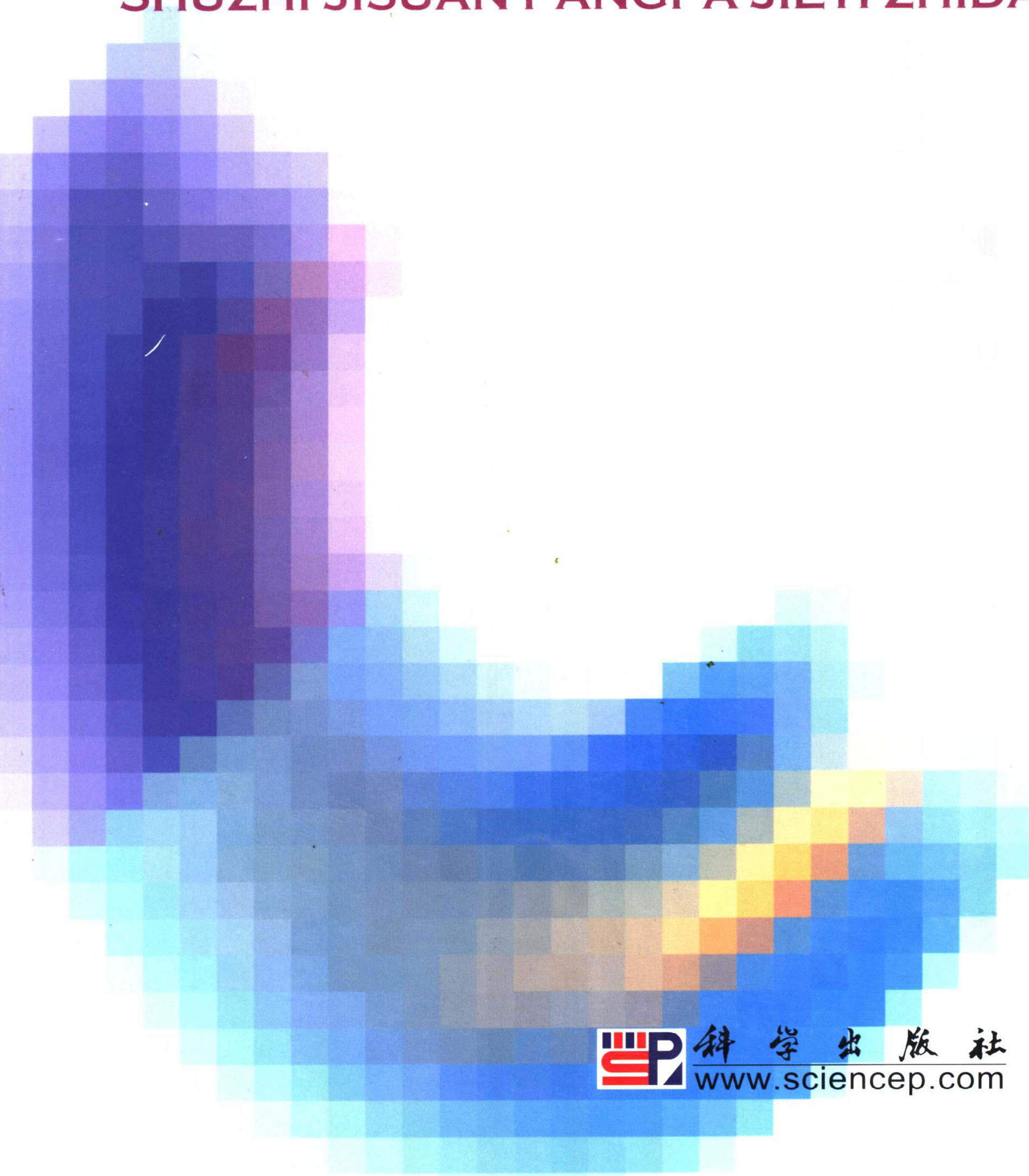
张韵华　编著

数值计算方法解题指导

SHUZHI JISUAN FANGFA JIETI ZHIDAO



科学出版社
www.sciencep.com

数值计算方法解题指导

张韵华　编著

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书是与科学出版社2002版《数值计算方法和算法》教材相配套的辅助教材。内容按照教材对应章节的先后次序安排，包括插值、数值微分和数值积分、曲线拟合、非线性方程求解、解线性方程组、计算矩阵特征值和特征向量以及常微分方程数值解。本书以例题为中心，通过例题阐明数值计算方法的思想和解题思路。书中包括200多道例题和习题，例题类型多样化，并附有部分例题的源程序。

本书可作为普通高校理工科学生的教学辅导用书，也可作为数学系信息和计算科学专业、计算机系本科生的参考资料，也可供对计算方法有兴趣的读者参阅。

图书在版编目(CIP)数据

数值计算方法解题指导/张韵华编著.—北京：科学出版社，2003
ISBN 7-03-011518-X

Ⅰ.数… Ⅱ.张… Ⅲ.数值计算-计算方法 Ⅳ.O241

中国版本图书馆CIP数据核字（2003）第038332号

责任编辑：赵卫江/责任校对：包志虹
责任印制：吕春珉/封面设计：王 浩

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
新蕾印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2003年8月第一版 开本：787×1092 1/16
2003年8月第一次印刷 印张：11 1/2
印数：1—5 000 字数：264 000

定价：18.00元

前　言

随着计算机和计算方法的飞速发展，几乎所有学科都走向定量化和精确化，从而产生了一系列计算性的学科分支，如计算物理学、计算化学、计算生物学、计算地质学、计算气象学和计算材料学等，计算数学中的数值计算方法则是解决“计算”问题的桥梁和工具。我们知道，计算能力是计算工具和计算方法效率的乘积，提高计算方法的效率与提高计算机硬件的效率同样重要。科学计算已广泛用于科学技术和社会生活的各个领域中。

数值计算方法是一种研究并解决数学问题的数值近似解方法，简称计算方法。计算机是数值计算方法最常用的计算工具，随着计算机技术的迅速发展和普及，计算方法课程已成为所有理工科学生的必修课程。

计算方法是一门理论性和实践性都很强的学科，计算方法既有数学类课程的抽象性和严谨性的理论特性，又有实用性和实验性的技术特征。

在学习计算方法课程中，对数学系信息和计算科学专业及计算机系的学生，教学内容侧重计算方法的理论部分；对一般理工科的学生，教学内容侧重计算方法的实用性和实验性部分。本书的宗旨既不以严谨理论为主导，也不是全篇数据的数值计算，而是两者兼顾，兼收计算方法的基本理论和实用性。以方法为中心，以例题为载体，围绕方法给出简单的典型的数值例题，通过例题进一步理解计算对象、计算公式、计算的限定条件和计算步骤。为适合不同层次的读者，对有一定难度的例题标以星号（*），部分关于计算方法的收敛性和稳定性的证明题型也都标以星号，这些例题的内容已经超出理工科计算方法课程的范围。

本书作为学习数值计算方法课程的辅导教材，与科学出版社 2002 版《数值计算方法和算法》教材配套，其顺序为“插值”、“数值微分和数值积分”、“曲线拟合”、“非线性方程求根”、“解线性方程组的直接法”、“解线性方程组的迭代法”、“计算矩阵特征值和特征向量”和“常微分方程数值解”。每一章都给出基本内容、常规和典型例题列举及点评、程序示例、习题和答案。

在每章的“基本内容”中，列出本章内容要点和核心计算公式，并给出部分计算公式的算法描述。用算法容易准确而简便地描述计算公式，在算法中能简洁地表达计算公式中的循环和迭代等操作，缩短了从方法到在计算机上实施的距离。近年来在国外的计算方法教材中算法也是重要的组成内容，例如，由教育部高等教育司推荐的国外优秀信息科学与技术系列教学用书《数值分析》（Numerical Analysis，Richard L. Burden 著）中给出大部分计算方法的算法。有了方法的算法，也就容易将它转化成 C 或 Pascal 等语言的程序上机运行了。

在每章的“例题汇集”中，以计算题为主体，将一些定理的证明和算法用例题形式给出，有利于巩固课堂教学效果。在部分例题中给出解题引导和点评，目的是指导解题思路和拓宽理论背景。本书以普通高校理工科学生为主要对象，特别要说明的是标以星

号 * 的例题，其教学内容超出对一般理工科学生的要求，是为数学系信息和计算科学专业以及计算机系的学生提供的，也可供对计算方法有兴趣的学生参阅，部分例题附有一些用符号计算语言 Mathematica 编写的程序。

在每章的“程序示例”中，给出用 C 语言编写的方法的程序和计算实例，这些程序基于数值计算公式，没有进行优化处理，其目的是通过编程上机，加深对方法运行过程的理解，训练和提高学生计算机应用技术能力和水平。通过学生自选语言平台，在计算机上编程序做计算方法的作业，在编程中领会和理解计算方法的计算要领和步骤，在编程中体会问题的条件和限制范围，在编程中理解一般问题和特殊问题的区别。在数值实验中观察误差的影响，通过误差量来观察计算方法的适应范围。

在每章的“习题”中，给出部分习题和简要答案。

希望通过例题和习题帮助学生进一步理解计算方法中的逼近和迭代等数学思想，掌握常用的数值方法，获取近似计算的能力，激发学生的学习兴趣，扩大学生数值计算的知识面，并能触类旁通地应用到各自的科研和技术领域中，培养学生的数学综合分析能力和计算能力。

奚梅成教授多年来一直担任中国科技大学数学系的“数值分析”和“线性代数计算方法”课程的主讲老师，他治学严谨，教学经验丰富，他为本书提供了许多有深度的例题并核查了大部分例题；本书“程序示例”部分由中国科技大学数学系博士生窦斗完成；博士生刘琼林核查和验算了所有例题，在此向他们深表感谢。

还要衷心感谢科学出版社赵卫江编辑，她在本书和《数值计算方法和算法》的出版过程中给了作者很大的帮助，并为本书编写提出了建设性的建议。

编　者

2003 年 3 月

目　　录

第1章　插　　值

1.1　基本内容

1. 插值定义

设 $f(x)$是定义在区间$[a,b]$上的连续函数,$x_0,x_1,\cdots,x_n$ 是$[a,b]$上 $n+1$ 个互不相同的点,Φ 是给定的某一函数类。若 Φ 上有函数$\varphi(x)$,满足

$$\varphi(x_i) = f(x_i), \quad i = 0,1,\cdots,n$$

则称 $\varphi(x)$为 $f(x)$关于节点 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 在Φ 上的插值函数;称 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 为插值节点;称 $(x_i,f(x_i))(i=0,1,\cdots,n)$为插值型值点,简称型值点或插值点;$f(x)$称为被插函数。

2. 拉格朗日(Lagrange)插值多项式

给定$(x_i,f(x_i))(i=0,1,\cdots,n;\ x_i$ 互不相同),构造次数至多为 n 的插值多项式 $L_n(x)$:

$$\begin{aligned} L_n(x) &= \sum_{i=0}^{n} l_i(x) f(x_i) \\ &= \sum_{i=0}^{n} \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} f(x_i) \\ &= \sum_{i=0}^{n} \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)} f(x_i) \end{aligned} \tag{1.1}$$

称 $L_n(x)$为 $f(x)$关于 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 的n 次拉格朗日插值多项式,它满足

$$L_n(x_i) = f(x_i), \quad i = 0,1,\cdots,n$$

可以证明插值多项式 $L_n(x)$存在并惟一。

3. 插值多项式的截断误差

设 $L_n(x)$是在$[a,b]$上关于$(x_i,f(x_i))(i=0,1,\cdots,n;x_i$ 互不相同)的 n 次插值多项式,$f(x)$在$[a,b]$上有 n 阶连续导数,$f^{(n+1)}(x)$在$[a,b]$上存在,则插值多项式$L_n(x)$的截断误差为

$$\begin{aligned} R_n(x) = f(x) - L_n(x) &= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \\ \xi &= \xi(x) \in [a,b] \end{aligned} \tag{1.2}$$

4. 差商的定义

(1) 设 $x_0 \neq x_1$,称

$$f[x_0,x_1]=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$$

是 $f(x)$ 关于 x_0,x_1 的一阶差商。$f(x)$ 在 x_0 的零阶差商为 $f[x_0]=f(x_0)$。

(2) 设点 $x_0,x_1,\cdots,x_k$ 互不相同，$f(x)$ 关于点 $x_0,x_1,\cdots,x_k$ 的 k 阶差商为

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_k]=\frac{f[x_1,x_2,\cdots,x_k]-f[x_0,x_1,\cdots,x_{k-1}]}{x_k-x_0} \tag{1.3}$$

5. 差商的性质

(1) $f[x_0,x_1,\cdots,x_k]=\sum_{i=0}^{k}\frac{f(x_i)}{\prod_{j\neq i}(x_i-x_j)}$

(2) 若 $i_0,i_1,\cdots,i_k$ 为 $0,1,\cdots,k$ 的任一排列，则

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_k]=f[x_{i_0},x_{i_1},\cdots,x_{i_k}] \tag{1.4}$$

(3) 设 $f^{(n)}(x)$ 存在，则

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_n]=\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \tag{1.5}$$

6. 牛顿(Newton)插值多项式

关于型值点 $(x_i,f(x_i))(i=0,1,\cdots,n;x_i$ 互不相同)，次数至多为 n 的牛顿插值多项式为

$$\begin{aligned}N_n(x)=&f[x_0]+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)\\&+\cdots+f[x_0,x_1,\cdots,x_n](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})\end{aligned} \tag{1.6}$$

插值误差为

$$R_n(x)=f[x,x_0,\cdots,x_n](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$$

注：由插值多项式的惟一性，$f(x)$ 关于 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 的拉格朗日插值多项式及牛顿插值多项式是同一多项式，只是表达形式不同而已。

7. 埃尔米特(Hermite)插值

如果在给定的节点处，不但要求插值多项式的函数值与被插函数值相同，同时还要求在节点处插值多项式的一阶直至指定阶的导数值也与被插函数相应阶的导数值相同，这类插值称为埃尔米特插值，或称为密切插值(osculating polynomial)。

插值条件：

$$\frac{d^kH(x_i)}{dx^k}=\frac{d^kf(x_i)}{dx^k},\quad i=0,1,\cdots,n;\quad k=0,1,\cdots,m_i \tag{1.7}$$

在插值条件(1.7)式中，当 $m_i=0$ 时，即为拉格朗日插值；当 $m_i=1$ 时的埃尔米特插值，也称二重埃尔米特插值。

设 $f(x)$ 具有一阶连续导数，给定 $n+1$ 个插值点的函数值和导数值 $(x_i,f(x_i),f'(x_i))(i=0,1,\cdots,n)$；若有至多为 $2n+1$ 次的多项式函数 $H_{2n+1}(x)$ 满足

$$H_{2n+1}(x_i)=f(x_i),\quad H'_{2n+1}(x_i)=f'(x_i),\quad i=0,1,\cdots,n$$

则称 $H_{2n+1}(x)$ 为 $f(x)$关于节点 $x_i(i=0,1,\cdots,n)$的埃尔米特的插值多项式,或称 $H_{2n+1}(x)$为 $f(x)$的二重密切插值;$x_i(i=0,1,\cdots,n)$为二重插值节点,于是前面的拉格朗日插值和牛顿插值形式可称为单重节点插值,而更一般的埃尔米特插值,不同节点的重数可以不同。例如,在 1.2 节例 1.15 中,a 为三重节点,b 为一重节点。

下面是插值条件(1.7)式中 $n=1$ 和 $m_i=1$ 的埃尔米特插值多项式。

给定 $f(x_0)=y_0,f(x_1)=y_1,f'(x_0)=m_0,f'(x_1)=m_1,x_0\neq x_1,f(x)$关于 x_0,x_1 的埃尔米特插值多项式为

$$\begin{aligned}H_3(x) &= (1-2(x-x_0)l'_0(x_0))l_0^2(x)f(x_0)+(1-2(x-x_1)l'_1(x_1))l_1^2(x)f(x_1)\\&\quad+(x-x_0)l_0^2(x)f'(x_0)+(x-x_1)l_1^2(x)f'(x_1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}H_3(x) &= \left(1-2\frac{x-x_0}{x_0-x_1}\right)\left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)^2y_0+\left(1-2\frac{x-x_1}{x_1-x_0}\right)\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)^2y_1\\&\quad+(x-x_0)\left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)^2m_0+(x-x_1)\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)^2m_1\end{aligned}\tag{1.8}$$

8. 差商型埃尔米特插值

用牛顿插值也能构造埃尔米特插值。例如,给定$(x_i,f(x_i),f'(x_i))(i=0,1,\cdots,n)$,定义序列 $z_0=x_0,z_1=x_0,z_2=x_1,z_3=x_1,\cdots,z_{2n}=x_n,z_{2n+1}=x_n$,即

$$z_{2i}=z_{2i+1}=x_i,\quad i=0,1,\cdots,n$$

令

$$f[z_{2i-1},z_{2i}]=\frac{f(z_{2i})-f(z_{2i-1})}{z_{2i}-z_{2i-1}},\quad i=1,2,\cdots,n$$

$$f[z_{2i},z_{2i+1}]=f'(x_i),\quad i=0,1,\cdots,n$$

得到差商型埃尔米特插值公式:

$$H_{2n+1}(x)=f[x_0]+\sum_{k=1}^{2n+1}f[z_0,z_1,\cdots,z_k](x-z_0)\cdots(x-z_{k-1})\tag{1.9}$$

9. 三次样条函数

给定区间$[a,b]$上 $n+1$ 个节点 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ 和这些点上的函数值 $f(x_i)=y_i(i=0,1,\cdots,n)$。若 $S(x)$满足 $S(x_i)=y_i(i=0,1,\cdots,n)$;$S(x)$在每个小区间$[x_i,x_{i+1}]$上至多是一个三次多项式;$S(x)$在$[a,b]$上有连续的二阶导数,则称 $S(x)$为 $f(x)$关于剖分 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ 的三次样条插值函数,称 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 为样条节点。

10. *M* 关系式

给定插值点$(x_i,f(x_i))(i=0,1,\cdots,n;x_i$ 互不相同),并设 $S''(x_i)=M_i(i=0,1,\cdots,n)$。利用在节点 x_i 的函数值、一阶导数和二阶导数的连续性得到关于 M_i 的 M 关系式:

$$\mu_iM_{i-1}+2M_i+\lambda_iM_{i+1}=d_i,\quad i=1,2,\cdots,n-1\tag{1.10}$$

其中：

$$f(x_i)=y_i$$
$$h_i=x_{i+1}-x_i$$
$$\lambda_i=\frac{h_i}{h_i+h_{i-1}}$$
$$\mu_i=1-\lambda_i$$
$$d_i=\frac{6}{h_i+h_{i-1}}\left(\frac{y_{i+1}-y_i}{h_i}-\frac{y_i-y_{i-1}}{h_{i-1}}\right)=6f[x_{i-1},x_i,x_{i+1}]$$

附加两个边界条件，解出方程组(1.10)，得到样条函数表达式：

$$S(x)=\frac{(x_{i+1}-x)^3M_i+(x-x_i)^3M_{i+1}}{6h_i}+\frac{(x_{i+1}-x)y_i+(x-x_i)y_{i+1}}{h_i}$$
$$-\frac{h_i}{6}[(x_{i+1}-x)M_i+(x-x_i)M_{i+1}] \tag{1.11}$$
$$x\in[x_i,x_{i+1}],\quad i=1,2,\cdots,n$$

11. *m* 关系式

给定插值点$(x_i,f(x_i))$$(i=0,1,\cdots,n;x_i$互不相同)，并设$S'(x_i)=m_i$$(i=0,1,\cdots,n)$。利用在节点$x_i$的函数值、一阶导数和二阶导数的连续性得到关于$m_i$的$m$关系式：

$$\lambda_i m_{i-1}+2m_i+\mu_i m_{i+1}=c_i,\quad i=1,2,\cdots,n-1 \tag{1.12}$$

其中：

$$f(x_i)=y_i$$
$$h_i=x_{i+1}-x_i$$
$$\lambda_i=\frac{h_i}{h_i+h_{i-1}}$$
$$\mu_i=1-\lambda_i$$
$$c_i=3(\lambda_i f[x_{i-1},x_i]+\mu_i f[x_i,x_{i+1}])$$

附加两个边界条件，解出方程组(1.12)，由埃尔米特插值多项式(1.8)得到样条函数表达式：

$$S(x)=\left(1-2\frac{x-x_i}{x_i-x_{i+1}}\right)\left(\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}\right)^2 y_i+(x-x_i)\left(\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}\right)^2 m_i$$
$$+\left(1-2\frac{x-x_{i+1}}{x_{i+1}-x_i}\right)\left(\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\right)^2 y_{i+1}+(x-x_{i+1})\left(\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\right)^2 m_{i+1}$$
$$x\in[x_i,x_{i+1}],\quad i=1,2,\cdots,n \tag{1.13}$$

1.2 例题汇集

例 1.1 插值函数作为被插函数的逼近，可以用作函数值的近似计算。

已知$\sqrt[3]{27}=3$,$\sqrt[3]{64}=4$,$\sqrt[3]{125}=5$,构造二次拉格朗日插值多项式。

(1) 计算$\sqrt[3]{100}$;

(2) 估计误差并与实际误差相比较。

解 (1) 以插值点(27,3),(64,4),(125,5)代入插值公式(1.1),得

$$\begin{aligned}L(x)&=l_0(x)f(x_0)+l_1(x)f(x_1)+l_2(x)f(x_2)\\&=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}f(x_0)+\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}f(x_1)\\&\quad+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}f(x_2)\\&=\frac{(x-64)(x-125)}{(27-64)(27-125)}\times 3+\frac{(x-27)(x-125)}{(64-27)(64-125)}\times 4\\&\quad+\frac{(x-27)(x-64)}{(125-27)(125-64)}\times 5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ \sqrt[3]{100}&\approx L(100)\\&=\frac{(100-64)(100-125)}{(27-64)(27-125)}\times 3+\frac{(100-27)(100-125)}{(64-27)(64-125)}\times 4\\&\quad+\frac{(100-27)(100-64)}{(125-27)(125-64)}\times 5\\&=4.68782\end{aligned}$$

(2)由误差公式有

$$R(x)=\frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}(x-27)(x-64)(x-125)$$

记 $f(x)=\sqrt[3]{x}$,$f^{(3)}(x)=\frac{10}{27}x^{-\frac{8}{3}}$, $f^{(3)}(x)$在[27,125]上是单调递减函数。

$$|f^{(3)}(x)|\leqslant f^{(3)}(27)\approx 5.64503\times 10^{-5}$$

$$\therefore |R(100)|\leqslant\left|\frac{f^{(3)}(\xi)}{6}(100-27)(100-64)(100-125)\right|\approx 0.618131$$

实际误差:$|\sqrt[3]{100}-L(100)|=0.04623$

例 1.2 用插值点(2,4),(3,9),(5,25)分别构造拉格朗日插值函数和牛顿插值函数,并计算 $L(3.5)$和 $N(3.5)$。

解 (1) 以插值点(2,4),(3,9),(5,25)代入插值公式(1.1),得

$$\begin{aligned}L(x)&=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}f(x_0)+\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}f(x_1)\\&\quad+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}f(x_2)\\&=\frac{(x-3)(x-5)}{(2-3)(2-5)}\times 4+\frac{(x-2)(x-5)}{(3-2)(3-5)}\times 9+\frac{(x-2)(x-3)}{(5-2)(5-3)}\times 25\end{aligned}$$

$$L(x)=\frac{4}{3}(x-3)(x-5)-\frac{9}{2}(x-2)(x-5)+\frac{25}{6}(x-2)(x-3)$$

$\therefore L(3.5) = 12.25$

(2) 作出插值点(2,4),(3,9),(5,25)的差商表:

i	x_i	$f[x_i]$	$f[x_{i-1},x_i]$	$f[x_{i-2},x_{i-1},x_i]$
0	2	4		
1	3	9	$(9-4)/(3-2)=5$	
2	5	25	$(25-9)/(5-3)=8$	$(8-5)/(5-2)=1$

$$\begin{aligned} N(x) &= f[x_0] + f[x_0,x_1](x-x_0) + f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1) \\ &= 4 + 5(x-2) + (x-2)(x-3) \end{aligned}$$

$\therefore N(3.5) = 12.25$

例 1.3* 对 $y(x)=e^x$ 在[0,1]上构造线性插值、二次插值,并计算 $y(x)$ 与插值函数的误差平方模。

解 以(0,1)和(1,e)为型值点的线性插值多项式:

$$L_1(x) = \frac{x-1}{0-1}1 + \frac{x-0}{1-0}e = 1 + (e-1)x$$

$$R_1(x) = \int_0^1 (e^x - L_1(x))^2 dx = 0.0238467$$

以(0,1),$\left(\frac{1}{2},e^{\frac{1}{2}}\right)$和(1,$e$)构造二次插值多项式:

$$\begin{aligned} L_2(x) &= \frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)}{\left(0-\frac{1}{2}\right)(0-1)}\cdot 1 + \frac{(x-0)(x-1)}{\left(\frac{1}{2}-0\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)}e^{\frac{1}{2}} + \frac{(x-0)\left(x-\frac{1}{2}\right)}{(1-0)\left(1-\frac{1}{2}\right)}e \\ &= (2-4\sqrt{e}+2e)x^2 + (-3+4\sqrt{e}-e)x + 1 \end{aligned}$$

$$R_2(x) = \int_0^1 (e^x - L_2(x))^2 dx = 0.0000934121$$

见图 1.1 和图 1.2。

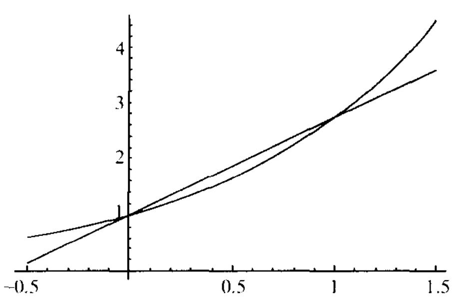


图 1.1 e^x 和 $L_1(x)$

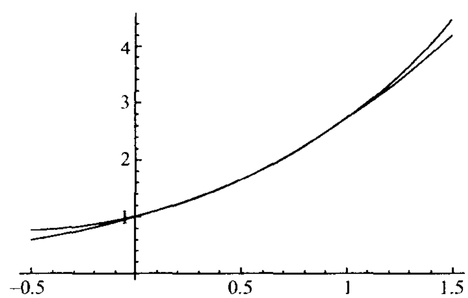


图 1.2 e^x 和 $L_2(x)$

请读者完成以下练习：

(1)分别计算 $L_1(x)$和 $L_2(x)$的误差界；

(2)分别计算在[0,0.5],[0.5,1]区间 e^x 与$L_1(x)$,$L_2(x)$的误差平方模。

例 1.4 设 $f(x)=x^2-2x+1.2$,x_i 和$f(x_i)$取值如下：

x_i	-1	-0.5	0	0.5	1
$f(x_i)$	4.2	2.45	1.2	0.45	0.2

分别构造 $L_2(x)$,$L_3(x)$,$L_4(x)$,并比较结果。

解 以(−1,4.2),(0,1.2)和(1,0.2)为 插值点,则

$$L_2(x)=\frac{(x-0)(x-1)}{(-1-0)(-1-1)}\times 4.2+\frac{[x-(-1)](x-1)}{[0-(-1)](0-1)}\times 1.2$$
$$+\frac{[x-(-1)](x-0)}{[1-(-1)](1-0)}\times 0.2$$
$$=x^2-2x+1.2$$

以(−1,4.2),(−0.5,2.45),(0,1.2)和(1,0.2)为插值点,则

$$L_3(x)=x^2-2x+1.2$$

以(−1,4.2),(−0.5,2.45),(0,1.2),(0.5,0.45)和(1,0.2)为插值点,则

$$L_4(x)=x^2-2x+1.2$$

$\because$ $f^{(3)}(x)\equiv 0$,

$\therefore$ $R_n(x)\equiv 0, n\geqslant 2$， 有 $f(x)\equiv L_n(x), n\geqslant 2$。

请体会(1.1)式 n 次拉格朗日插值多项式的定义“给定$(x_i,f(x_i))(i=0,1,\cdots,n;x_i$互不相同),构造次数至多为 n 的插值多项式$L_n(x)$”中 “至多” 两个字的含意。

例 1.5 设 $f(x)\in C^2[a,b]$,由$(a,f(a))$和$(b,f(b))$构造的插值函数为 $L_1(x)$,则有

$$|R_1(x)|=|f(x)-L_1(x)|\leqslant\frac{1}{8}(b-a)^2M_2$$

其中 $M_2=\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f''(x)|$。

证

$$R_1(x)=f(x)-L_1(x)=\frac{f''(\xi)}{2}(x-a)(x-b)$$

令

$$g(x)=(x-a)(x-b)$$

$$g'(x)=x-b+x-a=2x-(b+a),\quad g'\left(\frac{a+b}{2}\right)=0$$

$$x=\frac{a+b}{2}\text{ 是}|g(x)|\text{ 的极大值点}$$

$$
\begin{aligned}
|R_1(x)| &= \frac{|f''(\xi)|}{2}|(x-a)(x-b)| \\
&\leqslant \frac{M_2}{2}\left|\left(\frac{a+b}{2}-a\right)\left(\frac{a+b}{2}-b\right)\right| \\
&= \frac{1}{8}(b-a)^2 M_2
\end{aligned}
$$

即

$$
|R_1(x)| \leqslant \frac{M_2}{8}(b-a)^2
$$

例 1.6 设 $f(x) \in C^2[a,b]$，且 $f(a)=f(b)=0$,证明:

$$
|f(x)| \leqslant \frac{1}{8}(b-a)^2 M_2,\ a \leqslant x \leqslant b
$$

其中 $M_2 = \max\limits_{a \leqslant x \leqslant b} |f''(x)|$。

证 做$(a,f(a))$，$(b,f(b))$的线性插值函数,显然有 $L_1(x)=0$。又

$$
\begin{aligned}
f(x) &= L_1(x) + R_1(x) \\
&= \frac{x-b}{a-b}f(a) + \frac{x-a}{b-a}f(b) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x-a)(x-b) \\
&= \frac{f''(\xi)}{2}(x-a)(x-b)
\end{aligned}
$$

由例 1.5 有

$$
|f(x)| \leqslant \frac{1}{8}(b-a)^2 M_2
$$

例 1.7 给出函数表:

x_i	1.05	1.10	1.15	1.20
$f(x_i)$	2.13	2.20	2.17	2.32

构造分段线性插值函数,计算 $f(1.065)$的近似值。

解

$$
p(x) = g_i(x) = \frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}f(x_i) + \frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}f(x_{i+1}),\quad x \in [x_i, x_{i+1}]
$$

$\because$ $1.065 \in [1.05, 1.10]$

$$
g_0(x) = \frac{x-1.10}{1.05-1.10} \times 2.13 + \frac{x-1.05}{1.10-1.05} \times 2.20
$$

$\therefore$ $f(1.065) \approx p(1.065) = g_0(1.065) = 2.151$

例 1.8 已知等距插值点 x_0, x_1, x_2,证明:二次插值多项式的误差界为

$$
|R_2(x)| \leqslant \frac{\sqrt{3}}{27}h^3 \max_{x_0 \leqslant x \leqslant x_2} |f^{(3)}(x)|
$$

其中 $h=x_2-x_1=x_1-x_0$。

证 设 $L_2(x)$是由插值点$(x_i,f(x_i))(i=0,1,2)$构造的插值多项式,由插值误差的定义:

$$R_2(x)=f(x)-L_2(x)=\frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

令 $x=x_0+th$, $0\leqslant t\leqslant 2$,则 $x_i=x_0+ih$, $i=0,1,2$。

$$\begin{aligned}|R_2(x)|&\leqslant\frac{1}{3!}\max_{x_0\leqslant x\leqslant x_2}|f^{(3)}(x)||(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)|\\&=\frac{h^3}{3!}\max_{x_0\leqslant x\leqslant x_2}|f^{(3)}(x)||t(t-1)(t-2)|\\&\leqslant\frac{h^3}{3!}\max_{x_0\leqslant x\leqslant x_2}|f^{(3)}(x)|\max_{0\leqslant t\leqslant 2}|t(t-1)(t-2)|\end{aligned}\qquad(*)$$

计算 $g(t)=t(t-1)(t-2)$在 $t\in[0,2]$的极大值:

$$g'(t)=3t^2-6t+2,\ t_1=1-\frac{1}{\sqrt{3}}\quad t_2=1+\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$g(0)=0,\ g(t_1)=\frac{2\sqrt{3}}{9},\ g(t_2)=-\frac{2\sqrt{3}}{9},\ g(2)=0$$

得

$$\max_{0\leqslant t\leqslant 2}|g(t)|=\frac{2\sqrt{3}}{9}$$

代入$(*)$式,得

$$|R_2(x)|\leqslant\frac{\sqrt{3}}{27}h^3\max_{x_0\leqslant x\leqslant x_2}|f^{(3)}(x)|$$

例 1.9 设 $f[x,x_0,x_1,\cdots,x_k]$是 x 的 m 次多项式,证明:$f[x,x_0,\cdots,x_k,x_{k+1}]$是 x 的 $m-1$ 次多项式。

证

$$F(x)=f[x,x_0,\cdots,x_k,x_{k+1}]=\frac{f[x,x_0,\cdots,x_k]-f[x_0,x_1,\cdots,x_{k+1}]}{x-x_{k+1}}$$

$$(x-x_{k+1})f[x,x_0,\cdots,x_k,x_{k+1}]=f[x,x_0,\cdots,x_k]-f[x_0,x_1,\cdots,x_k,x_{k+1}]$$

当 $x=x_{k+1}$时, $f[x,x_0,\cdots,x_k]-f[x_0,\cdots,x_k,x_{k+1}]=0$。即等式右端分子有 $x-x_{k+1}$因式,故 $F(x)=f[x,x_0,\cdots,x_k,x_{k+1}]$为 x 的 $m-1$ 次多项式。

请读者思考:若 $f(x)$是 n 次多项式,则 $f[x,x_0,\cdots,x_n]$是几次多项式?它的值等于多少?

例 1.10 设 $f(x)=x^5-3x^3+x-1$,计算差商:

$$f[3^0,3^1],f[3^0,3^1,\cdots,3^5],f[3^0,3^1,\cdots,3^6]$$

解

$$f[3^0,3^1]=\frac{f[3]-f[1]}{3-1}=83$$

$$f^{(5)}(x)=5!$$

$$f^{(6)}(x)=0$$

$$f[3^0,3^1,\cdots,3^5]=\frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}=1$$

$$f[3^0,3^1,\cdots,3^6]=\frac{f^{(6)}(\xi)}{6!}=0$$

例 1.11 设 $f(x)\in C^1[a,b]$，$x_0\in(a,b)$，定义 $f[x_0,x_0]=\lim\limits_{x\to x_0}f[x,x_0]$。证明：

$$f[x_0,x_0]=f'(x_0)$$

证 由微分中值定理，有

$$f[x,x_0]=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0+\theta(x-x_0)),\quad 0<\theta<1$$

$$\therefore f[x_0,x_0]=\lim_{x\to x_0}f[x,x_0]=\lim_{x\to x_0}f'(x_0+\theta(x-x_0))=f'(x_0)$$

点评：该结论应用在差商计算中，解决了含有给定函数值和导数值组合的差商计算，即用牛顿插值方法构造埃尔米特插值多项式。

例 1.12 给定 $f(x_0)$，$f(x_1)$，$f'(x_0)$，构造满足上述插值条件的二次插值多项式 $H(x)$。

解 方法 1，设 $H(x)=c_0+c_1(x-x_0)+c_2(x-x_0)^2$。

由 $H(x_0)=f(x_0)$，得

$$c_0=f(x_0)$$

由 $H'(x_0)=f'(x_0)$，得

$$c_1=f'(x_0)$$

由 $H(x_1)=f(x_1)$，$H(x_1)=f(x_0)+(x_1-x_0)f'(x_0)+c_2(x_1-x_0)^2=f(x_1)$，得

$$c_2=\frac{f(x_1)-f(x_0)-(x_1-x_0)f'(x_0)}{(x_1-x_0)^2}$$

$$\therefore H(x)=f(x_0)+(x-x_0)f'(x_0)+\frac{f(x_1)-f(x_0)-(x_1-x_0)f'(x_0)}{(x_1-x_0)^2}(x-x_0)^2$$

方法 2，构造差商型埃尔米特插值函数 $H(x)$：

i	z_i	$f(z_i)$	$f[z_{i-1},z_i]$	$f[z_{i-2},z_{i-1},z_i]$
0	$z_0=x_0$	$f(z_0)$		
1	$z_1=x_0$	$f(z_1)$	$f'(x_0)$	
2	$z_2=x_1$	$f(z_2)$	$f[x_0,x_1]$	$\dfrac{f[x_0,x_1]-f'(x_0)}{x_1-x_0}$