

480
C441.4-2
S81

电子与通信工程系列教材

电磁场与电磁波

邱景辉 李在清 编
王 宏 王 欣

哈尔滨工业大学出版社

·哈尔滨·

内 容 提 要

本书系统地阐述了电磁场与电磁波的基本内容,包括:矢量分析、宏观电磁运动的基本规律、平面电磁波、平面波的反射与折射、导行电磁波、电磁波的辐射、静态场、稳恒场的解法和电磁场理论专题共九章。书中有一定数量的例题和习题以及相应的习题答案。

本书按由特殊到一般,再由一般到特殊的顺序组织内容,即先由基本实验定律归纳总结出描述宏观电磁运动普遍规律的麦克斯韦方程组,然后讨论时变场和静态场等具体情况。

本书适于作高等院校电子与通信工程及信息技术类等专业的教材或教学参考书,也可供其他相关专业的教师、学生和科技人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

电磁场与电磁波/邱景辉主编.—哈尔滨:哈尔滨
工业大学出版社,2001.1
电子、通信工程系列教材
ISBN 7-5603-1600-X

I.电... II.邱... III.①电磁场-高等学校-教
材 ②电磁波-高等学校-教材 IV.0441.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 86281 号

出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区教化街 21 号 邮编 150006
传 真 0451—6414749
印 刷 哈尔滨工业大学印刷厂印刷
开 本 787×1092 1/16 印张 15.25 字数 350 千字
版 次 2001 年 1 月第 1 版 2001 年 1 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 7-5603-1600-X/TN·58
印 数 1~4 000
定 价 22.00 元

前 言

《电磁场与电磁波》课程是电子、通信与信息技术类专业的一门专业基础课,研究的对象是电磁场与电磁波的基本属性、描述方法、运动规律与物质的相互作用及其应用。

本课程的特点是概念比较抽象,分析求解所用数学知识较多。因此本书在内容的组织上遵循由特殊到一般、再由一般到特殊的符合认识规律的顺序,由基本实验定律归纳总结出描述宏观电磁运动普遍规律的麦克斯韦方程组之后,讨论时变场和静态场等具体情况。

全书共分九章。第一章为矢量分析,是研究本课程的主要数学工具;第二章通过实验定律的分析、概括和提高,得到反映宏观电磁现象普遍规律的麦克斯韦方程组;第三、四、五章在波动方程的基础上,讨论了正弦电磁波在无界空间,半无界空间及有界空间内传播的基本规律;第六章介绍了电磁辐射的基本理论、辐射电磁场的基本计算方法及基本天线形式;第七、八章讨论了场量不随时间变化的稳恒场的基本性质和各种解法及其应用。第九章为电磁场理论专题,介绍了电磁场位函数理论及正弦电磁场的基本解法。

本书第五、六、九章由邱景辉编写,第二、三、四章由李在清编写,第三章第五节及第七、八章由王宏编写,王欣编写了第一章。

本书在编写过程中得到了哈尔滨工业大学微波教研室同仁的大量帮助,在此表示感谢。本书得以与读者见面尤其要感谢哈尔滨工业大学航天学院、教务处的鼎力支助。

编 者

2001 年 1 月

目 录

第一章 矢量分析

1.1 标量场与矢量场	1
1.2 矢量函数的导数与积分	1
1.2.1 矢量表示法	1
1.2.2 矢量函数的导数	2
1.2.3 矢量函数的积分	4
1.3 标量函数的梯度	4
1.3.1 等值面和等值线	4
1.3.2 方向导数	4
1.3.3 梯度	5
1.4 矢量函数的散度	8
1.4.1 矢量线和通量	8
1.4.2 散度	9
1.4.3 高斯散度定理	11
1.5 矢量函数的旋度	14
1.5.1 环量	14
1.5.2 旋度	14
1.5.3 旋度在直角坐标系中的表示式	15
1.5.4 旋度与散度的区别	16
1.5.5 斯托克斯定理	16
1.6 三种常用坐标系	18
1.6.1 直角坐标系	19
1.6.2 柱坐标系	20
1.6.3 球坐标系	21
1.6.4 三种坐标系之间的关系	23
1.6.5 三种坐标系的坐标单位矢量之间的关系	24
1.7 亥姆霍兹定理	25
习题	26

第二章 宏观电磁运动的普遍规律

2.1 电荷与电流	28
2.1.1 电荷 电荷密度	28
2.1.2 电流 电流密度	30
2.2 库仑定律 静电场的基本方程	32

2.2.1 库仑定理	32
2.2.2 电场强度	32
2.2.3 静电场的基本方程	33
2.3 稳恒电场和稳恒磁场的基本方程	35
2.3.1 电流连续性方程 稳恒电场的基本方程	35
2.3.2 导电媒质中的传导电流	36
2.3.3 安培定律 毕奥—萨伐尔定律	38
2.3.4 稳恒磁场的基本方程	40
2.4 介质中静电场和稳恒磁场的基本方程	41
2.4.1 介质的极化 介质中静电场的基本方程	42
2.4.2 介质的磁化 介质中稳恒磁场的基本方程	44
2.5 电磁感应定律	48
2.6 麦克斯韦方程组	49
2.6.1 位移电流	49
2.6.2 麦克斯韦方程组	50
2.6.3 麦克斯韦方程组的复数形式	51
2.7 电磁场的边界条件	53
2.7.1 场矢量 D 和 B 的法向分量的边界条件	53
2.7.2 场矢量 E 和 H 的切向分量的边界条件	54
2.8 时谐场中媒质的特性	55
2.8.1 媒质的色散	55
2.8.2 媒质的分类	56
2.9 坡印廷定理	57
2.9.1 坡印廷定理	57
2.9.2 坡印廷定理的复数形式	58
2.10 波动方程	60
习题	61
第三章 平面电磁波	
3.1 无损耗媒质中的均匀平面波	64
3.2 有损耗媒质中的均匀平面波	68
3.3 平面电磁波的极化	72
3.4 相速和群速	76
3.5 电磁波在各向异性媒质中的传播	77
3.5.1 等离子体中的电磁波	77
3.5.2 铁氧体中的电磁波	81
习题	83
第四章 平面波的反射与折射	
4.1 电磁波反射与折射的基本规律	87

4.1.1	反射和折射的基本规律	87
4.1.2	振幅关系——费涅尔公式	89
4.2	均匀平面波在理想介质分界面上的反射和折射	91
4.2.1	均匀平面波对理想介质的垂直入射	91
4.2.2	均匀平面波对理想介质的斜入射	93
4.2.3	全透射与全反射	94
4.3	均匀平面波对多层介质分界面的垂直入射	96
4.4	均匀平面波在理想导体表面上的反射和折射	99
4.4.1	均匀平面波对理想导体的垂直入射	99
4.4.2	均匀平面波对理想导体的斜入射	100
	习题	102
第五章 导行电磁波		
5.1	导行波的一般特性	104
5.1.1	导行波的波动方程	104
5.1.2	TEM 波的一般特性	106
5.1.3	TE、TM 波的一般特性	107
5.2	矩形波导	108
5.2.1	矩形波导中 TE 波的解	108
5.2.2	矩形波导中 TM 波的解	110
5.2.3	矩形波导中 TE、TM 波的传播特性	110
5.3	矩形波导中的 TE_{10} 波	113
5.3.1	TE_{10} 波的场量表达式及其传播特性	113
5.3.2	能量传输	113
5.3.3	波导壁上的电荷、电流分布	114
5.4	介质波导	115
5.4.1	介质波导的导波原理和特点	116
5.4.2	金属平板加介质片构成的波导	116
5.4.3	光纤波导	119
	习题	119
第六章 电磁波的辐射		
6.1	电磁场的标量位、矢量位及其微分方程	121
6.2	基本振子的辐射场	123
6.2.1	电偶极子的辐射	123
6.2.2	磁偶极子的辐射	125
6.3	天线的电参数	126
6.3.1	有关辐射方向性的参数	126
6.3.2	有关幅射能量的参数	129
6.3.3	天线的输入阻抗	129

6.4 半波天线	129
6.4.1 半波天线的辐射场	130
6.4.2 半波天线的电参数	130
6.5 天线阵	131
习题	132
第七章 静态场	
7.1 静电场	134
7.1.1 静电场方程与边界条件	134
7.1.2 静电场的标量位及其微分方程	135
7.1.3 静电场的能量	139
7.1.4 电容	141
7.2 稳恒电场(恒定电场)	142
7.2.1 稳恒电场的场方程及边界条件	142
7.2.2 焦耳定律	143
7.2.3 电阻	144
7.3 稳恒磁场	145
7.3.1 稳恒磁场的基本方程及边界条件	145
7.3.2 稳恒磁场的矢量磁位及其微分方程	147
7.3.3 磁场能量	151
7.3.4 电感	151
习题	155
第八章 稳恒场的解法	
8.1 边值问题	161
8.2 惟一性定理	164
8.3 镜像法	165
8.3.1 对导体平面的镜像	165
8.3.2 对导体球面的镜像	167
8.3.3 线电荷对导体圆柱的镜像	168
8.3.4 两种不同介质中置有点电荷时的镜像	170
8.4 分离变量法	171
8.4.1 直角坐标系中的分离变量法	172
8.4.2 圆柱坐标系中的分离变量法	174
8.4.3 球坐标系中的分离变量法	177
8.5 有限差分法	179
8.5.1 差分方程的导出	179
8.5.2 差分方程的求解	180
8.6 有限元法	183
8.6.1 边值问题的泛函极值	183

8.6.2 泛函极值问题的离散化	184
习题	188
第九章 电磁场理论专题	
9.1 电磁场的位函数	193
9.1.1 均匀媒质中的麦克斯韦方程组与波动方程	193
9.1.2 电磁场的位函数	194
9.1.3 规范条件与位函数的微分方程	194
9.1.4 赫兹电矢量 Π_e 与赫兹磁矢量 Π_m	196
9.1.5 无源区位函数的独立分量数	197
9.2 齐次矢量亥姆霍兹方程的解	199
9.2.1 标量亥姆霍兹方程的求解	199
9.2.2 矢量亥姆霍兹方程的求解	200
9.3 解非齐次亥姆霍兹方程的格林函数法	202
9.3.1 点源非齐次标量亥姆霍兹方程	202
9.3.2 非齐次标量亥姆霍兹方程格林函数解的一般表达式	202
9.3.3 非齐次标量亥姆霍兹方程的格林函数解	203
9.3.4 均匀无界空间中索莫菲尔德辐射条件	204
9.3.5 均匀无界空间中非齐次亥姆霍兹方程的格林函数解	205
9.3.6 矩形区域中非齐次亥姆霍兹方程的格林函数解	205
9.4 任意时变电磁场问题的求解方法	208
附录 1 矢量分析公式	211
附录 2 电磁波的物理量及单位	214
附录 3 并矢和张量	215
习题参考答案	221
参考文献	234

第一章 矢量分析

我们在研究电磁场和电磁波问题时,所使用的主要数学工具是矢量。在这一章里,我们主要介绍矢量分析和场论的一些基本概念,然后讨论柱坐标系和球坐标系,最后引入亥姆霍兹定理,该定理是矢量场性质的总结。

1.1 标量场与矢量场

所谓场,是某个物理量关于空间坐标和时间 t 的函数,即空间里每一点对应着某个物理量的确定的函数值。如果该物理量是标量,则称该物理量的场为标量场;若是矢量,则称该物理量的场为矢量场。例如温度场是标量场;速度场是矢量场。

若考虑到场函数随时间变化的情况,则把不随时间变化的场称为静态场或稳定场,否则称为动态场或时变场。

1.2 矢量函数的导数与积分

在电磁场理论中,我们主要研究矢量场。要研究矢量场,必然涉及到矢量的运算。矢量的代数运算主要有矢量的相加、相减及矢量的乘法(这里不再赘述)。下面主要讨论矢量函数的微分运算,并引入矢量微分算子 ∇ 。

1.2.1 矢量表示法

我们的讨论是在空间直角坐标系的前提条件下进行的。其坐标轴是 x 、 y 、 z 轴。一个矢量 A 在直角坐标系中有三个互相垂直的分量,用 A_x 、 A_y 、 A_z 表示,见图 1.1。 A_x 、 A_y 、 A_z 是矢量 A 在三个坐标轴上的投影。这样 A 可表示为

$$A = a_x A_x + a_y A_y + a_z A_z \quad (1.2.1)$$

其中, a_x 、 a_y 、 a_z 称为坐标单位矢量。它们的模均等于 1,方向分别是三个坐标轴的正方向。从图 1.1 中我们还可以看出,矢量 A 与坐标轴正向之间夹角分别是 α 、 β 、 γ ,把 $\cos\alpha$ 、 $\cos\beta$ 、 $\cos\gamma$,叫作矢量 A 的方向余弦。借助方向余弦的定义,式(1.2.1)还可以表示成:

$$\begin{aligned} A &= a_x A_x + a_y A_y + a_z A_z \\ &= a_x A \cos\alpha + a_y A \cos\beta + a_z A \cos\gamma \end{aligned} \quad (1.2.2)$$

其中 A 是矢量 A 的模值 $|A|$,

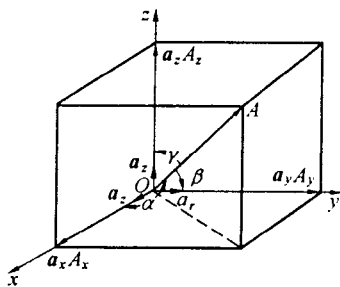


图 1.1

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \quad (1.2.3)$$

我们可以看到,矢量的表示及矢量之间运算都是借助于单位矢量进行的。任何一个矢量 A 都有一个与之同方向的单位矢量,用 A° 表示,这样矢量 A 就可以表示为:

$$A = |A| A^\circ = A A^\circ \quad (1.2.4)$$

在直角坐标系中,

$$A^\circ = \frac{A}{A} = a_x \cos \alpha + a_y \cos \beta + a_z \cos \gamma \quad (1.2.5)$$

因 $|A^\circ| = 1$,故由(1.2.5)式可以看出方向余弦的一个性质:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 \quad (1.2.6)$$

我们前面讨论的矢量 A 都是从坐标原点 O 为起点,指向空间任意一点 $M(x, y, z)$ 。这里 A 也称作点 M 的矢径,以后我们谈到矢径时一般用 r 表示,显然点 $M(x, y, z)$ 的矢径

$$r = a_x x + a_y y + a_z z \quad (1.2.7)$$

空间一点 M 对应着一个矢径 $OM = r$;反之每一个矢径 r 对应着空间的一点 M ,即矢径 r 的终点,故 r 又叫做位置矢量。空间的矢量的始点不是坐标原点时,见图 1.2 我们可以看出,利用两个矢量相减的形式可以表示矢量 B (B 的始点,不是坐标原点)。

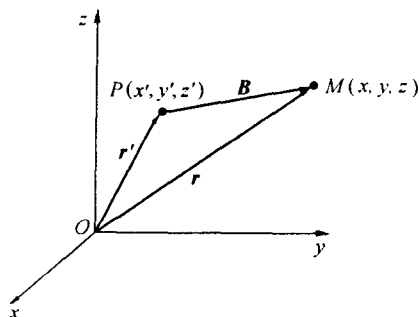


图 1.2

$$B = r - r' = a_x(x - x') + a_y(y - y') + a_z(z - z') \quad (1.2.8)$$

$$\text{它的模 } |B| = B = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2} \quad (1.2.9)$$

B 的方向余弦分别为

$$\cos \alpha = \frac{x - x'}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}} \quad (1.2.10a)$$

$$\cos \beta = \frac{y - y'}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}} \quad (1.2.10b)$$

$$\cos \gamma = \frac{z - z'}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}} \quad (1.2.10c)$$

1.2.2 矢量函数的导数

矢量函数一般是空间坐标 x, y, z 的函数,有时它也是时间 t 的函数。研究矢量场时,必然涉及到矢量函数随空间坐标和时间的变化率问题,既对上述变量的导数问题。实际上当我们研究一个矢量场的重要性质时,必需依靠矢量函数的导数这一数学工具。

矢量函数 F 对空间坐标的导数定义是:

$$\frac{dF}{du} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta u} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{F(u + \Delta u) - F(u)}{\Delta u} \quad (1.2.11)$$

上述定义要求 F 函数在 u 的某一邻域内连续。

利用上述矢量函数导数的定义,可知常矢量 C 的导数恒等于零。

另外,由(1.2.11)式还可以得到 F 的二阶导数 $\frac{d^2 F}{du^2}$ 及更高阶的导数, F 的各阶导数也都是矢量函数。

若 f 和 F 分别是变量 u 的标量函数和矢量函数, F 对 u 的导数:

$$\begin{aligned}\frac{d(fF)}{du} &= \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{(f + \Delta f)(F + \Delta F) - fF}{\Delta u} \\ &= \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta fF + f\Delta F + \Delta f\Delta F}{\Delta u} \\ &= F \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta u} + f \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta u} + \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \Delta f\Delta F\end{aligned}\quad (1.2.12)$$

当 $\Delta u \rightarrow 0$ 时,上式最后一项趋于零,故(1.2.12)式

$$\text{变为} \quad \frac{d(fF)}{du} = F \frac{df}{du} + f \frac{dF}{du} \quad (1.2.13)$$

因此一个标量函数与一个矢量函数之积的导数与高等数学中的两函数积的求导方法是相同的。

若 F 是两个变量 u_1 和 u_2 的函数,仿照高等数学中多元函数微分学中关于偏导数的定义, F 函数的偏导数

$$\frac{\partial F}{\partial u_1} = \lim_{\Delta u_1 \rightarrow 0} \frac{F(u_1 + \Delta u_1, u_2) - F(u_1, u_2)}{\Delta u_1} \quad (1.2.14)$$

对三元及更多元函数的偏导数可仿照上式进行定义。由上式,还可以得出

$$\frac{\partial(fF)}{\partial u_1} = f \frac{\partial F}{\partial u_1} + F \frac{\partial f}{\partial u_1} \quad (1.2.15)$$

其中 f 和 F 分别是关于 u_1 和 u_2 的二元标量函数和矢量函数。

对二元矢量函数,对其一阶偏导数再取一次偏导数,可以得到其二阶偏导数。显然,矢量函数的二阶和更高阶偏导数仍然是矢量函数。若矢量函数 F 至少有连续的二阶偏导数,则有

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u_1 \partial u_2} = \frac{\partial^2 F}{\partial u_2 \partial u_1}$$

在直角坐标系中,由于 a_x, a_y, a_z , 都不随空间坐标 x, y, z 和时间 t 变化,因此它们对 x, y, z 和 t 的导数为零。这样,利用式(1.2.15)可得

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} (a_x F_x + a_y F_y + a_z F_z) \\ &= a_x \frac{\partial F_x}{\partial x} + F_x \frac{\partial a_x}{\partial x} + a_y \frac{\partial F_y}{\partial x} + F_y \frac{\partial a_y}{\partial x} + a_z \frac{\partial F_z}{\partial x} + F_z \frac{\partial a_z}{\partial x} \\ &= a_x \frac{\partial F_x}{\partial x} + a_y \frac{\partial F_y}{\partial x} + a_z \frac{\partial F_z}{\partial x}\end{aligned}\quad (1.2.16)$$

(1.2.16)式说明在直角坐标系中,矢量函数对空间的偏导数仍是一个矢量,它的分量等于

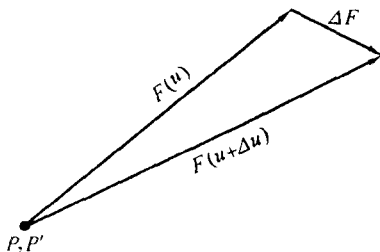


图 1.3

原矢量函数各分量对该坐标的偏导数。这一结论同样适用于矢量函数对时间 t 求导数。

1.2.3 矢量函数的积分

矢量函数的积分包括不定积分和定积分两种,它们和一般函数的积分在形式上类似,所以一般函数积分的基本法则对矢量函数积分也都适用。在高等数学课程里的曲线积分和曲面积分内容,有一部分就是矢量函数的积分。而且我们在电磁场理论中所用到的矢量函数的积分的运算方法,就是在高等数学中的运算方法。

1.3 标量函数的梯度

1.3.1 等值面和等值线

为了更好地描述场,我们先引入等值面或等值线的概念,但这两个概念只能大致地了解标量场在场中总体的分布情况;我们还需要了解标量场的细节,即场中每一点函数值的变化情况,这就需要引入方向导数和梯度的概念。

梯度是描述标量函数在空间各点邻域的变化情况,是标量函数的一个重要性质。因为场的数学表示就是函数,故在后面的叙述中,我们一般采用标量场的梯度这一名称。

在标量场 f 中,为了直观地研究 f 在场中的分布情况,引入等值面的概念。所谓等值面,是指场中使函数 f 取相同数值的点所组成的曲面。例如温度场中的等值面。在二维场中,等值面退化为等值线,即相同函数值的点构成的曲线,如地图上表示的等高线。

1.3.2 方向导数

如图 1.4, 设 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 是标量场 $u(x, y, z)$ 中的一点,从点 M_0 出发朝任一方向引出一条射线 l , 并在该方向上靠近点 M_0 取一动点 $M(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$, 点 M_0 至 M 的距离用 Δl 表示。

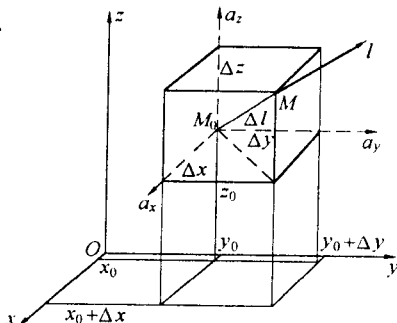


图 1.4

$$\frac{\partial u}{\partial l} \Big|_{M_0} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{u(M) - u(M_0)}{\Delta l} \quad (1.3.1)$$

称为标量场 u 在 M_0 点沿 l 方向的方向导数。若 $\frac{\partial u}{\partial l} \Big|_{M_0} > 0$, 说明函数 u 在 M_0 点 l 方向是增加的, 若 $\frac{\partial u}{\partial l} \Big|_{M_0} < 0$, 说明函数 u 在 M_0 点沿 l 方向是减少的。因此, 方向导数是标量场在给定点沿某一方向上对距离的变化率。

在直角坐标系中, 在点 M_0 沿 l 方向的方向导数的表达式

$$\frac{\partial u}{\partial l} \Big|_{M_0} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma \quad (1.3.2)$$

其中 $\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial z}$ 是 u 在点 M_0 的偏导数。 $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 是 l 的方向余弦。其证明如下:

如图 1.4, $\Delta u = u(M) - u(M_0)$

$$= \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial u}{\partial z} \Delta z + w \cdot \Delta l$$

其中 w 是 Δl 的高阶无穷小, 当 $\Delta l \rightarrow 0$ 时, 显然也有 $w \rightarrow 0$ 。上式两端除以 Δl , 得

$$\frac{\Delta u}{\Delta l} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\Delta x}{\Delta l} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\Delta y}{\Delta l} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\Delta z}{\Delta l} + w$$

令 $\Delta l \rightarrow 0$, 取极限, 注意到 $w \rightarrow 0$, 故得到式(1.3.2)。

【例 1.1】 求函数 $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 在点 $M(1, 0, 1)$ 处沿 $l = a_x + 2a_y + 2a_z$ 方向的方向导数。

$$\text{解: } \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

在点 $M(1, 0, 1)$ 处有

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

l 的方向余弦:

$$\cos\alpha = \frac{1}{3}, \quad \cos\beta = \frac{2}{3}, \quad \cos\gamma = \frac{2}{3}$$

再由公式(1.3.2), 就得到

$$\left. \frac{\partial u}{\partial l} \right|_M = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$$

1.3.3 梯度

方向导数表示出标量场沿某一特定方向对距离的变化率。在标量场中的给定点, 可以引出无穷多个方向。设函数 $u(x, y, z)$ 表示一个标量场, u 沿哪个方向的变化率最大呢? 这个变化率又是多少呢? 梯度可以回答这两个问题。

我们分析直角坐标系中的方向导数公式(1.3.2), 根据式(1.2.5), l 方向的单位矢量是

$$l^0 = a_x \cos\alpha + a_y \cos\beta + a_z \cos\gamma$$

把 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$ 看作一个矢量 G 沿三个坐标轴方向的分量, 表示为

$$G = a_x \frac{\partial u}{\partial x} + a_y \frac{\partial u}{\partial y} + a_z \frac{\partial u}{\partial z} \quad (1.3.3)$$

这样 G 和 l^0 的标量积(点乘)恰好等于 u 在 l 方向上的方向导数

$$\text{即} \quad \frac{\partial u}{\partial l} = G \cdot l^0 = |G| \cos(G, l^0) \quad (1.3.4)$$

上式中的矢量 G 在给定点是一个固定的矢量, 即 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$ 都有一个确定的值, l^0 则是在给定点引出的任一方向上的单位矢量, 它与函数 $u(x, y, z)$ 无关。式(1.3.4)说明 u 在 l 方向上的方向导数等于 G 在 l 方向上的投影。更进一步, 当 l 的方向与 G 的方向一致

时,方向导数取得最大值,亦即

$$\left. \frac{\partial u}{\partial l} \right|_{\max} = |\mathbf{G}| \cdot \cos(\mathbf{G}, \mathbf{l}^0) = |\mathbf{G}| \cdot \cos 0 = |\mathbf{G}|$$

所以矢量 $\mathbf{G}$ 的方向就是函数 $u(x, y, z)$ 在给定点变化率最大的方向,矢量 $\mathbf{G}$ 的模就是它的最大变化率。矢量 $\mathbf{G}$ 被称为函数 $u(x, y, z)$ 在给定点的梯度,记作

$$\text{grad } u = \mathbf{G} \quad (1.3.5)$$

梯度的定义是与坐标系无关的,它是由标量场的分布所决定的。我们在上面借助于方向导数的公式得到它在直角坐标系中的表示式为

$$\text{grad } u = \mathbf{a}_x \frac{\partial u}{\partial x} + \mathbf{a}_y \frac{\partial u}{\partial y} + \mathbf{a}_z \frac{\partial u}{\partial z} \quad (1.3.6)$$

它与(1.3.3)式实际上是完全一致的。

一个标量函数 u (亦即标量场) 的梯度是一个矢量函数。从梯度的物理意义上可以看出,它总是指向函数增大的方向。梯度在 l 方向上的投影就是 l 的方向导数,这是梯度的第二个性质,亦即(1.3.4)式。另外,标量场中每一点 M 处的梯度,垂直于过该点的等值面,且指向函数增大的一方。这就是梯度的第三个性质。梯度的这几个性质,表明梯度矢量和方向导数以及标量场的等值面之间的关系,这使得梯度成为研究标量场时的一个极为重要的工具。

为了以后计算方便,我们引入一个算子符号

$$\nabla = \mathbf{a}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{a}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{a}_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (1.3.7)$$

∇ 算子符号形式上像矢量,但与矢量的性质不同,只是矢量符号和微分符号的组合,它既谈不上有什么方向,也谈不上有什么长度,是矢量代数和微积分中都没有的一个新的数学符号。 ∇ 被称为 Hamilton 算子或 Nabla 算子,是 Hamilton 在四元算法中首先引入的。本书后面称为 ∇ 算子。

对 ∇ 不能套用矢量代数的公式,因为 ∇ 不是矢量。 ∇ 和其它函数结合的意义只能是定义而不是数学上的运算结果。

在直角坐标系中,算子 ∇ 与标量函数 u 相乘为一矢量函数

$$\begin{aligned} \nabla u &= (\mathbf{a}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{a}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{a}_z \frac{\partial}{\partial z}) u \\ &= \mathbf{a}_x \frac{\partial u}{\partial x} + \mathbf{a}_y \frac{\partial u}{\partial y} + \mathbf{a}_z \frac{\partial u}{\partial z} \end{aligned} \quad (1.3.8)$$

上式右端正是 $\text{grad } u$, 所以用 ∇ 算子可将梯度记为

$$\text{grad } u = \nabla u$$

有关 Hamilton 算子更深入的讨论,读者可参阅参考文献[8]。

梯度运算的基本公式

$$\nabla c = 0 \quad (c \text{ 为常数}) \quad (1.3.9)$$

$$\nabla(cu) = c\nabla u \quad (c \text{ 为常数}) \quad (1.3.10)$$

$$\nabla(u \pm v) = \nabla u \pm \nabla v \quad (1.3.11)$$

$$\nabla(uv) = u\nabla v + v\nabla u \quad (1.3.12)$$

$$\nabla\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{1}{v^2}(v\nabla u - u\nabla v) \quad (1.3.13)$$

$$\nabla f(u) = f'_u(u) \nabla u \quad (1.3.14)$$

这些有关梯度运算的公式和对函数求导的方法类似,我们以最后一式为例,证明如下:

$$\begin{aligned} \nabla f(u) &= (a_x \frac{\partial}{\partial x} + a_y \frac{\partial}{\partial y} + a_z \frac{\partial}{\partial z}) f(u) \\ &= a_x \frac{\partial f}{\partial x} + a_y \frac{\partial f}{\partial y} + a_z \frac{\partial f}{\partial z} \\ &= a_x \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + a_y \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + a_z \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} \\ &= \frac{\partial f}{\partial u} [a_x \frac{\partial u}{\partial x} + a_y \frac{\partial u}{\partial y} + a_z \frac{\partial u}{\partial z}] = \frac{df}{du} [a_x \frac{\partial u}{\partial x} + a_y \frac{\partial u}{\partial y} + a_z \frac{\partial u}{\partial z}] \end{aligned}$$

即(1.3.14)式成立。

【例 1.2】 设有位于坐标原点的点电荷 q , 在其周围空间的任一点 $M(x, y, z)$ 处所产生的电位为

$$\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon r}$$

其中 ϵ 为介电常数, $\mathbf{r} = a_x x + a_y y + a_z z$, $r = |\mathbf{r}|$ 。

试求电位 ϕ 的梯度。

解: 根据梯度运算的基本公式 $\nabla f(u) = f'_u(u) \nabla u$ 得

$$\nabla \phi = \nabla \left(\frac{q}{4\pi\epsilon r} \right) = \frac{-q}{4\pi\epsilon r^2} \nabla r$$

$$\begin{aligned} \text{而} \quad \nabla r &= \frac{\partial r}{\partial x} a_x + \frac{\partial r}{\partial y} a_y + \frac{\partial r}{\partial z} a_z \\ &= \frac{x}{r} a_x + \frac{y}{r} a_y + \frac{z}{r} a_z \\ &= \frac{\mathbf{r}}{r} \end{aligned}$$

$$\text{所以} \quad \nabla \phi = \frac{-q}{4\pi\epsilon r^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} = -\frac{q}{4\pi\epsilon r^3} \mathbf{r}$$

在后面的章节我们会看到, 电场强度 $\mathbf{E}$ 恰好和 $-\nabla\phi$ 相等即

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi$$

【例 1.3】 $R = [(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{\frac{1}{2}}$, 试证明

$$\nabla \left(\frac{1}{R} \right) = -\nabla' \left(\frac{1}{R} \right) \quad (1.3.15)$$

其中 R 表示空间点 (x, y, z) 和点 (x', y', z') 之间的距离。符号 ∇' 表示对 x', y', z' 微分, 即

$$\nabla' = a_x \frac{\partial}{\partial x'} + a_y \frac{\partial}{\partial y'} + a_z \frac{\partial}{\partial z'} \quad (1.3.16)$$

$$\text{解:} \quad \nabla \left(\frac{1}{R} \right) = \nabla [(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{-\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned}
&= a_x \frac{\partial}{\partial x} [(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{-\frac{1}{2}} + \\
&a_y \frac{\partial}{\partial y} [(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{-\frac{1}{2}} + \\
&a_z \frac{\partial}{\partial z} [(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{-\frac{1}{2}} \\
&= \frac{-[a_x(x-x') + a_y(y-y') + a_z(z-z')]}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}$$

所以

$$\nabla \left(\frac{1}{R} \right) = - \frac{\mathbf{R}}{R^3} = - \frac{\mathbf{R}^0}{R^2} \quad (1.3.17)$$

对于 $\nabla' \left(\frac{1}{R} \right)$, 仿照 $\nabla \left(\frac{1}{R} \right)$ 可求得 $\nabla' \left(\frac{1}{R} \right) = \frac{\mathbf{R}}{R^3} = \frac{\mathbf{R}^0}{R^2}$ 所以欲证明的等式成立。

公式(1.3.15) 我们在后面的章节要用到, 读者应该熟练掌握。

1.4 矢量函数的散度

为了研究矢量场在空间的分布及变化规律, 我们引入矢量线、通量和散度的概念。

我们用矢量函数表示矢量场, 因此, 以后讲到矢量场, 意味着有一个矢量函数与之相对应。

1.4.1 矢量线和通量

为了形象地刻画矢量场在空间的分布情况, 我们引入矢量线的概念。矢量线上每一点的切线方向都代表该点的矢量场方向。一般说来, 矢量场中的每一点均有唯一的一条矢量线通过, 矢量线充满了整个矢量场所在空间。电场中的电力线就是矢量线的例子。

矢量线的曲线方程显然依赖于矢量场的方程。对矢量场

$$\mathbf{F} = a_x \mathbf{F}_x + a_y \mathbf{F}_y + a_z \mathbf{F}_z \quad (1.4.1)$$

在矢量线上任一点的切向长度元 $d\mathbf{l}$ 与该点的矢量场 $\mathbf{F}$ 的方向平行, 亦即

$$\mathbf{F} \times d\mathbf{l} = 0 \quad (1.4.2)$$

其中

$$d\mathbf{l} = a_x dx + a_y dy + a_z dz \quad (1.4.3)$$

将(1.4.1) 式和(1.4.3) 式均代入(1.4.2) 式, 再根据零矢量的三个分量均为零的性质, 可得

$$\frac{dx}{F_x} = \frac{dy}{F_y} = \frac{dz}{F_z} \quad (1.4.4)$$

有了矢量线的定义, 我们可以描述通量这一概念了。通量可以看作是穿过曲面的矢量线的总数。用数学公式描述通量则是由矢量函数的曲面积分来表示的

$$\psi = \int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}^0 ds \quad (1.4.5)$$

称 ψ 为矢量场 $\mathbf{F}$ 在场中某一个曲面 S 上的面积分为 $\mathbf{F}$ 通过此曲面的通量。

我们结合图 1.5 讨论一下通量的取值。在矢量场中的任意曲面 S 上的点 M 周围取一

小面积元 ds , 这一小面元有两个方向相反的单位法线矢量 $\pm n^\circ$, 设取如图 1.5 所示的单位法线矢量 n° , 则 $\theta < 90^\circ$, 可知 $d\psi = \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}^\circ ds = F \cos \theta ds > 0$; 反之, 若取单位法线矢量 $-\mathbf{n}^\circ$, 则可得 $d\psi < 0$ 。

因此, 通量是一个代数量, 其正负与面积元的法线方向有关。

在电磁场理论中, 我们感兴趣的情况是在一个闭合曲面上的通量。此时因为曲面是闭合的, 通常矢量线穿入、穿出此曲面两次。结合图 1.6 我们讨论一下闭合曲面的通量。

对于空间任一闭合曲面 S , 我们对其上小面积元 ds 的单位法线矢量方向作出规定: n° 由面内指向面外, 即图 1.6 中 ds_1 和 ds_2 的方向均由面内指向面外。在图中的 M_1 点, $\mathbf{F}$ 与 ds_1 之间的夹角 $\theta < 90^\circ$, 穿过 M_1 点周围小面元 ds_1 的通量为正值; 穿过 M_2 点周围小面元 ds_2 的通量为负值。

$$\psi = \oint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \oint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}^\circ ds \quad (1.4.6)$$

上式表示通过闭合曲面总通量, 它既包含了像穿过 ds_1 面元的正通量, 也包括穿过 ds_2 小面元的负通量。当 $\psi > 0$ 时, 穿出闭合面 S 的通量线多于穿入 S 的通量线, 这时在 S 内必然有发出产生通量线的源, 我们称为正源。当 $\psi < 0$ 时, S 内必然有吸收(中止)通量线的源, 我们称为负源。 $\psi = 0$ 时, 这时 S 内或者根本没有源, 或者 S 内的正源和负源完全相等并抵消。我们把和通量有关的源称为通量源。后面我们还将讲述矢量场的另外一种源——旋涡源。这两种源都是刻画矢量场特性的。

由矢量函数的可叠加性, 我们可以得出结论, 通量是可叠加的, 即若有

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \cdots + \mathbf{F}_n = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i$$

则通过 S 面的矢量场 $\mathbf{F}$ 的通量是

$$\begin{aligned} \psi &= \oint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \oint_S \left(\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \right) \cdot d\mathbf{s} \\ &= \sum_{i=1}^n \oint_S \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{s} \end{aligned} \quad (1.4.7)$$

1.4.2 散度

前面讨论闭合曲面 S 的通量时, 若 $\psi \neq 0$, 则必有通量源存在于闭合面 S 内, 但具体在 S 内的什么位置上, 通量源的强度如何也是我们研究矢量场时所关心的内容。这就是需要用散度这一概念。

设有矢量场 $\mathbf{F}$ 。在 $\mathbf{F}$ 中任意一点 M 的某个领域内作一包含 M 点的任一闭合面 S , 设 S

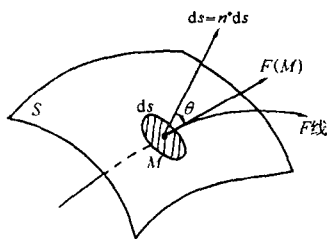


图 1.5

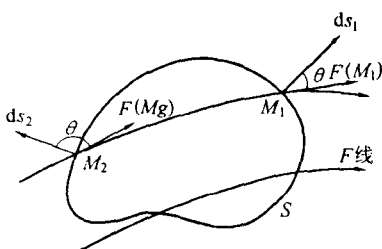


图 1.6