考研必备(2002年版)

数学

全真模拟经典400题

【经济类】

主编 中国人民大学 袁荫棠
清 华 大 学 李永乐
北 京 大 学 范培华

国家行政学院出版社

303

U13-44

129

考研必备(2002年版)

数学全真模拟经典400题

(经济类)

主　编　中国人民大学　袁荫棠
　　　　清　华　大　学　李永乐
　　　　北　京　大　学　范培华
编　者　(以姓氏笔画为序)
　　　　北　京　大　学　刘西垣
　　　　清　华　大　学　李永乐
　　　　北　京　大　学　范培华
　　　　中国人民大学　袁荫棠
　　　　天津财经学院　鹿立江
　　　　东北财经大学　龚兆仁

国家行政学院出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学全真模拟经典400题:经济类/袁荫棠,李永乐,范培华主编. -北京:国家行政学院出版社,2000.1
(考研必备)
ISBN 7-80140-175-1

Ⅰ.数… Ⅱ.①袁… ②李… ③范… Ⅲ.高等数学-研究生-入学考试-试题 Ⅳ.013-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2001)第044470号

考研必备(2002年版)

数学全真模拟经典400题

[经济类]

袁荫棠 李永乐 范培华 主编

*

国家行政学院出版社出版发行
北京市海淀区长春桥路6号
邮政编码:100089
发行部电话:68920615 68929949
新华书店经销
北京市朝阳印刷厂印刷

*

787×1092 1/16开本 18.75印张 380千字
2001年7月第1版 2001年7月第1次印刷
ISBN 7-80140-175-1/O·14 定价:25.00元

前　　言

本书是《2002年考研数学复习全书》(经济类)的姊妹篇。为了使考研同学更好地提高数学水平,检查第一阶段对数学基本概念、公式、定理及运算法则的复习效果,查漏补缺,提高应战能力,积累临场经验,作者深入研究了近年来考研命题规律及特点,分析了历年考研试题的考点分布及难易程度,并结合作者多年来数学阅卷以及全国各大城市"考研班"辅导的经验,编写了这本实战训练题集——《2002年考研数学全真模拟经典400题》(经济类)。

本书特点:

1. 每题均全新优化设计,且试题涵盖大纲所有考查知识点

2001年考研数学试卷三与试卷四共有40道题,其中填空题与选择题20道题,解答题与证明题20道题。为使考研同学考前多一些查漏补缺的机会,多见一些新题型,多一些针对性,考试中多一份把握,我们特优化设计或改编了20套共400道模拟试题,这20套共400道题构思新颖、方法灵活;在内容设计上,每道题均涉及两个以上知识点,有些综合题甚至涉及到3个考点或更多,这些题涵盖新大纲所有考查知识点。通过这20套全新优化设计的试题训练,我们相信一定能提高您的数学的分析问题、解决问题的能力。

2. 注重归纳总结,力求一题多解

我们在设计这20套试题时,无论是填空题、选择题,还是计算题与证明题,绝大部分题都设有①分析——该题的解题步骤和解题思路、方法;②解答——该题的详细、规范解题过程;③评注——该题所考查的知识点(或命题意图)、解题思路归纳总结和延伸、常见错误和注意事项。同时,在解题过程中,力求一题多解,扩展考生的视野和思路,比较各种解题方法的特点和适用范围,从而提高考生的应试水平。

本书使用说明:

1. 本书是依据最新考试大纲为2002年考研读者全新优化设计的一本训练题集,本书中的试题难度略高于2001年考研试题,解答题与证明题体现了考试重点、难点内容,综合性比较强;填空题与选择题着重考查考生对基本概念、基本公式、基本定理的

理解和运用,适用于第二阶段复习训练之用。

2. 本书中的每道题均有较透彻的分析、详细解答、归纳总结的评注,因此希望考生在做题时,如果遇到了困难,不要急于看分析和解答,一定要多思考,只有这样才能达到本书编写的目的,才能提高应试水平,才能取得好成绩。

3. 考生在使用本书之前,应仔细研读《2002 年考研数学复习全书》(经济类),弄清《考试大纲》中要求掌握的基本概念、基本定理和基本方法,掌握《2002 年考研数学复习全书》(经济类)中所介绍的解题方法、技巧和思路.

特别提醒考生注意:为了提高同学数学分析和解决问题的能力,我们所编题目难度较大,有的题目涉及 3 个以上的考点、综合运用性比较高,概念运用性较强,如果考生在做本书试题感到棘手时,请不要着急,更不要泄气,应静下心来,仔细分析题目所考查的是哪些知识点,回忆《数学复习全书》(经济类)所介绍的解题方法,然后再动手做题。我们希望考生一定要动手做题,不要一看了事。

在本书的编写、编辑和成书过程中,由于时间紧、任务重,尽管我们认真对待和严格要求,仍难免有不尽如意的地方,诚请广大读者和同行批评指正。

来信请寄:100089 北京市海淀区长春桥路 6 号
国家行政学院出版社发行部 陶伟收
联系电话:(010)68920615, 68929949

祝愿同学复习顺利,考试成功,心想事成!

编者
2001 年 7 月

目　录

第一部分　考研数学命题规律与注意事项

一、考研数学入学考试性质及命题的基本原则

根据教育部颁布的“数学考试大纲”，考生应当明确研究生的入学考试是一种“具有选拔功能的水平考试”．这种考试既要有利于国家选拔出高层次人才，继续深造攻读硕士学位，同时，又要促进高校数学课的教学改革，教学质量的提高．

教育部考试中心制定了命题的基本原则，从中我们可以得到许多重要信息，诸如：严格按照教育部颁布的考试大纲所规定的考试内容与考试要求进行命题，试题以考查三基（基本概念、基本方法和基本原理）为主，并加强对考生的运算能力、逻辑思维能力、空间想象能力以及综合运用所学知识解决实际问题的能力的考查，…

这些法规性文件已经明确指出命题的依据是考试大纲，而不是同学在本科学习时的教学大纲或某一指定的教材，根据入学考试的性质是具有选拔功能的水平考试，同学也不难理解硕士研究生数学入学考试的要求会略高于教学要求，考试大纲与教学大纲是有差异的．因此，同学在备考阶段要认真看考试大纲，搞清考试内容与考试要求，它是指导考生复习的唯一依据．

二、数学三与数学四的试卷结构以及各类题的考查目标

1．试卷结构

近年来，试卷的总题量基本上是20道题，其中第一大题为填空题，第二大题是选择题，第三大题至第十二大题为解答题（包括证明题）．其中，填空题与选择题各由5个小题组成，每题都是3分，即客观性试题共10道题总分为30分．而解答题的形式主要是计算题，但必有综合题及应用题，主观性试题共有10道大题，总分为70分．

在数学三的试卷中，微积分的内容有10道题共50分，其中填空题与选择题各有2道，解答题（包括证明题）为6道；线性代数有5道题约25分，其中填空题与选择题分别为1道与2道，解答题2道；概率统计有5道题共25分，其中填空题2道、选择题1道、解答题2道．

在数学四的试卷中，微积分的内容有10道题，其总分与题型结构与数学三相同；线性代数有5道题约25分，其中填空题2道、选择题1道、解答题2道；概率统计亦有5道题共25分，其中填空题1道、选择题2道、解答题2道．

2．各类题的考查目标

填空题主要是考查考生在三基以及重要数学性质方面掌握的情况，从认知的角度看，这些题可分为识记、理解和简单应用三个层次，但从难度上看是以中等难度为主，同时由填空题也可了解同学在简捷、准确运算能力以及简单推理方面的情况．

选择题主要用于考查考生对数学概念、性质、方法的理解与掌握的程度，从理论上讲选择题可以考核考生在各层次上的知识和能力，但现阶段主要考查的是中低层次，了解考生在简单推理、比较以及判别能力方面的情况，同时，也可以了解考生在一些常见的概念性、方法性错误方面的情况．

解答题（包括证明题）是考研数学考试的主要题型，是对考生三基以及数学能力、水平的一个全面评估．通过解答题可考核考生对数学的基本原理、方法、公式和定理掌握及熟练运用的程度，可考查运算能力、抽象概括能力、数学建模解决实际问题的能力，而通过证明题可了解考生对数学主要原理、定理理解和掌握的程度，考查逻辑推理能力．

根据题型的考核要求，我们知道无论是填空题还是选择题，每个题涉及的知识点不会很多，计

算的复杂性不应太高(有的题可能会有简便方法),综合性也不会特别强,推理亦相对简单,这些题应当好做.但另一方面,一份试卷中安排填空题与选择题必然加大了总题量,因而也就增加了考核的知识点,扩大了考试内容的覆盖面,因此考生在备考阶段一定要全面系统的复习,不能有所偏废,要重视三基,防止眼高手低,华而不实,把基础打扎实了,考试时从填空题入手,由于题目难度适中,会有利于缓解考试时的紧张心情,开头顺了更便于发挥水平.

三、考研数学试题的特点

数学试卷中的大多数题目难易度中等,且区分度合格,一般有2至3道题较难,但对高分的考生区分能力强,一般没有“太难多数人不会做”及“太易多数人会做”的题目.并且考核知识覆盖面广.同时,考查的各个知识点分布适当,知识结构合理,较好地体现了考试大纲所规定的以考查三基为主,在此基础上加强对考生数学能力的考查的要求.

1. 重视考查三基

考试大纲明确指出考试以考基本概念、基本方法、基本原理为主,命题组也确实严格遵循考试大纲命题,但从每年阅卷的情况看,无论是填空题、选择题还是解答题中的基础题均有为数不少的考生失误,这要引起备考同学足够的重视.

【例1】 已知 $z = u^v, u = \ln\sqrt{x^2+y^2}, v = \arctan\dfrac{y}{x}$,求 $\mathrm{d}z$. (**2000年数学四试题**)

【分析】 这是一个计算复合函数全微分的基本题.只要正确运用复合函数求偏导数的公式和全微分的定义

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y},$$

$$\mathrm{d}z = \frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y.$$

就可以稳拿6分.但在实际考试中,不少考生把 z 写成 x、y 的函数,即 $z = (\ln\sqrt{x^2+y^2})^{\arctan\frac{y}{x}}$.这时 z 是一个幂指函数,对 x, y 求偏导的计算比较繁,极易出错.

类似这种类型的计算题出过多次,如1998年数学三、数学四共同考查的一个试题:设 $z = (x^2 + y^2)e^{-\arctan\frac{y}{x}}$,求 $\mathrm{d}z$ 与 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

【例2】 计算 $I = \displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{e^{1+x}+e^{3-x}}$. (**2000年数学四试题**)

【分析】 这是一个广义积分.被积函数含有 e^x,是常见的类型,解题方法很多,既可用凑微分法,也可用令 $e^x = t$ 等法换元.

【方法一】 从被积函数中提出 e^{-1},并将分子分母同乘 e^x,则有

$$I = e^{-1}\int_1^{+\infty}\frac{e^x}{e^{2x}+e^2}\mathrm{d}x = e^{-1}\cdot\frac{1}{e}\arctan\frac{e^x}{e}\Big|_1^{+\infty}$$
$$= \frac{\pi}{4}e^{-2}.$$

【方法二】 $$I = \int_1^{+\infty}\frac{e^{x-3}}{e^{2(x-1)}+1}\mathrm{d}x = e^{-2}\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}e^{x-1}}{e^{2(x-1)}+1}$$
$$= e^{-2}\arctan e^{x-1}\Big|_1^{+\infty} = \frac{\pi}{4}e^{-2}.$$

【方法三】 令 $e^x = t$, $x = \ln t, \mathrm{d}x = \dfrac{1}{t}\mathrm{d}t$,则有

$$I=\int_1^{+\infty}\frac{dx}{ee^x+e^3e^{-x}}=\int_e^{+\infty}\frac{\frac{1}{t}dt}{et+e^3\cdot\frac{1}{t}}$$

$$=\int_e^{+\infty}\frac{1}{e}\frac{dt}{t^2+e^2}=\frac{1}{e}\cdot\frac{1}{e}\arctan\frac{t}{e}\Big|_e^{+\infty}$$

$$=\frac{\pi}{4}e^{-2}.$$

考试中,考生犯了不少初等错误,如不知道 $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}$,$\arctan 1=\frac{\pi}{4}$.在用【方法二】解答此题时,得 $\arctan e^0=0$.在用【方法一】解答此题时,积分$\int\frac{e^x}{e^{2x}+e^2}dx$ 的原函数不会求等.

【例 3】 设矩阵 A,B 满足 $A^*BA=2BA-8E$,其中 $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$,$E$ 为单位矩阵,A^* 为 A 的伴随矩阵,则 $B=$ ________. (**1998 年数学三、数学四试题**)

【分析】 这是一个常见的基础题,作为矩阵方程的考核既有以解答题形式出现的大题,也有如本题这样的填空题.求解矩阵方程首要的是对矩阵方程恒等变形化简,考查的是矩阵的运算与性质,不要急于把已知数据代入矩阵方程,那会增大计算工作量,使问题复杂化.对于本题,由于方程中含有伴随矩阵 A^*,而已知条件是矩阵 A,那么如何处理 A^* 是本题的关键.

如果通过 A 先求出 A^* 再求解 B 是麻烦的,应当考虑到伴随矩阵的重要公式 $AA^*=A^*A=|A|E$,用 A 左乘矩阵方程的两端,有

$$|A|BA=2ABA-8A.$$

从已知条件知 A 是可逆矩阵,再用 A^{-1} 右乘,即有

$$|A|B=2AB-8E \qquad 或 \qquad (2A-|A|E)B=8E.$$

所以 $\qquad B=8(2A-|A|E)^{-1}$.

因为 A 是对角矩阵,易见 $|A|=-2$,那么 $(2A-|A|E)^{-1}=\frac{1}{2}(A+E)^{-1}$.

从而 $$B=4(A+E)^{-1}=4\begin{bmatrix}2&&\\&-1&\\&&2\end{bmatrix}^{-1}=4\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&&\\&-1&\\&&\frac{1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&&\\&-4&\\&&2\end{bmatrix}.$$

本题主要考查矩阵方程求解,但涉及到伴随矩阵的性质,矩阵的运算,求逆等基础知识,任一环节出差错均要影响整个题目的正确性.

【例 4】 设 A、B 是二随机事件,随机变量

$$X=\begin{cases}1, & 若 A 出现,\\-1, & 若 A 不出现,\end{cases}\qquad Y=\begin{cases}1, & 若 B 出现,\\-1, & 若 B 不出现,\end{cases}$$

试证明随机变量 X 和 Y 不相关的充分必要条件是 A 与 B 相互独立. (**2000 年数学三、数学四试题**)

【分析】 这是一道涉及随机事件相互独立性、随机变量相互独立与相关性的基本概念与求随机变量数字特征基本方法的题目.我们只要将随机变量 X 与 Y 的协方差用事件 A、B、AB 的概率表示出来,问题是很容易解决的.

$$EX=P(A)-P(\bar{A})=2P(A)-1,\qquad EY=2P(B)-1,$$

$$P\{XY=1\}=P\{X=1,Y=1\}+P\{X=-1,Y=-1\}=P(AB)+P(\bar{A}\bar{B})$$
$$=P(AB)+1-P(A+B)=2P(AB)-P(A)-P(B)+1,$$

$$EXY = 2P\{XY = 1\} - 1 = 4P(AB) - 2P(A) - 2P(B) - 1,$$
$$\mathrm{cov}(X, Y) = EXY - EXEY = 4P(AB) - 4P(A)P(B).$$
$\Rightarrow$ $\quad\mathrm{cov}(X, Y) = 0 \Leftrightarrow P(AB) = P(A)P(B)$

即 $\quad X$ 与 Y 不相关 $\Leftrightarrow$ 事件 A 与 B 独立.

有些考生在单方面证明命题充分性，即从 A 与 B 独立推证 X 与 Y 不相关时，混淆了两个随机变量独立与两个随机事件独立的概念，将事件 A 与 B 独立不加论证地等同于随机变量 X 与 Y 独立，直接由 A 与 B 独立认为就是 X 与 Y 独立，得出 X 与 Y 不相关. 正确的证法应该是从 A 与 B 独立得出 A 与 $\bar{B}$、$\bar{A}$ 与 B、$\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 均也独立. 有

$$P\{X = i, Y = j\} = P\{X = i\}P\{Y = j\}, \quad i, j = 1, -1.$$

从而才得到 X 与 Y 相互独立.

另外有些考生不能熟练运用事件运算性质与概率的性质，如 $P(A\bar{B}) = P(A) - P(AB)$，$P(\bar{A}B) = P(B) - P(AB)$，$P(\bar{A}\bar{B}) = P(\overline{A + B})$ 等，因而不能将 $\mathrm{cov}(X, Y)$ 正确整理出所需结果，这也是导致考生得分低的原因.

【例 5】 设 X_1, X_2, X_3, X_4 是来自正态总体 $N(0, 2^2)$ 的简单随机样本，令

$$X = a(X_1 - 2X_2)^2 + b(3X_3 - 4X_4)^2,$$

则当 $a =$ ________，$b =$ ________ 时，统计量 X 服从 χ^2 分布，其自由度为 ________. （1998 年数学三试题）

【分析】 χ^2、t、F 分布是数理统计中三个最基本分布. 本题考查的就是关于抽样分布中常见统计量 χ^2 分布的知识. 根据 χ^2 分布定义，若 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_m$ 相互独立且服从标准正态分布，则 $Y = Y_1^2 + Y_2^2 + \cdots + Y_m^2$ 服从自由度为 m 的 χ^2 分布. 在本题中，如果 X 服从 χ^2 分布，则自由度为 2，并且要求 $\sqrt{a}(X_1 - 2X_2)$ 与 $\sqrt{b}(3X_3 - 4X_4)$ 相互独立且均服从标准正态分布 $N(0,1)$. 由于 X_1, X_2, X_3, X_4 相互独立，因此 $\sqrt{a}(X_1 - 2X_2)$ 与 $\sqrt{b}(3X_3 - 4X_4)$ 也相互独立.

$$D[\sqrt{a}(X_1 - 2X_2)] = aD(X_1 - 2X_2) = 5aDX_1 = 20a,$$
$$D[\sqrt{b}(3X_3 - 4X_4)] = bD(3X_3 - 4X_4) = 25bDX_1 = 100b.$$

$\Rightarrow \quad a = \frac{1}{20}, b = \frac{1}{100}.$

如果考生将方差 $D[\sqrt{a}(X_1 - 2X_2)]$ 误算为 $3aDX_1 = 12a$ 或 $12\sqrt{a}$ 甚至 $(-\sqrt{a})^2 DX_1 = 4a$ 都是错误的. 这是由于利用方差基本性质计算随机变量方差的基本功不够扎实所致.

【例 6】 一生产线生产的产品成箱包装，每箱的重量是随机的. 假设每箱平均重 50 千克，标准差为 5 千克. 若用最大载重量为 5 吨的汽车承运，试利用中心极限定理说明每辆车最多可以装多少箱，才能保障不超载的概率大于 0.977.（$\Phi(2) = 0.977$，其中 $\Phi(x)$ 是标准正态分布函数.）（2001 年数学三、数四试题）

【分析】 对于文字应用题应首先赋予概率符号：假设 $X_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 是装运的第 i 箱重量（单位：千克），n 是所求箱数. 令 X 表示 n 箱总重量，由于 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立同分布，期望、方差都存在，且 n 比较大. 显然应该用列维 − 林德伯格中心极限定理求解，即 X 近似服从正态分布 $N(50n, 25n)$. 依题意，$P\{X \leqslant 5000\} > 0.977$. 即 $\Phi\left(\frac{5000 - 50n}{5\sqrt{n}}\right) > 0.977$.

再据 $\Phi(x)$ 的单调性，可知 $\frac{1000 - 10n}{\sqrt{n}} > 2$. 从而解不等式得 n 为 98.

本题是以应用题形式出现，考查用中心极限定理近似计算概率的基本题，解题中首先应正确地用随机变量描述题中相关的量，并要注意正确计算出有关的期望与方差，有些考生误认为 $\sqrt{DX}$ 是 $\sqrt{DX_i}$ 之和而得到 $\sqrt{DX} = 5n$ 是错误的. 这都属于基本概念问题，中心极限定理在数一考试大纲中

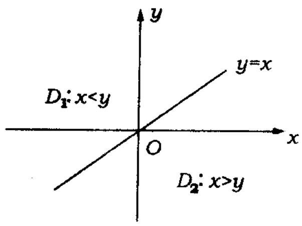
虽然仅是要求“了解”而不是“掌握”的内容,但是凡属考纲要求的内容,无论是“了解”,还是“掌握”均属考试内容,比如2001年数一考题中就有一个关于切比雪夫不等式的很简单填空题,有些考生因对属“了解”的内容复习不够,失去了本应轻松拿到的分数.

2. 试题的灵活性较强

有些试题设计的比较新颖,不落俗套,考生基本功扎实读懂题意就不难解;有的试题解法灵活,知识融会贯通的同学往往有捷径可节省出宝贵的时间.

【例7】 计算 $I = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\min\{x,y\}e^{-(x^2+y^2)}dxdy$. (1995年数学四试题,相当于现在的数学三).

【分析】 这是一道求二重广义积分题.难点是如何处理函数 $\min\{x,y\}$,若将积分区域(全平面)以 $y = x$ 分成 D_1 和 D_2 两部分(如图),则在 D_1 内,$x < y$,因此 $\min\{x,y\} = x$.在 D_2 内,$x > y$,因此 $\min\{x,y\} = y$.



从而积分
$$I = \iint\limits_{D_1} xe^{-(x^2+y^2)}dxdy + \iint\limits_{D_2} ye^{-(x^2+y^2)}dxdy$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty}e^{-y^2}dy\int_{-\infty}^{y}xe^{-x^2}dx + \int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx\int_{-\infty}^{x}ye^{-y^2}dy$$
$$= -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2y^2}dy - \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2x^2}dx$$
$$= -\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2x^2}dx.$$

对最后的积分还需要用变量替换 $x = \frac{t}{2}$,化成

$$I = -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt,\text{再用泊松积分}\quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt = 1$$

这一结果,而泊松积分在概率中应是非常熟悉的.

该题考的知识点比较多是一个综合性很强的题.同时,方法也要求掌握的灵活,在实际考试中,多数考生不知如何下手,得分率较低.

【例8】 设函数 $f(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续,且满足方程

$$f(t) = e^{4\pi t^2} + \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4t^2} f\left(\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy,$$

求 $f(t)$. (1997年数学三试题)

【分析】 等式右边含有未知函数的二重积分,为了求出 $f(t)$ 必须对等式两边求导,得到一个微分方程,再求解.为此需先对二重积分做变量替换,化二重积分为变上限的积分.二重积分 $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4t^2} f\left(\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy$ 的积分区域是以 $2t$ 为半径的园,是 t 的函数.被积函数 $f\left(\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}\right)$ 是关于 x^2+y^2 的抽象函数,可以在极坐标变换下化简该积分.

令 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$,则

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4t^2} f\left(\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy = \int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{2t}f\left(\frac{1}{2}r\right)rdr$$
$$= 2\pi\int_0^{2t}rf\left(\frac{1}{2}r\right)dr.$$

对等式两边求导,有

$$f'(t) = 8\pi t e^{4\pi t^2} + 8\pi t f(t).$$

这是一阶线性微分方程,解之可得

$$f(t) = (4\pi t^2 + C)e^{4\pi t^2}.$$

需要提醒考生注意的是,此处的 C 应通过初始条件定出来.由原方程可得 $f(0) = 1$.所以

$$f(x) = (4\pi t^2 + 1)e^{4\pi t^2}.$$

本题把利用极坐标变换计算二重积分,求变上限积分的导数,求解一阶非齐次线性微分方程等重要知识点紧密结合起来,考查了考生的综合运算能力和灵活运用各种知识的能力.

在实际考核中,考生也知道应对等式两边求导,化成微分方程再求解.但面对含有参数的二重积分束手无策,故得分率不高.反映考生对知识的灵活运用还欠缺.

【例 9】 设矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ x & 4 & y \\ -3 & -3 & 5 \end{bmatrix}$,已知 $\boldsymbol{A}$ 有三个线性无关的特征向量,$\lambda = 2$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的二重特征值.试求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 为对角形矩阵. (2000 年数学四试题)

【分析】 本题已知矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有三个线性无关的特征向量,那么 $\boldsymbol{A}$ 必可对角化.因而对于 $\lambda = 2$ 这二重特征值就必有 2 个线性无关的特征向量.从而齐次方程组 $(2\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系由 2 个向量组成,得知秩 $r(2\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}) = 1$.

经初等变换矩阵的秩不变,于是

$$2\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -x & -2 & -y \\ 3 & 3 & -3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & x-2 & -x-y \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

可推知 $x = 2, y = -2$.

为求矩阵 $\boldsymbol{P}$,下面需求出 $\boldsymbol{A}$ 的特征随及其特征向量.由于已知 $\lambda = 2$ 是二重特征值,所以可以不用特征多项式来求特征值,而是利用迹,由

$$2 + 2 + \lambda_3 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = a_{11} + a_{22} + a_{33} = 1 + 4 + 5,$$

求出 $\lambda_3 = 6$.

关于特征向量的求解请读者自己完成.作为 3 个未知数的齐次方程组求基础解系时出错的不少,请不要掉以轻心,要认真对待.

【例 10】 已知随机变量 X_1 和 X_2 的概率分布

$$X_1 \sim \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}, \quad X_2 \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

而且 $\boldsymbol{P}\{X_1X_2 = 0\} = 1$.

(1) 求 X_1 和 X_2 的联合分布;

(2) 问 X_1 和 X_2 是否独立?为什么? (1999 年数学四试题)

【分析】 对于二维离散型随机变量(X_1, X_2),已知其联合分布,求其边缘分布及判断 X_1 与 X_2 的独立性是非常容易的问题.然而若求 X_1 与 X_2 的联合分布,仅仅知道 X_1 与 X_2 各自的分布是不够的,还必须有一些附加条件才行.对于本题能否灵活运用所给的附加条件 $\boldsymbol{P}\{X_1X_2 = 0\} = 1$,首先求出 X_1 和 X_2 的联合概率分布是解题的关键,也是本题难点.由于 $\boldsymbol{P}\{X_1X_2 = 0\} = 1$,所以 $\boldsymbol{P}\{X_1X_2 \neq 0\} = 0$,即

$$\boldsymbol{P}\{X_1 = -1, X_2 = 1\} = \boldsymbol{P}\{X_1 = 1,, X_2 = 1\} = 0.$$

于是可以分析出 X_1 和 X_2 的联合分布结构如下:

$X_1 \backslash X_2$	0	1	
-1	a_1	0	1/4
0	a_3	a_2	1/2
1	a_4	0	1/4
	1/2	1/2	

再根据边缘分布性质,很容易依次求出 a_1,a_2,a_3,a_4,即 X_1 与 X_2 的联合分布为

$X_1 \backslash X_2$	0	1	
-1	1/4	0	1/4
0	0	1/2	1/2
1	1/4	0	1/4
	1/2	1/2	

从上面 X_1 与 X_2 的联合分布表容易验证 X_1 与 X_2 不独立.

本题得分率只有 0.23,主要是考生不能灵活运用条件 $\boldsymbol{P}\{X_1X_2=0\}=1$. 有些考生先误认定 X_1 与 X_2 相互独立,求联合分布为 $\boldsymbol{P}\{X_1=i,X_2=j\}=\boldsymbol{P}\{X_1=i\}\cdot\boldsymbol{P}\{Y=j\},i=-1,0,1;j=0,1$. 这是完全错误的.

【例 11】 设总体 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)(\sigma>0)$,从该总体中抽取简单随机样本 $X_1,X_2,\cdots,X_{2n}(n\geqslant 2)$,其样本均值为 $\overline{X}=\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n}X_i$,求统计量 $Y=\sum_{i=1}^{n}(X_i+X_{n+i}-2\overline{X})^2$ 的数学期望 $\boldsymbol{E}(Y)$.(2001 数学一试题)

【分析】 Y 是随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_{2n}$ 的函数. 计算随机变量函数数学期望的方法,一种是求出 Y 的分布用期望定义计算 $\boldsymbol{E}(Y)$;另一种是应用期望的性质计算,本题应采用后者.

题中 Y 的形式看来比较复杂,但它是样本的函数,在样本函数中,样本均值与样本方差的均值都有公式. 而题中的 Y 虽不是取自 X 的样本 $X_1,X_2,\cdots,X_{2n}$ 的样本均值或方差,但是 Y 是一个与样本均值 $\overline{X}$ 有关且是一个平方和的形式. 由于样本方差是总体方差的无偏估计,我们设法将 Y 变形为与某个总体的样本方差有关的样本离差平方和.

该题最简单的解法是将 $X_1+X_{n+1},X_2+X_{n+2},\cdots,X_n+X_{2n}$ 视为取自总体 $N(2\mu,2\sigma^2)$ 的一个简单随机样本. 其样本均值与样本方差分别为

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i+X_{n+i})=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{2n}X_i=2\overline{X},$$

与
$$\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i+X_{n+i}-2\overline{X})^2=\frac{Y}{n-1}.$$

依据样本方差是总体方差的无偏估计可知:$\boldsymbol{E}(\frac{Y}{n-1})=2\sigma^2$. 因此

$$\boldsymbol{E}Y=2(n-1)\sigma^2.$$

【例 12】 设随机变量 X 和 Y 的联合分布在以点 $(0,1),(1,0),(1,1)$ 为顶点的三角形区域上服从均匀分布,试求随机变量 $U=X+Y$ 的方差. (2001 年数学四试题)

【分析】 求随机变量函数的数字特征是考题中常见的. 通常方法一种是应用方差性质:$\boldsymbol{D}(X+Y)=\boldsymbol{D}X+2\mathrm{cov}(X,Y)+\boldsymbol{D}Y$. 这需要从 (X,Y) 的联合密度 $f(x,y)$ 求出 $\boldsymbol{D}X,\boldsymbol{D}Y,\boldsymbol{E}XY$,得到 $\boldsymbol{D}U$. 另一种方法是求出 $U=X+Y$ 的概率密度函数 $f(u)$,再用公式 $\boldsymbol{D}U=\boldsymbol{E}U^2-(\boldsymbol{E}U)^2$ 进行计算. 比较二者,后一种方法计算较简捷,但是求 $f(u)$ 要有一定技巧,求 $f(u)$ 的方法亦有两种,一种是应用不独立的两个随机变量之和的卷积公式 $f(u)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,u-x)\mathrm{d}x$,但是要特别注意积分

区间. 另一种是通过 U 的分布函数 $F(u)$，求出 $f(u)$. 这里需要用到“二维均匀分布的随机变量 (X, Y) 在其分布区域 G 内任一子区域上取值的概率与该子区域面积成正比”这一均匀分布的特有性质，即当 $1 \leqslant u \leqslant 2$ 时，

$$F(u) = \boldsymbol{P}\{X + Y \leqslant u\} = \frac{S_{G_1}}{S_G}.$$

其中 $G_1 = \{(x,y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1, 1 \leqslant x + y \leqslant u\}$，$S_{G_1} = \frac{1}{2} - \frac{(2-u)^2}{2}$.

$$f(u) = \begin{cases} 2(2-u), & 1 \leqslant u \leqslant 2, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

有了 U 的概率密度 $f(u)$，很容易计算出 $\boldsymbol{D}U = \frac{1}{18}$.

值得指出的是，多数考生是先求 $f(x,y)$，再求 $f_X(x)$ 与 $f_Y(y)$，然后计算 $\boldsymbol{E}X, \boldsymbol{E}Y, \boldsymbol{D}X, \boldsymbol{D}Y, \boldsymbol{E}XY$，最后求出 $\boldsymbol{D}(X+Y)$. 虽然有些考生算对了，但是不少考生在积分时出现各种错误导致最后结论的错误，由此看来选择巧妙简捷的解题方法即可节省时间，又可减少错误率.

3. 试题的综合性强

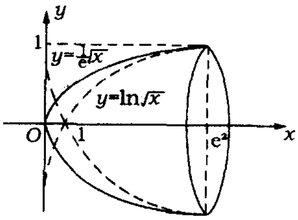
有些试题考核的知识点较多，既有把前后章节的知识综合起来考核的，又有不同学科的知识联系在一起的，这类题目要求同学要学会分析问题，抓联系抓总结.

【例 13】 已知曲线 $y = a\sqrt{x}$ $(a > 0)$ 与曲线 $y = \ln\sqrt{x}$ 在点 (x_0, y_0) 处有公共切线，求

(1) 常数 a 及切点 (x_0, y_0)；

(2) 两曲线与 x 轴围成的平面图形绕 x 轴旋转所得旋转体的体积 V_x. （1994 年数学四试题，相当于现在的数学三）

【分析】 利用 (x_0, y_0) 在两条曲线上和在点 (x_0, y_0) 处两曲线的切线斜率相等这两个条件可以列出三个方程，从而求出 a 和切点坐标 x_0，y_0. 又 (x_0, y_0) 也是两曲线的交点，从而根据旋转体的体积公式



$$V_x = \pi\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x,$$

求出 V_x（略）.

由 $\qquad y = a\sqrt{x} \quad$ 和 $\quad y = \ln\sqrt{x} = \frac{1}{2}\ln x$，

得 $\qquad y' = \frac{a}{2\sqrt{x}} \quad$ 和 $\quad y' = \frac{1}{2x}$.

又两曲线在点 (x_0, y_0) 处有公切线，故

$$\frac{a}{2\sqrt{x_0}} = \frac{1}{2x_0}, \quad \text{得} \quad x_0 = \frac{1}{a^2}.$$

将 $x_0 = \frac{1}{a^2}$ 分别代入两曲线方程，解出 $a = \frac{1}{\mathrm{e}}$，$x_0 = \mathrm{e}^2$，$y_0 = 1$.

在上面的求解过程中，不少考生目的性不明确，倒来倒去，解不出 a 和 x_0, y_0.

本题是一个综合性考题，考查了导数的几何意义，用定积分求旋转体的体积以及考查考生的运算能力. 在定积分的计算中还用到了分部积分法.

【例 14】 设函数 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{g(x) - \mathrm{e}^{-x}}{x}, & \text{若 } x \neq 0, \\ 0, & \text{若 } x = 0. \end{cases}$

其中函数 $g(x)$ 有二阶连续导数，且 $g(0) = 1, g'(0) = -1$.

(1) 求 $f'(x)$;

(2) 讨论 $f'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续性. (1996 年数学四试题)

【分析】 由于 $g(x)$ 具有二阶连续导数,所以在 $x\neq 0$ 时, $f(x)$ 也有二阶连续导数,可以直接求 $f'(x)$,且 $f'(x)$ 连续,余下的问题,就只需要求 $f'(0)$ 及讨论 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

当 $x\neq 0$ 时, $$f'(x)=\frac{xg'(x)-g(x)+(x+1)\mathrm{e}^{-x}}{x^2},$$

$x=0$ 时, $$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-\mathrm{e}^{-x}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{g'(x)+\mathrm{e}^{-x}}{2x}$$
$$\overset{*}{=}\lim_{x\to 0}\frac{g''(x)-\mathrm{e}^{-x}}{2}\overset{**}{=}\frac{g''(0)-1}{2},$$

又在 $x=0$ 处有 $$\lim_{x\to 0}f'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{g'(x)+xg''(x)-g'(x)+\mathrm{e}^{-x}-(1+x)\mathrm{e}^{-x}}{2x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{g''(x)-\mathrm{e}^{-x}}{2}\overset{**}{=}\frac{g''(0)-1}{2}$$
$$=f'(0),$$

所以 $f'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上为连续函数.

本章综合考查了连续的概念,导数定义与运算,洛必达法则等.

$(*)$ 处为题设条件,即假定 $g(x)$ 有连续二阶导数.若把条件改成 $g'(x)$ 连续, $g''(0)$ 存在,照样可以有上述结论,但 $(**)$ 式就不成立了,此时可用导数定义求 $g''(0)$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{g'(x)+\mathrm{e}^{-x}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{(g'(x)-g'(0))+(\mathrm{e}^{-x}-1)}{2x}$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{g'(x)-g'(0)}{x}+\frac{\mathrm{e}^{-x}-1}{x}\right)=\frac{1}{2}(g''(0)-1).$$

对于 $$\lim_{x\to 0}f'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{xg'(x)-g(x)+(x+1)\mathrm{e}^{-x}}{x^2}$$ 也不能再用洛必达法则,必须把 $g'(0)=-1, g(0)=1$ 配进去,再定义求 $g''(0)$. 这样试题的难度就加大了很多.

【例 15】 已知 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与三维向量 $\boldsymbol{x}$,使得向量组 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{Ax},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}$ 线性无关,且满足 $\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{x}=3\boldsymbol{Ax}-2\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}$.

(1) 记 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{Ax},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x})$,求 3 阶矩阵 $\boldsymbol{B}$,使 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{PBP}^{-1}$;

(2) 计算行列式 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|$. (2001 年数学一试题)

【分析】 本题是 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似,要通过 $\boldsymbol{P}$ 来求 $\boldsymbol{B}$. 由于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 没有具体给出,因而应从定义出发.

【解法一】 由于 $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{PB}$,即
$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{Ax},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x})=(\boldsymbol{Ax},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x},\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{x})=(\boldsymbol{Ax},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x},3\boldsymbol{Ax}-2\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x})$$
$$=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{Ax},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x})\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&3\\0&1&-2\end{bmatrix}.$$

所以 $$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&3\\0&1&-2\end{bmatrix}.$$

【解法二】 由于 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{Ax},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x})$ 可逆,那么 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{E}$.

即 $$\boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{Ax},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x})=\boldsymbol{E}.$$

所以 $$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{Ax}=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}.$$

于是 $$\begin{aligned}B &= P^{-1}AP = P^{-1}(Ax,A^2x,A^3x) = P^{-1}(Ax,A^2x,3Ax-2A^2x)\\ &= (P^{-1}Ax,P^{-1}A^2x,P^{-1}(3Ax-2A^2x))\\ &= \begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&3\\0&1&-2\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

【解法三】 由 $A^3x+2A^2x-3Ax=0$ 来求 A 的特征值与特征向量.因为

$$A(A^2x+2Ax-3x)=0=0(A^2x+2Ax-3x),$$

又由 x,Ax,A^2x 线性无关,知 $A^2x+2Ax-3x\neq 0$,故 $\lambda=0$ 是 A 的特征值,$A^2x+2Ax-3x$ 是属于 $\lambda=0$ 的特征向量.类似地

$$(A-E)(A^2x+3Ax)=0,\quad (A+3E)(A^2x-Ax)=0,$$

知 $\lambda=1$ 是 A 的特征值,特征向量是 A^2x+3Ax;$\lambda=-3$ 是 A 的特征值,A^2x-Ax 是特征向量.这样 A 有三个不同的特征值 $1,-3,0$,也就有三个线性无关的特征向量 $A^2x+3Ax,A^2x-Ax,A^2x+2Ax-3x$,那么

令 $$Q=(A^2x+3Ax,A^2x-Ax,A^2x+2Ax-3x),$$

则有 $$Q^{-1}AQ=\begin{bmatrix}1&&\\&-3&\\&&0\end{bmatrix}.$$

而 $$Q=(x,Ax,A^2x)\begin{bmatrix}0&0&-3\\3&-1&2\\1&1&1\end{bmatrix}=PC.$$

于是 $$A=Q\Lambda Q^{-1}=PC\Lambda C^{-1}P^{-1}$$

所以 $$B=P^{-1}AP=P^{-1}(PC\Lambda C^{-1}P^{-1})P=C\Lambda C^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix}0&0&-3\\3&-1&2\\1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&\\&-3&\\&&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&-3\\3&-1&2\\1&1&1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&3\\0&1&-2\end{bmatrix}.$$

【解法四】 设 $B=\begin{bmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{bmatrix}$,则由 $AP=PB$ 得

$$(Ax,A^2x,A^3x)=(x\quad Ax\quad A^2x)\begin{bmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&b_3\end{bmatrix}.$$

即 $$\begin{cases}Ax=a_1x_1+b_1Ax+c_1A^2x,\\A^2x=a_2x+b_2Ax+c_2A^2x,\\A^3x=a_3x+b_3Ax+c_3A^2x=3Ax-2A^2x\end{cases}.$$

于是 $$\begin{cases}a_1x+(b_1-1)Ax+c_1A^2x=0,\\a_2x+b_2Ax+(c_2-1)A^2x=0,\\a_3x+(b_3-3)Ax+(c_3+2)A^2x=0\end{cases}.$$

因为 x,Ax,A^2x 线性无关,故

$$a_1=0,\quad b_1=1,\quad c_1=0;$$
$$a_2=0,\quad b_2=0,\quad c_2=1;$$
$$a_3=0,\quad b_3=3,\quad c_3=-2.$$

从而求出矩阵 B.