教育部高职高专规划教材
Jiaoyubu Gaozhi Gaozhuan Guihua Jiaocai

经济应用数学——线性代数与线性规划

齐　毅　主编
熊章绪　姜兴武　副主编

高等教育出版社

714

教育部高职高专规划教材

经济应用数学——

线性代数与线性规划

齐 毅 主 编
熊章绪 姜兴武 副主编

高等教育出版社

图书在版编目（CIP）数据

经济应用数学——线性代数与线性规划/齐毅主编．熊章绪，姜兴武副主编．—北京：高等教育出版社，2002.8

ISBN 7-04-010651-5

Ⅰ．经… Ⅱ．①齐…②熊…③姜… Ⅲ．①线性代数②线性规划 Ⅳ．F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2002）第 018592 号

经济应用数学——线性代数与线性规划
齐毅 主编

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社　　址	北京市东城区沙滩后街 55 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100009	网　　址	http://www.hep.edu.cn
传　　真	010-64014048		http://www.hep.com.cn

经　　销	新华书店北京发行所
印　　刷	北京宝旺印务有限公司

开　　本	850×1168　1/32	版　　次	2002 年 8 月第 1 版
印　　张	7	印　　次	2002 年 8 月第 1 次印刷
字　　数	170 000	定　　价	9.20 元

内容提要

本书是教育部高职高专规划教材的《经济应用数学》的线性代数与线性规划部分．其内容包括行列式、矩阵、向量、线性方程组、线性方程组的应用、线性规划问题的数学模型及解的性质、单纯形法、对偶线性规划问题、数学实验等．本书讲述的是线性代数和线性规划中的一些基本概念、必需的理论和主要方法，列举了大量的实例，旨在培养学生解决实际问题的能力．第九章介绍了用 Mathematica 软件包解线性代数与线性规划(数学实验)问题，帮助学生进行实际运算，以适应科技发展的需要．对于初学者可根据实际情况逐渐增加数学实验内容，以取得更好的学习效果．

本书可作为经济、管理类专业高职高专学生的教材，也可作为经济、管理类自学考试的学生及经济工作者的参考书．

出版说明

教材建设工作是整个高职高专教育教学工作中的重要组成部分．改革开放以来，在各级教育行政部门、学校和有关出版社的共同努力下，各地已出版了一批高职高专教育教材．但从整体上看，具有高职高专教育特色的教材极其匮乏，不少院校尚在借用本科或中专教材，教材建设仍落后于高职高专教育的发展需要．为此，1999年教育部组织制定了《高职高专教育基础课程教学基本要求》（以下简称《基本要求》）和《高职高专教育专业人才培养目标及规格》（以下简称《培养规格》），通过推荐、招标及遴选，组织了一批学术水平高、教学经验丰富、实践能力强的教师，成立了“教育部高职高专规划教材”编写队伍，并在有关出版社的积极配合下，推出一批“教育部高职高专规划教材”．

“教育部高职高专规划教材”计划出版500种，用5年左右时间完成．出版后的教材将覆盖高职高专教育的基础课程和主干专业课程．计划先用2～3年的时间，在继承原有高职、高专和成人高等学校教材建设成果的基础上，充分汲取近几年来各类学校在探索培养技术应用性专门人才方面取得的成功经验，解决好新形势下高职高专教育教材的有无问题；然后再用2～3年的时间，在《新世纪高职高专教育人才培养模式和教学内容体系改革与建设项目计划》立项研究的基础上，通过研究、改革和建设，推出一大批教育部高职高专教育教材，从而形成优化配套的高职高专教育教材体系．

“教育部高职高专规划教材”是按照《基本要求》和《培养规格》的要求，充分汲取高职、高专和成人高等学校在探索培养

技术应用性专门人才方面取得的成功经验和教学成果编写而成的，适用于高等职业学校、高等专科学校、成人高校及本科院校举办的二级职业技术学院和民办高校使用.

教育部高等教育司

2000年4月3日

前　言

本书是根据教育部制定的《高职高专教育经济数学基础课程教学基本要求》，结合经管类专科(高职)院校的实际情况编写成的．适用于经管类专业高职高专学生使用．

在教材的编写上，我们力求突出高职高专教育的特色，突出适应性、实用性、针对性、通俗性．理论知识以必需、够用为度，尽量减少超出基本要求的理论证明或繁琐的运算论证，有的定理采取叙而不证，以举例说明为主，不求理论全、深，而注重理论联系实际，解决实际问题．教材尽量贴近学生实际水平，通俗易懂，比较系统地训练学生的思维，适应高职高专学生未来发展的需要．同时在本书的最后一章增添了数学实验内容，便于学生上机演练，借助计算机解决数据庞大的应用问题．

本书由齐毅教授任主编，熊章绪副教授、姜兴武副教授任副主编．第1、2、3章由姜兴武、第4、5、9章由齐毅、第6、7、8章由熊章绪编写，最后由齐毅、姜兴武作了些修改并定稿．在该书编写过程中，我们得到了吉林大学数学科学学院副院长、博士生导师李辉来教授、吕显锐教授的大力协助，得到了吉林商业高等专科学校数学教研室老师的热情帮助，在此，我们一并表示衷心感谢．

由于时间仓促，书中不妥之处在所难免，恳请读者和使用本教材的老师批评指正．

编　者

2001年6月

目　录

第一章　行　列　式

在线性代数中，行列式是一个基本工具，讨论很多问题都要用到它，本章在简单的复习初等代数学过的二、三阶行列式定义的基础上，引入 n 阶行列式定义，并讨论它的性质和计算方法，给出求解一类非齐次线性方程组的克拉默(Cramer)法则．

1.1　n 阶行列式的定义及性质

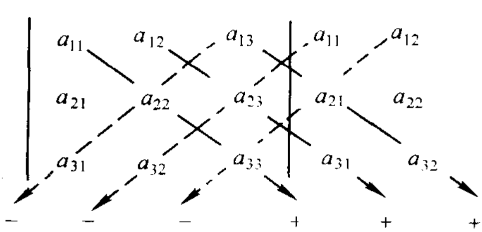
一、二、三阶行列式

在中学数学里，我们已经学过计算二阶和三阶行列式的对角线法则，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \tag{1.1}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}. \tag{1.2}$$

(1.2) 式中的六项是按下面(1.3)式所示的方法得到的．



(1.3)

在实线上三个元素的乘积取“+”号，在虚线上三个元素的乘积取“-”号，然后加起来就是三阶行列式的值.

但是，对于 n 阶行列式（$n>3$），不能如(1.3)式那样定义．因为如果像(1.3)式那样定义 n 阶行列式，当 $n>3$ 时，它将与二、三阶行列式没有统一的运算性质，因此，对一般的 n 阶行列式要用另外的方法来定义.

我们从二、三阶行列式的展开式中，发现它们遵循着一个共同的规律——可以按第一行展开，由(1.2)式得，

$$
\begin{aligned}
D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})+a_{12}(a_{23}a_{31}-a_{21}a_{33})+ \\
&\quad a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31}) \\
&= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \\
&\quad a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\
&= a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}. \qquad (1.4)
\end{aligned}
$$

其中

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32};$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{23}a_{31}-a_{21}a_{33};$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}=a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31}.$$

同样，由(1.1)式得

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}, \qquad (1.5)$$

其中　$A_{11}=(-1)^{1+1}|a_{22}|=a_{22}$，$A_{12}=(-1)^{1+2}|a_{21}|=-a_{21}$.

这里 $|a_{22}|$，$|a_{21}|$ 是一阶行列式(不是表示数的绝对值)，我们把

a 的一阶行列式$|a|$定义为 a.

如果把(1.4)、(1.5)两式作为三阶、二阶行列式的定义，那么这种定义的方法是统一的，它们都是利用低阶行列式定义高一阶的行列式. 因此，人们很自然地会想到，用这种递归的方法来定义一般的 n 阶行列式.

二、n 阶行列式的定义

由二阶、三阶行列式的定义方法，我们给出 n 阶行列式的递归法定义.

定义 1.1 由 n^2 个元素 a_{ij} $(i,j=1,2,\cdots,n)$排成 n 行 n 列，记为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \tag{1.6}$$

称为一个 n 阶行列式. 它代表一个由确定的运算关系所得的数：

$$D=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}=\sum_{j=1}^{n}a_{1j}A_{1j}. \tag{1.7}$$

其中 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$称为 a_{ij}的**代数余子式**，M_{ij}为由 D 中划去元素 a_{ij}所在的第 i 行和第 j 列元素后，余下的元素构成的 $n-1$ 阶行列式，即

$$M_{ij}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为元素 a_{ij}的**余子式** $(i,j=1,2,\cdots,n)$.

在(1.6)式中，a_{11}，a_{22}，$\cdots$，a_{nn}所在的对角线称为行列式

的**主对角线**，另一条对角线称为行列式的**副对角线**.

由定义可见，行列式这个算式是由其 n^2 个元素 a_{ij}（$i,j=1,2,\cdots,n$）中不同行、不同列的 n 个元素的乘积构成的和式(称作**展开式**)，二阶行列式的展开式中只有 2! 项，三阶行列式的展开式中共有 3! 项，n 阶行列式的展开式中共有 n! 项；在 n 阶行列式的展开式中，每一项都是位于不同行不同列的 n 个元素的乘积；在全部 n! 项中，带正号的项和带负号的项各占一半(以上结论可根据定义用数学归纳法证明).

例 1 计算行列式

(1) $D=\begin{vmatrix}2 & -1\\ 3 & 4\end{vmatrix}$；　　(2) $D=\begin{vmatrix}1 & -4 & 2\\ 3 & 0 & -3\\ -2 & 4 & 5\end{vmatrix}$.

解 (1) $D=\begin{vmatrix}2 & -1\\ 3 & 4\end{vmatrix}=2\times4-(-1)\times3=11.$

(2)
$$\begin{aligned}D&=\begin{vmatrix}1 & -4 & 2\\ 3 & 0 & -3\\ -2 & 4 & 5\end{vmatrix}\\ &=1\times0\times5+(-4)\times(-3)\times(-2)+2\times3\times4-\\ &\quad(-2)\times0\times2-(-3)\times4\times1-3\times(-4)\times5\\ &=72.\end{aligned}$$

例 2 证明 n 阶下三角行列式（当 $i<j$ 时，$a_{ij}=0$，即主对角线以上元素全为 0）

$$D_n=\begin{vmatrix}a_{11} & 0 & \cdots & 0\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdot\cdots\cdot a_{nn}.$$

证明 对 n 作数学归纳法，当 $n=2$ 时，结果显然成立. 假设结论对 $n-1$ 阶下三角行列式成立，则由定义得

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

右端行列式是 $n-1$ 阶下三角行列式. 根据归纳假设得

$$D_n = a_{11}(a_{22}a_{33}\cdot\cdots\cdot a_{nn}).$$

同理可证，n 阶对角行列式(主对角线以外的元素全为0)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdot\cdots\cdot a_{nn}.$$

三、n 阶行列式的性质

直接用行列式的定义计算行列式，在一般情况下是较繁的，下面我们给出行列式的一些性质，以简化行列式的计算.

设有一个 n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

如果把 D 的行变为相应的列，就得到一个新的行列式，记为 D^{T},

$$D^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

称为 D 的**转置行列式**.

可以证明，行列式有如下性质：

性质1 行列式与它的转置行列式相等.

该性质表明在行列式中行与列所处的地位相同，因此，凡是对

行成立的命题对列也成立.

性质 2 交换行列式的任意两行(列)，行列式仅改变符号.

按行列式的定义式(1.7)，似乎第一行处于一种特殊地位，而性质 2 告诉我们：只要适当调整符号，任何一行均能换至第一行的位置，说明第一行并不特殊．一般地，有如下性质：

性质 3 行列式等于任意一行(列)的所有元素与其对应的代数余子式的乘积之和．即

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik} \quad (i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n),$$

或

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj} \quad (j = 1,\ 2,\ \cdots,\ n).$$

简言之，行列式可以按任意一行(列)展开.

性质 4 行列式任一行(列)的元素与另一行(列)的对应元素的代数余子式的乘积之和等于零．即

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = 0,\ \text{或}\ \sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj} = 0 \quad (i \neq j,\ i,\ j = 1,\ 2,\ \cdots,\ n).$$

性质 5 把行列式的任意一行(列)的各元素同乘以数 k，等于该行列式乘以数 k.

性质 6 用常数 k 乘行列式某一行(列)的各元素，然后再加到另一行(列)的对应元素上，行列式的值不变.

性质 7 若行列式的某一行(列)都是两数之和，即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} + b_{i1} & a_{i2} + b_{i2} & \cdots & a_{in} + b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则 D 等于下列两个行列式之和：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

对于二、三阶行列式的情况，上述性质和下面的推论很容易直接验证.

推论 若行列式满足下列三个条件之一，则该行列式的值为零.

(1) 行列式有两行(列)对应元素相同;

(2) 行列式有两行(列)对应元素成比例;

(3) 行列式有一行(列)的元素全为零.

1.2 n 阶行列式的计算

根据行列式的定义，利用行列式的性质，下面通过举例来说明计算 n 阶行列式的方法.

例 1 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}.$$

解 利用行列式的性质 3，把行列式某一行(列)的元素化为只剩一个非零元素，然后按这一行(列)展开，从而计算降阶行列式.

$$D\xlongequal[③+④]{③\times(-2)+①}\begin{vmatrix} 5 & 1 & -1 & 1 \\ -11 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & -5 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{按第 3 行展开}}(-1)^{3+3}\times 1\times\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -11 & 1 & -1 \\ -5 & -5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{①+②}(-5)\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -6 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{按第 3 列展开}]{}(-5)\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -6 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=(-5)\times(-6-2)=40.$$

注 行变换写在"="的上面，列变换写在"="下面.

例 2 计算上三角行列式（$i>j$ 时，$a_{ij}=0$）.

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

解

$$D\xlongequal[\text{按第 1 列展开}]{}a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{按第 1 列展开}]{}a_{11}\cdot a_{22}\begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} & \cdots & a_{3n} \\ 0 & a_{44} & \cdots & a_{4n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\cdots=a_{11}a_{22}\cdot\cdots\cdot a_{nn}.$$

利用上、下三角行列式的计算结果，在计算行列式时，可以用行列式的性质把行列式先化为上(或下)三角行列式.

例 3 计算行列式