平板分析中的有限单元体法

浙江大学《新技术译丛》编译组

平板分析中的有限单元体法

（译文集）

浙江大学工科力学、固体力学教研组
《新技术译丛》编译组编译

1973年

平板分析中的有限单元体法
浙江大学工科力学、固体力学教研组
《新技术译丛》编译组编译
*
浙江大学《新技术译丛》编译组出版
杭州市新华书店发行
浙江嘉兴印刷厂印刷
*
定价：0.55元　　（只限国内发行）

内 容 简 介

本译文集选择了国外最近有关有限单元体法平板分析中应用的几篇文章。板的类型有薄板、厚板和多层板，所用的单元体形状有三角形和长方形。分析的问题有小挠度、大挠度、热应力和振动等。

本书可供科研机关、大专院校、设计单位、工矿企业的有关人员参考。

前　　言

有限单元体法是近十年来新发展起来的一种工程设计方法，它的特点是把结构或复杂的连续介质（本译文集中为弹性板）分割成有限个单元体，然后应用矩阵和变分法等数学工具在经典力学理论基础上建立起有限单元体法的一整套公式，最后依赖电子计算机完成大量复杂的数值计算。

为了有助于有限单元体法在国内推广运用，我们遵照伟大领袖毛主席"洋为中用"的教导，选择了国外最近有关这方面的七篇文章，着重介绍平板分析中的有限单元体法应用，以供有关人员参考。

由于我们思想水平和业务水平不高，在内容取舍及译文质量上难免存在不少问题和缺点，希读者批评指正。

目　　录

有限单元体法中的对偶定理……………………………………（1）
用三角形单元体分析板的弯曲问题…………………………（22）
平面应力矩形板热弹性问题的有限单元体解法…………（47）
用于分析平板振动的矩形有限单元体……………………（70）
用有限单元体法分析 Reissner 板的弯曲………………（87）
大挠度平板的有限单元体分析法 …………………………（110）
多层夹板的有限单元体法 …………………………………（139）

有限单元体法中的对偶定理

导　论

应用有限单元体法分析板和壳体结构，一般将涉及到结构物所划分成的许多三角形或长方形单元体的刚度矩阵的应用，以及单元体顶点或节点位移的确定。关于板的拉伸问题曾有所报导，利用三角形单元体并把单元体的位移写成直角坐标的线性函数而得到满意的结果。但是对于板的弯曲问题要得到同样满意的结果，似乎遇到了一些困难〔见参考文献（2），112页〕[1,3,12]。

与位移法相比，力法（将应力或者应力函数作为未知量）只是很少受到或者还未曾受到注意。基于将应力场离散化并应用余能驻值理论的应力法在参考文献〔4〕中作了介绍——对于板的弯曲问题的混合法[9]亦已发表——但应力函数尚未被明显地用于建立有限单元体法的公式。然而鉴于板的拉伸问题和板的弯曲问题之间存在着对偶性，所以如果把位移用应力函数来代替，一个板的拉伸问题的刚度法便可转述成板的弯曲问题的柔度法。同样，如果把板的挠度解释为艾雷应力函数，那么板的弯曲问题的刚度法也可以用来求解板的拉伸问题。

本文提出了应力函数在有限单元体法中的应用，文内有拉伸－弯曲的对偶性和用一种数学方法同时求解板的拉伸问题和弯曲问题的应用。由于这一对偶性，用应力函数分析板的弯曲问题而导出的有限单元体法，与分析板的拉伸问题成对

偶的位移法具有同样的性质和特征。特别是利用三角形单元体和片状线性应力函数于弯曲问题，便导出了与拉伸问题中成对偶的位移法一样圆满的有限单元体法。后述方法的精确性是受过考验的〔2〕,且是单调收敛的（参考文献〔4〕,193页），它对每一个节点包含二个方程式，而板的弯曲的位移法中每个节点要用三个方程式。

用位移表示的拉伸问题的变分公式

考察一块在面荷载分量 P_x，P_y 和边界荷载分量 N_{nx}，N_{ny}作用下保持平衡的板（图1）。应力合成量表示为 N_{xx}，N_{xy}，N_{yx}及N_{yy}，应变的线性分量表示为ε_{xx}，ε_{xy}，ε_{yx}及ε_{yy}，它们可以用位移分量u和v通过下列关系表示出来

$$\varepsilon_{xx}=u_{,x} \tag{1a}$$

$$\varepsilon_{yy}=v_{,y} \tag{1b}$$

$$\varepsilon_{xy}=\varepsilon_{yx}=\frac{1}{2}(u_{,y}+v_{,x}) \tag{1c}$$

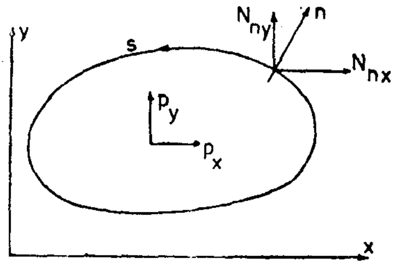

图1　面荷载和边界荷载分量

考虑一块线性弹性的正交异性板，它的坐标平面作为弹性和热对称平面，并且应变能密度函数具有形式

$$W = \frac{E_x E_y h}{2(1-\nu_x\nu_y)}\left(\frac{\varepsilon_{xx}^2}{E_y}+\frac{\varepsilon_{yy}^2}{E_x}+\left(\frac{\nu_x}{E_y}+\frac{\nu_x}{E_x}\right)\varepsilon_{xx}\ \varepsilon_{yy}\right)$$

$$+\frac{1}{2}Gh\ \varepsilon_{xy}^2+N_x^0\ \varepsilon_{xx}+N_y^0\ \varepsilon_{yy}\ * \qquad (2)$$

式中 E_x 和 E_y——杨氏模量，G——剪切模量，ν_x 和 ν_y——泊松比，并有关系式 $\nu_y\ E_y=\nu_x\ E_x$，又 N_x^0 和 N_y^0 为初热应力合成量。

令 $P = -p_x u \ - p_y v \qquad (3)$

及 $B = -N_{nx}\ u - N_{ny} v \qquad (4)$

式中 N_{nx} 和 N_{ny} 在边界上假定是指定的。板的位能有如下形式

$$\Pi = \iint (W+P)\ dA + \oint Bds \qquad (5)$$

位移分量适合变分方程

$$\delta\Pi = 0 \qquad (6)$$

用应力函数表示的弯曲问题的变分公式

与前面成对偶的板，其弯曲问题的变分公式是通过余能的驻值定理得到的。形式为

$$\delta\Pi' = 0 \qquad (7)$$

式中 $\Pi' = \iint W' dA + \oint B' ds \qquad (8)$

$$W' = \frac{6}{h^3}\left\{\frac{M_{xx}^2}{E_x}+\frac{M_{yy}^2}{E_x}-\left(\frac{\nu_y}{E_x}+\frac{\nu_x}{E_y}\right)M_{xx}M_{yy}\right.$$

$$\left.+\frac{M_{xy}^2}{G}\right\}+\chi_x{}^0 M_{xx}+\chi^0{}_y M_{yy} \qquad (9)$$

---

* 式（2）右边 $Gh\ \varepsilon xy^2$ 项前的系数应为1/2，原文为 2，似有误——译注

$$B' = -M_{nx}\ w_{,y} + M_{ny}\ w_{,x} - Q_n w \tag{10}$$

在方程式(9)中，M_{xx}，M_{yy}和M_{xy}是应力力偶，χ_x^0和χ_y^0是热曲率。在方程式(10)中，M_{nx}和M_{ny}——在边界上应力力偶矢量的直角坐标分量，Q_n——横向剪力，w——挠度，假定它在边界上是指定的，并且在垂直于边界方向的导数$w_{,n}$也是指定的。

在方程式(9)、(10)中的应力力偶和横向剪力必须适合下列平衡方程

$$M_{xx,x} + M_{yx,y} - Q_x = 0 \tag{11a}$$

$$M_{xy,x} + M_{yy,y} - Q_y = 0 \tag{11b}$$

$$Q_{x,x} + Q_{y,y} + q = 0 \tag{11c}$$

方程式(11)的通解可以用一个特解（用上标p表示）和用二个应力函数U和V表示的齐次方程组的通解的叠加得到。结果是

$$M_{xx} = M_{xx}^p + V_{,y} \tag{12a}$$

$$M_{yy} = M_{yy}^p + U_{,x} \tag{12b}$$

$$M_{xy} = M_{xy}^p - \tfrac{1}{2}(U_{,y} + V_{,x}) \tag{12c}$$

$$Q_x = Q_x^p + \Omega_{z,y} \tag{12d}$$

$$Q_y = Q_y^p - \Omega_{z,x} \tag{12e}$$

式中 $\Omega_z = \frac{1}{2}(V_{,x} - U_{,y})$ (12f)

为简单起见，我们将假定

$$M_{xy}^p = 0 \tag{13}$$

于是特解的应力力偶和横向剪力将出现平行于坐标轴的二簇片条。荷载q在二簇片条之间可以任意地分配，并且片条的端部条件是任意的。

用下式可以方便地定义K_x和K_y

$$M_{xx}^{p}=-D_x(K_y+\nu_x K_x) \tag{14a}$$

$$M_{yy}^{p}=-D_y(K_x+\nu_y K_y) \tag{14b}$$

利用上列关系式用应力函数表示 Π'，再对面积分应用格林定理，在边界积分用分部积分法，并去掉不变项，汛函

$$\Pi''=\iint(W''+P'')\,dA+\oint B''ds \tag{15}$$

式中 $$W''=\frac{6}{h^3}\left\{\frac{V_{,y}{}^2}{E_x}+\frac{U_{,x}{}^2}{E_y}-\left(\frac{\nu_y}{E_x}+\frac{\nu_x}{E_y}\right)U_{,x}V_{,y}+\frac{(U_{,y}+V_{,x})^2}{4G}\right\}+\chi_x{}^0V_{,y}+\chi_y{}^0U_{,x} \tag{16a}$$ *

$$P''=K_{xx}U+K_{yy}V \tag{16b}$$

$$B''=(w_{,ys}-Y_{,s}K_x)U+(-w_{,xs}+x_{,s}K_y)V \tag{16c}$$ **

应力函数U和V适合变分方程

$$\delta\Pi''=0 \tag{17}$$

以上弯曲问题的公式是拉伸问题的对偶式。由一个问题转换成另一问题的对应量汇总于表1，其中M_{xx}^*，M_{yy}^*，和$M_{xy}^*=M_{xy}$是以应力函数得来的部分应力力偶。χ_{xx}^*，χ_{yy}^*和$\chi_{xy}^*=\chi_{xy}$各项可用，应力－应变关系式用M_{xx}^*，M_{yy}^*和M_{xy}来定义。它们与应变曲率χ_{xx}，χ_{yy}和χ_{xy}的关系由下式联系

$$\chi_{xx}=-w_{,xx}=\chi_{xx}^*-K_y \tag{18a}$$

$$\chi_{yy}=-w_{,yy}=\chi_{yy}^*-K_x \tag{18b}$$

$$\chi_{xy}=-w_{,xy}=\chi_{xy}^* \tag{18c}$$

在表1中出现的下标s和n分别与边界的切向和法向相联系。特别有

* 原文左边为W，右边系数分母中多一E，有误，已改——译注

** 原文右边第一项为W，有误，已改——译注

$$X_{sx}^* = -w_{,xs} + x_{,s}K_y \tag{19a}$$

$$X_{sy}^* = -w_{,ys} + y_{,s}K_x \tag{19b}$$

并且按照克希霍夫的意义，Q_{ne}^* 是在自由边界上由应力函数所产生的有效横向应力。其余的符号都在附录 I（符号表）内有所说明。

表 1　拉伸－弯曲的对偶性

拉　伸　问　题	弯　曲　问　题
u, v	U, V
p_x, p_y	K_{xx}, K_{yy}
ε_{xx}, ε_{xy}, ε_{yy}	M_{yy}^*, $-M_{xy}^*$, M_{xx}^*
ε_{nn}, ε_{ns} ε_{ss}	M_{ss}^*, $-M_{ns}^*$, M_{nn}^*
N_{xx}, N_{xy}, N_{yy}	$-\chi_{yy}^*$, χ_{xy}^*, $-\chi_{xx}^*$
N_{nx}, N_{ny}	$-\chi_{sy}^*$, χ_{sx}^*
$\omega_z = \frac{1}{2}(v_{,x} - u_{,y})$	$\Omega_z = \frac{1}{2}(V_{,x} - U_{,y})$
$\chi_{yz} = \omega_{z,y} = \varepsilon_{yy,x} - \varepsilon_{xy,y}$	$Q_x^* = \Omega_{z,y} = M_{xx,x}^* + M_{yx,y}^*$
$\chi = (\omega_z - \varepsilon_{sn})_{,s}$	$Q_{ne}^* = (\Omega_z + M_{ns}^*)_{,s}$
N_x^0, N_y^0	$-\chi_y^0$, χ_x^0
E_xh, E_yh, Gh	$-D_y^{-1}$, $-D_x^{-1}$, $-\left(\frac{Gh^3}{3}\right)^{-1}$
ν_x, ν_y	$-\nu_x$, $-\nu_y$

三角形单元板的拉伸和弯曲

兹把方程式（6）应用到 x 和 y 的线性函数 u和 v 的三角形单元板的拉伸问题概述如下。根据表 1 的对应关系，可将这些结果直接用于对偶的弯曲问题。

直接运用三角形的三个节点 i 的 u，v值 u_i 和 v_i，推导就很容易以三角形坐标显示形式来完成。Π 具有形式

$$\Pi=\frac{E_xE_yh}{8A(1-\nu_x\nu_y)}\left\{\frac{(b_iu_i)^2}{E_y}+\frac{(a_iv_i)^2}{E_x}-\left(\frac{\nu_x}{E_y}+\frac{\nu_y}{E_x}\right)b_ia_ju_iv_j\right\}$$
$$+\frac{Gh}{A}(a_iu_i-b_iv_i)^2-(P_{xi}+R_{xi}+\theta_{xi})u_i-(P_{yi}+R_{yi}$$
$$+\theta_{yi})v_i \qquad (20)$$

式中 i 标记图 2 内所示三角形上注有数目的三个节点和三条边；a_i 和 b_i 为 i 边 矢量的分量；带重复下标的表式表示对所给下标的三个可能值之总和。对于 u_i 和 v_i 为线性的项代表面荷载、边界荷载和初热应力在Π中所引起的项。它们的系数称为广义节点力，可按以下各式计算

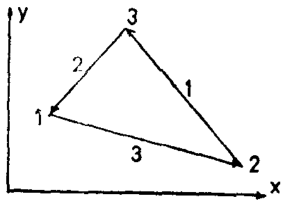

图 2　三角形单元体中节点和边的数目

$$P\alpha_i=\iint p\alpha\ \xi_i\ dA \qquad \alpha=x,\ y \qquad (21a)$$

$$R\alpha_i=\int_0^{l_j}N_n\alpha\ \xi_i\ ds_j \quad 对\ j\ 总和 \qquad (21b)$$

$$Q_{xi}=\frac{b_i}{2A}\iint N_x^0\ dA \qquad (21c)$$

$$\theta_{yi}=-\frac{a_i}{2A}\iint N_y^0\ dA \qquad (21d)$$

式中 ξ_i 是联系到边 i 的三角形坐标，在方程式（21b）中，

s_j — 弧长，l_j —边 j 的长度。

对于每一个节点 k ，变分方程 $\delta\Pi = 0$ 产生二个方程式 $\frac{\partial \Pi}{\partial u_k} = 0$ 和 $\frac{\partial \Pi}{\partial v_k} = 0$ ；或明显地写成

$$\frac{h}{4A(1-\nu_x\nu_y)}\left\{\left[E_x b_k b_i + G(1-\nu_x\nu_y) a_k a_i\right] u_i - \left[E_x \nu_x b_k a_i + G(1-\nu_x\nu_y) a_k b_i\right] v_i\right\} = P_{xk} + R_{xk} + \theta_{xk} \qquad (22a)$$

$$\frac{h}{4A(1-\nu_x\nu_y)}\left\{-\left[E_y \nu_y a_k b_i + G(1-\nu_x\nu_y) b_k a_i\right] u_i + \left[E_y a_k a_i + G(1-\nu_x\nu_y) b_k b_i\right] v_i\right\} = P_{yk} + R_{yk} + \theta_{yk} \qquad (22b)$$

对方程式(22)应用拉伸－弯曲对偶性，就得到弯曲问题的方程式

$$\frac{3}{Ah^3}\left\{\left(\frac{b_k b_i}{E_y} + \frac{a_k a_i}{4G}\right) U_i + \left(\frac{\nu_x b_k a_i}{E_y} - \frac{a_k b_i}{4G}\right) V_i\right\} = -P_{xk}' - R_{xk}'^* - \theta_{xk}' \qquad (23a)$$

$$\frac{3}{Ah^3}\left\{\left(\frac{\nu_y a_k b_i}{E_x} - \frac{b_k a_i}{4G}\right) U_i + \left(\frac{a_k a_i}{E_x} + \frac{b_k b_i}{4G}\right) V_i\right\} = -P_{yk}' - R_{yk}'^* - \theta_{yk}' \qquad (23b)$$

式中 P_{xk}'，P_{yk}'，$R_{xk}'^*$，$R_{yk}'^*$，θ_{xk}'和 θ_{yk}' 分别是 P_{xk}，P_{yk}，R_{xk}，R_{yk}，θ_{xk} 和 θ_{yk} 的对偶，并可由方程式(21)的对偶方程来表示。看来把方程式(23)的右边各项称之为广义节点转动是适宜的。

对于任意形状和边界条件的板的应用

在一块被划分成许多三角形单元体的板上，每一个节点 k 可以叠加象方程式(22)或(23)那样的一对方程式而得到二

个方程。每一个围绕节点 k 的单元体提供这样的一对方程式。一般说来，R_{xk} 和 R_{yk} 是未知的，但是由于它们是作用在具有一条公共边的两个单元体上方向相反的边界荷载所引起的，它们在内部节点上各自叠加为零。在边界节点上，这些叠加的结果决定于两条边界线上的荷载。对于弯曲问题，类似的叙述也是成立的。

应用拉伸-弯曲对偶性于边界条件时〔6〕，发现有比这二个问题的每一个通常考虑的更为广泛的边界条件。例如，与拉伸问题的应力边界条件成对偶的是曲率边界条件，它和位移条件的不同在于它们包含边界曲线的任意刚体位移。同样，弯曲问题中应力边界条件对偶性则指定了拉伸应变及边界曲线的平面内曲率变化条件。

对于多连通板的弯曲，如果作用于边界的力，除去由于特解产生的以外，不能自成平衡，那么应力函数将是多值的。这种问题的对偶包括板的位差（dislocation）问题〔6，10〕

弹性和边梁边界问题条件可以在方程式(5)、(8)中通过适当的函数 B和 B′ 来处理。论文〔6〕中求得这二类条件是对偶的，有关处理边界条件的更详细的介绍请参阅文献〔6〕。

特解的确定

在求解包含面荷载的弯曲问题时，必须确定平衡方程的特解。某些场合下，基本微分方程的正确解不适合所讨论问题边界条件，这在不久的将来就会知晓。若取这样的解答作为特解，那么弯曲问题便能转换为仅有边界荷载的齐次问题。当这样做无法实现或不实用时，特解只要求适合平衡方程，并可随各人方便去确定它。但是，可以预料到，特解越

是接近板的实际情况，有限单元体法的解答就越精确。如果要使弯曲分析完全自动化，则特解可通过应用每一节点包含一个未知数的有限单元体法来确定。例如令

$$M_{xy}^{p}=0 \tag{24a}$$

$$M_{xx}^{p}=M_{yy}^{p}=M \tag{24b}$$

M必须适合平衡微分方程式

$$\Delta M+q=0 \tag{25}$$

式中Δ是拉普拉斯算符。

方程式（25）的变分式具有下列形式

$$\delta\iint\left\{\frac{1}{2}\left[(M,_{x})^{2}+(M,_{y})^{2}\right]-qM\right\}dA=0 \tag{26}$$

方程式（26）可以应用在边界上指定M值的任意辅助条件。

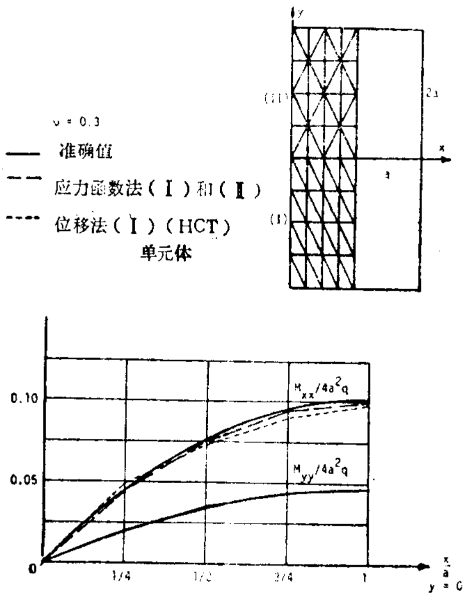

图3 均布荷载q，简支板

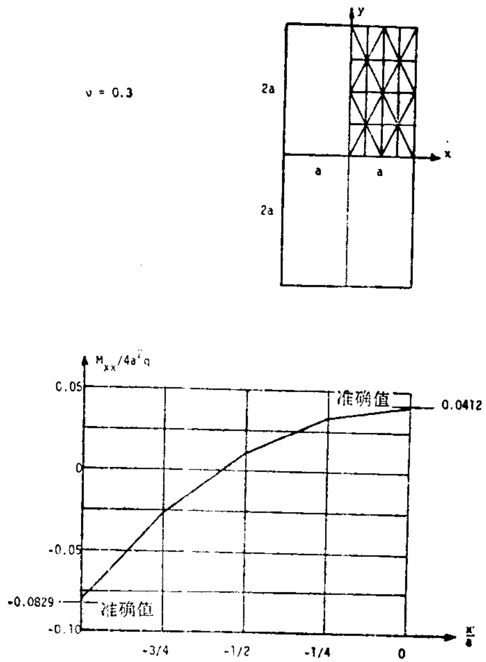

图4　均布荷载 q，夹持板

运用M的片状线性函数，一个三角形单元体在节点 k 对方程所提供的项有如下形式

$$\frac{1}{8A}(a_k a_i + b_k b_i)M_i - Q_k \tag{27}$$

式中 i 是哑标，M_i 是节点 i 处的未知量，及

$$Q_k = \iint q\,\xi_k\,dA \tag{28}$$

节点k 的最后方程式是把在该节点相会的各单元体所提供的项叠加起来得到的。