些语言、文字、图画、编码等等,都是按照各自制定的规则组织起来的,它们含有有关信息的成组的约定的符号,这种用约定方式组成的符号统称为消息。通常情况下,消息不便于直接传输,所以要利用合适的转换设备,把各种不同的消息转变成便于携带或传输的电信号。这种电信号表面看来最常见的形式是随时间变化的电压或电流,从物理量上来看则与语言的声音变化或者图画的色光变化等相对应。这些变化着的电压或电流,分别构成了代表声音、图像和编码等消息的信号,因而信号中也就

包含了消息中所含有的信息。所以,带有信息的信号是信息传输技术的研究对象之一。

信号的传输和处理要由一个复杂的系统完成,该系统由许多不同功能的单元按严格的规则组织联结在一起。从广泛的意义上说,一切信息的传输过程都可以看成是通信,一切完成信息传输任务的系统都是通信系统,例如电报、电话、电视、雷达、E-mail、GPS 等等系统都是人们熟悉的例子。

今天人们可以获得远距离亲历表演或比赛现场的享受,这是借助声音和图像传输技术的成果。可以用电视系统作为例子来说明上述过程,在这系统中,所要传输的信息包含在一些配有声音的画面之中。在传输这些有声画面时,先要利用电视摄像机把画面的光线色彩转变成图像信号,同时利用话筒把声音转变成同步伴音信号。将图像信号与声音信号混合构成原始信号,再将这样的原始信号送入电视发射机,并加载到发射机本身产生的等幅振荡的高频电信号上,使高频信号的振幅(或相位、频率)产生与原始信号相符的变化。最后,由天线将高频电信号转换为电磁波发射出去,经空间或电缆传送到用户。用户的接收设备——电视机,是一种与电视设备作用相反的设备,电视机接收到传送来的载有各种信息的电磁波,并在电视机内把它恢复成原来的图像信号与伴音信号,并把这两种信号分别送到显像管和喇叭,使接收者在能看到传输的画面的同时,还可以听到同步的伴音。

上述信号与信息的传输过程,可以用一个简明的方框图表示,如图 1—2 所示。

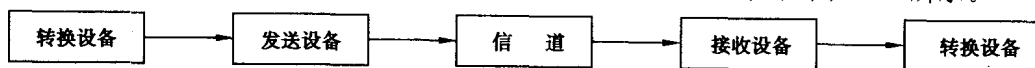


图 1—2 通信系统的组成

这个工作框图也代表了一般通信系统的组成。

其中转换设备指的是把消息转换为电信号或者反过来把电信号还原成消息的装置,如摄像管和显像管、话筒和喇叭之类。因为这些装置同时完成了从一种形式的能量转换为另一种形式的能量的工作,所以也常称之为换能器。

信道指的是信号传输的通道,在有线电话中它是一对导线(双绞线);在利用电磁波传播的无线电通信系统中,它可以是空间、卫星通信中的人造卫星,还可以是波导或同轴电缆;在近来发展的光通信系统中,则是光导纤维。如果理解得更加广泛一点,发射机和接收机也可以看成是信号的通道,因此有时也称它们为信道机。所以一个通信系统的工作,主要是包括消息到信号的转换、信号的处理和信号的传输。

涉及信息传输工作的任务,是要保证通过信道传输后的输出信号能够保持输入信号的原来样子或达到某种需要的变换。广播、电视技术工作者就要为完成这样的任务而去研究信号的特性、系统的分析方法、实现系统各组成部分的具体电路以及这些电路对于通过的信号产生何种影响等问题。

除了上面所介绍的通信系统以外,还有其他各种无线电电子学系统和有线电子学系统,例如生产部门的自动控制系统、航天器的姿态控制、登陆火星的“火星探路者”的行为控制、我国独立研制的 6000 米水下机器人的遥控等,都涉及大量的信号与信息处理。这些系统的组成部分与通信系统的组成不一样,但是它们的功能一般仍是信号的处理、传输、比较等等。

在社会科学和经济学领域,也有大量类似的问题需要用上面的模型和方法去处理。经

济系统是一个极其复杂的多输入多输出的巨系统,传统上常利用各种回归方法建立其数学模型。近年来,由于数学家、物理学家和控制论专家等其他学科学者的介入,也将各种新的分析研究方法带入经济系统模型的研究中。由于在经济系统中大量充斥着不易辨识的干扰和噪声,要想从原始记录数据中提取经济系统中的主要影响因素并建立较为准确的数学模型,必须滤除次要的和起干扰作用的因素,因而信号与系统的有关滤波理论在经济数据的处理与研究过程中就有重要的作用。现在,传统的经济学界也已经逐渐认识到现代信号与信息处理理论的价值。

其他学科,如电力系统、计算机科学、机械和材料学科等,也开始关注与信号与系统理论的结合。可以说,凡是需要数据处理的地方,都将是信号与信息处理的用武之地,也只有在应用了现代信号与信息处理方法,传统的数据处理才能发挥更大的作用。

由以上简略的叙述可以看出,对于研究或应用信号与信息传输的工作者,信号和系统的基本分析方法以及它们的基本特性是必须具备的知识,本课程就是为研究这方面的基本理论而设置的。

在本章下面几部分内容中,将分别对信号、系统、系统分析等问题介绍一般概念,详细的讨论放在以后的章节。

§ 1.2 信号的概念

在信号变换和传输系统中,所要处理的主体是信号。系统中包含的各种功能不同的电路、设备的作用,就是为了变换和传输各种各样的信号。因此,电路、设备的设计和要求,必然要取决于信号的特性。随着待传输的信号日益复杂,相应地,信号传输系统中的元器件、电路、设备和结构等也日益复杂。因而学习和研究信号分析理论具有重要意义。

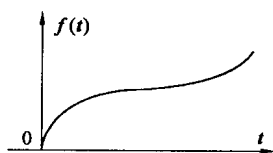
广义地说,信号是随着时间的变化而变化的某种物理量。一成不变的信号不能带来新信息,只有变化的量,例如变化着的压力、温度、电荷、磁链、电压、电流,才可能含有信息。电信号是随着时间变化的电量,它们通常是电压或电流,在某些情况下,也可以是电荷或磁通。

信号表示为一个时间的函数,所以在信号分析中,信号和函数二词常相互通用。当信号是一确定的时间函数时,给定某一时间值,就可以确定一相应的函数值。这样的信号是确定信号。但是,带有信息的信号往往具有不可预知的不确定性,它们是一种随机信号。随机信号不是一个确定的时间函数,当给定某一时间值时,其函数值并不确定,而只知道此信号取某一数值的概率。严格地说,除了实验室发生的有规律的信号外,一般的信号都是随机的。因为对于接收者来说,信号如果是完全确定了的时间函数,就不可能由它得到任何新的信息,因而也就失去了传输信号的目的。但是,对于确定信号的分析仍然具有重要意义,因为有些实际信号与确定信号有相近的特性。例如,乐音在一定时间内近似于周期信号。从这一意义上来说,确定信号是一种近似的、理想化了的信号,作这样的处理,能够使问题分析大为简化,以便于工程上的实际应用。在信号传输过程中,除了人们所需要的带有信息的信号外,同时也还会夹杂着如噪声、干扰等人们所不需要的信号,这类信号多数带有更大的随机性质。

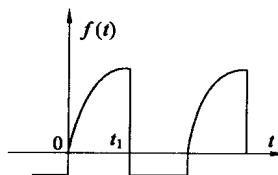
本书将只对确定信号进行分析,至于随机过程,则要留待后续课程中去讨论。

信号表示为确定的时间函数,如果在某一时间间隔内,对于一切时间值,除了若干不连续点外,函数都给出确定的函数值,则称该信号为连续信号。图 1—3(a), (b) 所示的两个函数,都是 $-\infty < t < \infty$ 内的连续信号,只是在 $t < 0$ 的范围内,两者的信号值都为零。这里 $t = 0$ 是一个任意选取的开始计量时间的参考点。这种在 $t < 0$ 时其值为零的函数,称为有始函数。需要注意的是,连续信号中可以包含有不连续点。如图 1—3(b) 中所示函数 $f(t)$,在 $t = 0$ 和 $t = t_1$ 处是不连续的,因为在该两点处

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} f(t + \epsilon) \neq \lim_{\epsilon \rightarrow 0} f(t - \epsilon)$$



(a) 不含间断点的连续信号 $f(t)$



(b) 含间断点的连续信号 $f(t)$

图 1—3 连续信号

实际上,所谓连续信号是指信号的时间变量 t 是连续变量。因此,为了更加确切,也常常把这种信号称做连续时间信号。若用 $f(t_{0+})$ 表示 $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} f(t_0 + \epsilon)$,用 $f(t_{0-})$ 表示 $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} f(t_0 - \epsilon)$,则称 $f(t_{0+}) - f(t_{0-})$ 为在 $t = t_0$ 处的不连续值。显然,图 1—3(b) 中信号在 $t = 0$ 处的不连续值是 $f(0_+) - f(0_-)$,这是一正值;在 $t = t_1$ 处的不连续值是 $f(t_{1+}) - f(t_{1-})$,是一负值。

与连续信号相对应的是离散信号。代表离散信号的时间函数只在某些不连续的时间值上给定函数值,如图 1—4 所示。

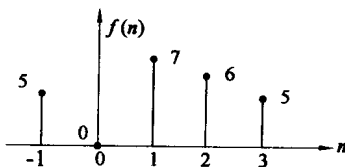


图 1—4 离散信号

图中函数 $f(t_n)$ 只在 $t_n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ 离散时刻给出函数值(图中竖线旁所标的数值)。所以,所谓离散信号,实际上指的是它的时间变量 t 取离散值 t_n ,因而这种信号也常称为离散时间信号用 $f(n)$ 表示。 $n < 0$ 时,如果函数值 $f(n)$ 都为零,则这种离散时间函数也是有始的。离散时间信号可以在均匀的时间间隔上给出函数值,也可以在不均匀的时间间隔上给出函数值,但一般都采用均匀间隔。

用确定的时间函数表示的信号,又可分为周期信号和非周期信号。对于周期性和非周期性的一般意义,是大家都熟悉的,这里不再赘述。需要说明的是,严格的数学意义的周期信号,是无始无终地重复着某一变化规律的信号。当然,这样的信号实际上是不存在的,所谓周期信号只是指在较长时间内按照某一规律重复变化的信号。

信号还可以用它的能量特点来加以区分。在一定的时间间隔内,把信号施加在负载上,负载要消耗一定的信号能量,将消耗的能量取平均值,即得在此时间内信号的平均功率。现在,如果将时间间隔无限趋大,则一般信号都将属于下述两种情况之一:或者信号总能量为有限值而信号平均功率为零;或者信号平均功率为有限值而信号总能量为无限大。属于前一种情况的信号称为能量信号,因为它们只能从能量去加以考察,而无法从平均功率去考察;属于后一种情况的信号称为功率信号,对于它们,总能量就没有意义,因而只能从功率去加以考察。直观上可以理解,在时间间隔无限趋大的情况下,周期信号都是功率信号。只存在于有限时间内的信号是能量信号;存在于无限时间内的非周期信号可能是能量信号,也可能是功率信号,也可能是非能量非功率信号,这要根据信号的函数形式而定。

表示确定信号的时间函数,包含了信号的全部信息量。所以信号的特性首先表现为它的时间特性。信号的时间特性主要是指信号随时间变化快慢的特性。所谓变化的快慢,一方面的意义是同一形状的波形重复出现的周期长短;另一方面的意义是信号波形本身的变化速率。图 1—5 表示一个周期性的脉冲信号,这个信号对时间变化的快慢,一方面由它的重复周期 T 表现出来,另一方面由脉冲的持续时间 τ 及脉冲上升和下降边沿陡直的程度表现出来。当然,信号作为一个时间函数,除了变化速率外,还可有其他的特性,例如图中的脉冲幅度 E 的大小之类。

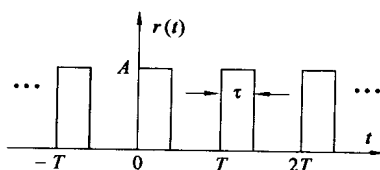


图 1—5 周期性脉冲信号

除了时间特性外,信号还具有频率特性。如以后将要详细讨论的,对于一个复杂信号,可以用傅里叶分析法把它分解为许多不同频率的正弦分量,而每一正弦分量则以它的振幅和相位来表征。各个正弦分量可以将其振幅和相位分别按频率高低依次排列成频谱。这样的频谱,同样也包含了信号的全部信息量。复杂信号频谱中各分量的频率,理论上说可以扩展至无限,但是由于原始信号的能量一般都集中在频率较低的范围内,高于某一频率的分量,在工程实用上可以忽略不计。这样,每一信号的频谱都有一个有效的频率范围,这个范围称为信号的频带(宽度)。

信号的频谱和信号的时间函数既然都包含了信号所带有的全部信息量,或者说都包含了信号的全部特点,因而,信号的时间特性和频率特性之间,就不可能互不相关、互相独立,必然要有密切的联系。例如,在图 1—5 中,重复周期 T 的倒数就是这周期性脉冲信号的基波频率,周期的小或大、短或长必然分别对应着高或低、快或慢的基波和谐波频率。同时,脉冲持续时间的长短和脉冲边沿的陡度决定着脉冲中的能量向高频方向分布的程度,也就是决定着信号的频带宽度。有关信号的这些特性,将在后面的章节中作进一步的研究。

§ 1.3 冲激信号及阶跃信号

信号与线性系统分析一切问题的基本原则：就是把实际工程信号分解为某种基本信号或函数之和，各基本信号分别作用于线性系统，则系统响应就是各基本信号所引起的响应之和。具体时域分析法中的基本信号是冲激信号，拉普拉斯变换中的基本信号是复指数函数，而傅里叶变换中的基本信号是正弦函数或指数函数。这里先介绍几种很有用的不能实际实现的理想信号或函数，其中主要的是冲激信号和阶跃信号。利用这些信号或函数，就能够简明便利地表述电路的激励和响应。这类函数都有一个或多个间断点，在间断点上的导数用一般方法不好确定。这样的函数，统称为奇异函数。阶跃信号和冲激信号是两种最常见的奇异函数，但奇异函数并不仅仅包括这两种函数。

阶跃信号可以用来表示用理想化的开关接通信号源的情况，如图 1—6(a) 所示。

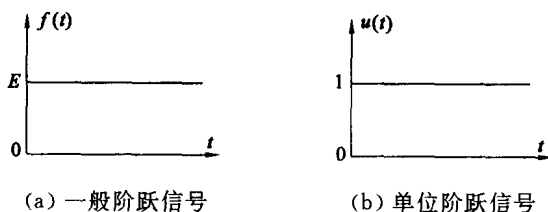


图 1—6 理想阶跃信号

图 1—6(a) 表示当时间 $t = 0$ 时，电路接通电压为 E 的直流电压源，电路电压源两端的变化曲线，此时，电路上的电压可以表示为式 (1—1) 所示的阶跃信号。

$$f(t) = \begin{cases} E, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (1-1)$$

这里把函数取非零值的开始时刻作为时间零点，即时间的起算点是零时刻。特别，当函数的幅度为 $E = 1$ 时，该函数称为单位阶跃信号，并给以特别的记号 $u(t)$ ：

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (1-2)$$

这一函数称为单位阶跃信号，当它乘以常数 E 时，即成为式 (1—1) 所示的一般阶跃信号。阶跃信号在发生跃变的位置，函数值未加定义。

函数 $u(t)$ 发生跃变的时刻是 $t = 0$ 。而 $u(t - t_1)$ 是延时了 t_1 时刻的阶跃信号，它的跃变发生在 $t = t_1$ 时刻。此结论很容易证明。根据式 (1—2) 的定义，有

$$u(t - t_1) = \begin{cases} 1, & t > t_1 \\ 0, & t < t_1 \end{cases} \quad (1-3)$$

由此可见，函数 $u(t - t_1)$ 是在 $t = t_1$ 处由 0 跃变为 1 的单位阶跃信号，它较 $u(t)$ 延迟一时间 t_1 ，如图 1—7 所示。

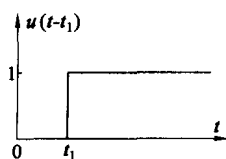


图 1—7 延时了 t_1 时刻发生的单位阶跃信号

任何一个函数 $f(t)$ 乘以单位阶跃信号后,其乘积在阶跃之前为零,在阶跃之后保持原 $f(t)$ 值。例如一正弦函数 $\cos \omega t$,在 $-\infty < t < \infty$ 范围内本是连续的;但 $\cos \omega t u(t)$,就只剩下 $t > 0$ 范围内仍为原来函数 $\cos \omega t$ 。所以单位阶跃信号 $u(t - t_1)$ 和另一函数相乘,有将后者从 t_1 之前全部切除的作用。

下面来讨论冲激信号。为此,考虑把一个用单位阶跃信号表示的电压信号源直接加到一个电容器上,如图 1—8 所示。

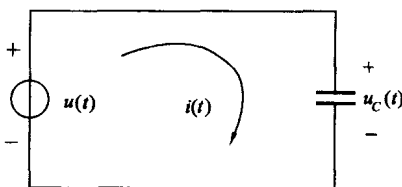


图 1—8 在理想电容上施加单位阶跃信号激励

如果电容器的电容值为 C ,根据电容的电压电流关系可以求得电容器引线上的电流为

$$i(t) = C \frac{du(t)}{dt}$$

在 $t \neq 0$ 时,函数 $u(t)$ 的导数等于零;但当 $t = 0$ 时,此导数不存在(事实上无穷大),因而电流也无法确定。这个问题,是因为把信号源和电容器都加以理想化后引起的。在实际的电路中,必定存在电阻,信号源也不可能供给无限大功率。若在电路中引入电阻,或者把信号源改成非理想的,就都可以得到合理的电流值。如果设想由非理想接入情况渐趋理想化,则在极限情况下的上述充电电流,也还是可以想象的。

图 1—9 是一种非理想直流源接入的情况,它表示加到电容器上的电压 $u_c(t)$ 在一定的范围 $-\frac{\tau}{2} < t < \frac{\tau}{2}$ 内,按线性规律逐渐增大到稳定值。这样,在同一时间范围内, $u_c'(t) = \frac{1}{\tau}$ 。若用这个电压代替图 1—8 中的单位阶跃电压,则在 $-\frac{\tau}{2} < t < \frac{\tau}{2}$ 范围内,充电电流为 $i = \frac{C}{\tau}$ 。当 $t < -\frac{\tau}{2}$ 与 $t > \frac{\tau}{2}$ 时, $i = 0$ 。

图 1—9 中电源电压的导数 $u_c'(t)$ 呈现矩形脉冲形状。如将纵坐标尺度乘以 C ,则该图即代表电流波形。注意这一导数曲线下的面积为 $S = 1$ 。现在,试设想 τ 值逐渐减小而趋近于零,则电压 $u_c(t)$ 逐渐趋近于一单位阶跃信号;与此同时, $u_c'(t)$ 这个脉冲的宽度 τ 亦趋近于零,而脉冲高度 $\frac{1}{\tau}$ 则无限趋大,但是不论 τ 值如何变小,脉冲面积始终保持为 1。于是在极限情况下,就得到了这样一个极限脉冲函数,它在 $t \neq 0$ 时,函数值都为零,在 $t = 0$ 处,

函数值为无限大,而脉冲面积为 1,记这个极限脉冲函数为 $\delta(t)$,则

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\infty}^t \delta(t) dt &= 1 \\ \delta(t) &= 0, t \neq 0 \end{aligned} \right\} \quad (1-4)$$

称函数 $\delta(t)$ 为单位冲激函数或单位冲激信号,亦称 δ 函数或狄拉克(Dirac) 函数。以上的说明只是从一个趋于极限的过程去想象这个函数。但是,由于冲激信号不是一般概念的函数,对于这个函数本身以及对它的运算,都不能按通常意义去理解。所以,直接用式(1-4)来作为这个函数的定义就不确切,而要用它对另一函数的作用来给出更为严格的定义,关于这个问题,要用后面的式(1-5)定义。当上述脉冲面积不为 1 而为某一常数 A 时, $A\delta(t)$ 就是一般的冲激信号,而 A 值称为冲激强度。与式(1-3)相类似,可以证明, $\delta(t - t_1)$ 是在 $t = t_1$ 处函数无限趋大的单位冲激信号。冲激信号用一箭头表示,如图 1-10 所示,冲激强度标注在箭头旁边。这里还要指出,冲激信号不一定是矩形脉冲的极限情况,其他信号如三角形脉冲、高斯脉冲、抽样函数等,当宽度无限趋小而脉冲面积保持不变时,也都以冲激信号为极限。

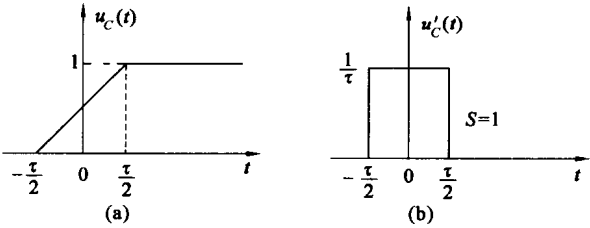


图 1-9 非理想信号及其导数

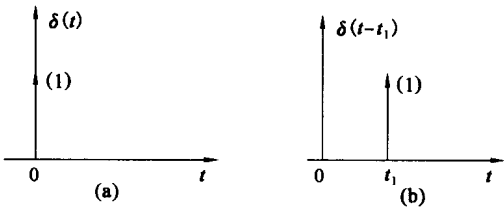


图 1-10 单位冲激信号及其延时信号

冲激信号是对于强度甚大而作用时间甚短的物理量的理想模型。例如,乒乓球运动员在抽杀时,球拍击球的力很大而球拍和球接触的时间 Δt 极短,力和时间的乘积 $F\Delta t$ 是击球的冲量,这是一个有限值。此时,如果要用一理想函数去描述击球的情况,则看成击球力无限趋大而击球时间无限趋小,二者的乘积即为原来的冲量,这就是冲激信号。冲击的大小,用冲量 $F\Delta t$ 示。

现在来考虑一般函数 $f(t)$ 乘以单位冲激信号后在 $-\infty < t < \infty$ 范围内进行积分的情况。因为除 $t = 0$ 外,在所有其他 t 值, $f(t)\delta(t)$ 都为零。所以乘积 $f(t)\delta(t)$ 也是除 $t = 0$ 外在其他 t 值上都为零。而 $t = 0$ 时, $f(t) = f(0)$,于是 $f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t)$,其积分则为

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(0)\delta(t)dt = f(0)\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = f(0)$$