交通系統高等院校
函授试用教材

# 高等数学

## 第三册


华东水利学院　武汉水运工程学院
大連海运学院　西安公路学院　合編



人民交通出版社

交通系統高等院校
函授试用教材

# 高等数学

## 第三册

华东水利学院　武汉水运工程学院
大連海运学院　西安公路学院　合編

人民交通出版社

全書共分三册，第三册内容包括矢量，空間解析几何，多元函数的微积分，微分方程和級数。

本書由华东水利学院等四校合編，限于編者能力，錯誤处望讀者指正。

交通系統高等院校

函授試用教材

高等数学

第三册

华东水利学院　武汉水运工程学院　大连海运学院　西安公路学院　合編

*

人民交通出版社出版

(北京安定門外和平里)

北京市書刊出版业营业許可証出字第〇〇六号

新华书店北京发行所发行　全国新华书店經售

人民交通出版社印刷厂印刷

*

1966年2月北京第一版　1966年2月北京第一次印刷

开本：850×1168 1/32　印張：5 7/16張

全書：140,000字　印数：1—4,200册

統一書号：15044·3050

定价(科三)：0.65元

# 目　录

## 第七章　空間解析几何

### 第一部分　矢量代数初步



### 第二部分　空間解析几何



## 第八章　多元函数的微积分学

### 第一部分　多元函数微分学

### 第二部分　二重积分



## 第九章　微分方程



## 第十章　函数的冪級数展开式

# 第七章　空間解析几何

空間解析几何是用代数的方法来研究空間的几何問題。

本章分为两个部分：第一部分讲矢量代数的初步知識；第二部分讲空間曲面、曲线、平面、直线的图形和它們的方程。

## 第一部分　矢量代数初步

### § 7-1　空間直角坐标系

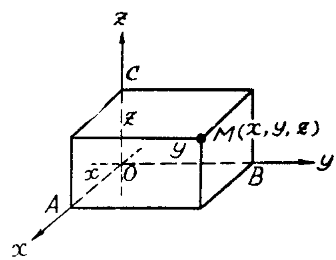


图 7-1

我們在平面解析几何中已学过平面直角坐标系，利用它可以确定平面上任意一点$M$的位置。現在，在平面直角坐标系的基础上，过原点$O$作$Oz$軸垂直于$xOy$平面，方向如图 7-1 所示，并选定$z$軸与$x$軸和$y$軸有相同的长度单位，这样就建立了**空間直角坐标系**。平面$xOy$，$yOz$和$zOx$叫做**坐标面**。

坐标系建立后，空間任意一点$M$的位置，可按以下办法确定：过点$M$作三个平面分别垂直于$x$軸、$y$軸和$z$軸，得到三个交点$A$、$B$、$C$（图7-1），它們在各軸上的坐标分别为$x$、$y$、$z$，因此点$M$就确定它的三个有次序的数$x, y, z$；反之，任意三个有次序的数$x, y, z$也就完全决定了点$M$的空間位置。这样，空間的点$M$与三个有次序的数$x, y, z$之間就建立了对应的关系。我們把与点$M$相对应的三个有次序的数$x, y, z$叫做点$M$的坐标，記作$M(x, y, z)$。并分别称$x, y, z$为点$M$的**横坐标**、**縱坐标**和**竪坐标**。

**問題** 1.在三个坐标面和三条坐标轴上的点，它們的坐标各有什么特点？

2.在和坐标面相平行的平面上的点，它們的坐标有什么特点？

当建立了坐标系，并用坐标来表示点后，就可以着手建立空間任意两点間的距离公式。

設 $M_1(x_1, y_1, z_1)$，$M_2(x_2, y_2, z_2)$ 为空間两已知点，过 $M_1$、$M_2$ 各作三个平面分别平行于坐标面，形成长方体如图 7-2 所示，从直角三角形 $M_1PM_2$ 中有

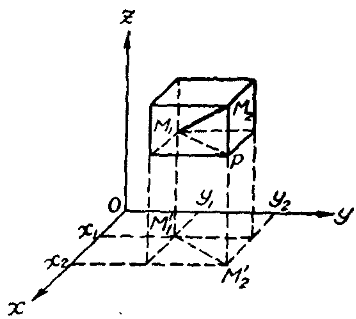


图 7-2

$$(M_1M_2)^2 = (M_1P)^2 + (PM_2)^2$$
$$= (M_1'M_2')^2 + (PM_2)^2$$

按公式(1-2)知

$$(M_1'M_2')^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

又因

$$PM_2 = z_2 - z_1$$

故有

$$M_1M_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\ 。 \qquad (7\text{-}1)$$

**习題** 1.已知点 $A$ 的坐标为 (1,1,1)，試求分别对于三个坐标平面与該点相对称的点的坐标。

2.已知三角形的頂点 $A(2,5,0)$，$B(11,3,8)$ 和 $C(5,1,12)$，試求其周长。

**答**：2. ≈31.29。

## § 7-2 矢量的基本概念

我們日常所遇到的量可分为两类：一类量仅用一个数就可把

它完全表示出来，例如质量、密度、温度等，这一类量叫做**数量——只有大小的量**。另一类量单用一个数表示还不够，还要知道它們的方向，才能完全确定下来，这一类量叫做**矢量或向量——既有大小又有方向的量**。例如海轮由某一位置朝东北方向航行了10公里到达另一位置，这个位移是矢量，因为它既有大小，又有方向。又如，只說有5公斤的力是不够的，还必須指出力的作用方向，因而力也是矢量。再如质点运动的速度、加速度等也都是矢量。

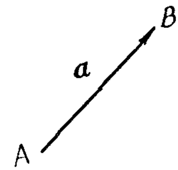

图 7-3

由此可見，矢量是从客观实际抽象出来的一种量。

为了形象地說明矢量，我們常用一个标有方向的线段来表示。线段的长度表示矢量的大小，而线段的方向表示矢量的方向（图7-3）。

若矢量的起点在$A$，終点在$B$，記这个矢量为$\overrightarrow{AB}$。为简便起見，有时也記作$\vec{a}$，$\boldsymbol{a}$。因便于印刷，书中多采用粗体字母，而书写时則采用带有箭头的字母較为方便。

矢量的大小叫做矢量的模，記为$|\overrightarrow{AB}|$或$|\boldsymbol{a}|$。模等于1的矢量称为**单位矢量**。模等于零的矢量称为**零矢量**，零矢量記为$\mathbf{0}$。

若两个矢量的模相等，但方向相反，则称它們互为**负矢量**。矢量$\boldsymbol{a}$的負矢量記为$-\boldsymbol{a}$。

若两个矢量的模相等，且方向相同，則称此两矢量**彼此相等**。因此，一个矢量经过平移后仍等于原来的矢量。

**問題** 1.試举一些矢量和数量的实例。

2.凡单位矢量都相等，对嗎？为什么？

3.零矢量有确定的方向嗎？

**矢量的和** 在中学的时候，我們就知道力的平行四边形法則：两个力$\boldsymbol{F}_1$与$\boldsymbol{F}_2$作用在同一质点上，那末它們的合力$\boldsymbol{R}$就

是以 $\boldsymbol{F}_1$ 与 $\boldsymbol{F}_2$ 为邻边所作出的平行四边形的对角线矢量（图 7-4)。这种求两个力的合力的方法叫做力的合成。在这基础上，我們来規定两矢量的和。

**定义** 如图 7-5 所示，将两个矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的起点移至 $O$，然后作出平行四边形 $OACB$，它的对角线矢量 $\boldsymbol{c}$，叫做 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和，記作 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$。

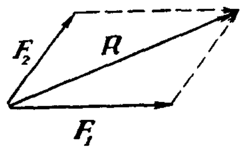

图 7-4

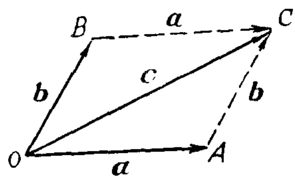

图 7-5

由图 7-5 可以看出，由于 $AC \parallel OB$，故 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$，因此，矢量 $\boldsymbol{c}$ 是由矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 所决定的三角形 $OAC$ 的第三边矢量 $\overrightarrow{OC}$。于是，两个矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和，就是将 $\boldsymbol{b}$ 的起点放在 $\boldsymbol{a}$ 的終点时，由 $\boldsymbol{a}$ 的起点到 $\boldsymbol{b}$ 的終点的矢量 $\boldsymbol{c}$。这种法則称为**三角形法則**。

矢量 $\boldsymbol{a}$ 与矢量 $\boldsymbol{b}$ 的負矢量 $-\boldsymbol{b}$ 的和，称为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差，記作 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，即

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})。$$

图 7-6 中画出了 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和及 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差的几何表示。

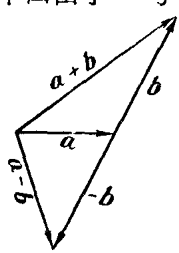

图 7-6

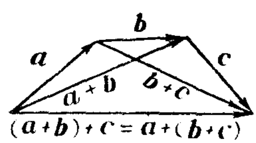

图 7-7

由矢量定义及图 7-5，图7-7 ❶ 中可以看出，下列規律是成立的：

❶ 注意图 7-7 中，$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 不一定在同一平面內。

## § 7-3 矢量的分解式

我們已讲了矢量的概念和它的和、差以及它与数量的乘积。但是这些运算規律还不能圓滿地解决許多实际問題。例如要求好几个矢量的和与差，若利用上述运算規律，有时不仅图形将变得相当复杂与难于辨认，而且也难于量测，自然不能得到正确的結果。为了解决这个矛盾，我們研究如何把上述矢量运算法則转化为数量間的运算，这样就能简单且正确地表示出运算結果。如果在空間引入直角坐标系后，象空間的点一样，矢量也可用坐标来表示，也就有可能用代数的方法来研究矢量了。

两个（或多个）矢量可以合成为一个矢量，反过来一个矢量也可以分解为两个（或多个）矢量之和，这种方法称**为矢量的分解**。物理学中有关力的研究，常常就是采用这样的办法进行的，又如前节的例子中，$\overrightarrow{OC}$ 就分解为$3\boldsymbol{i}$与$3\boldsymbol{j}$两个矢量之和。

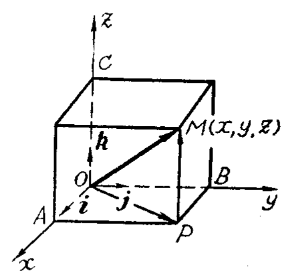


图 7-13

为确定起見，我們将矢量按三个坐标軸的方向来分解。

設在空間直角坐标系中有一任意矢量 $\boldsymbol{a}$，把 $\boldsymbol{a}$ 的起点移到原点，它的終点为$M(x,y,z)$。过$M$作三个与坐标平面平行的平面，与三个坐标平面构成一个长方体（图7-13）。根据矢量的加法，得到

$$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PM}$$

由于 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{OC}$，因而有

$$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$$

**这就是說，一个矢量被分解成沿三个坐标軸的三个分矢量之和。**

設$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$分别为与$x$軸、$y$軸、$z$軸同向的单位矢量（图

7-13)，称它們为基本单位矢量。由于点 $A$ 在 $x$ 軸上的坐标为 $x$，那末，当 $x$ 为正时，点 $A$ 在 $x$ 軸的正侧，$\overrightarrow{OA}$ 与 $\boldsymbol{i}$ 同向且 $|\overrightarrow{OA}|=x$，这时

$$\overrightarrow{OA}=|\overrightarrow{OA}|\boldsymbol{i}=x\boldsymbol{i}$$

当 $x$ 为負时，点 $A$ 在 $x$ 軸的負侧，$\overrightarrow{OA}$ 与 $-\boldsymbol{i}$ 同向且 $|\overrightarrow{OA}|=-x$，这时

$$\overrightarrow{OA}=|\overrightarrow{OA}|(-\boldsymbol{i})=(-x)(-\boldsymbol{i})=x\boldsymbol{i}$$

总之，无論在哪种情况下，都有

$$\overrightarrow{OA}=x\boldsymbol{i}$$

同样可知，$\overrightarrow{OB}=y\boldsymbol{j}$；　$\overrightarrow{OC}=z\boldsymbol{k}$。

将上述結果代入公式(1)，就得到**矢量的分解式**

$$\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k} \tag{7-3}$$

这就是說，起点在原点的矢量 $\boldsymbol{a}$ 在三个坐标軸方向的分解式中，各基本单位矢量前的系数就是 $\boldsymbol{a}$ 的終点 $M$ 的三个坐标 $x, y, z$。有时，我們也将 $x, y, z$ 称为矢量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标，并简記为

$$\overrightarrow{OM}=\{x,\ y,\ z\}$$

例如，矢量 $\overrightarrow{OM}=-2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$ 又可記为 $\overrightarrow{OM}=\{-2,\ 3,\ 1\}$。

**利用矢量的分解式，原来純用几何方法来定义的矢量运算都可以轉化为代数的运算。**例如，設 $\boldsymbol{a}=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k}$，那末

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}&=(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})+(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k})\\&=(x_1+x_2)\boldsymbol{i}+(y_1+y_2)\boldsymbol{j}+(z_1+z_2)\boldsymbol{k}。\end{aligned}$$

$$\lambda\boldsymbol{a}=\lambda(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})=(\lambda x_1)\boldsymbol{i}+(\lambda y_1)\boldsymbol{j}+(\lambda z_1)\boldsymbol{k}。$$

**例1**　已知 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$，求 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，$3\boldsymbol{a}$。

**解**　$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(2+3)\boldsymbol{i}+(-3+1)\boldsymbol{j}+(5-2)\boldsymbol{k}$

$$=5\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k},$$

$$3\boldsymbol{a}=3(2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k})=6\boldsymbol{i}-9\boldsymbol{j}+15\boldsymbol{k}。$$

請读者求出$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$。

**例 2** 由原点 $O$ 到空間点 $M$ 引矢量 $\overrightarrow{OM}$ 称为点 $M$ 的矢径，常以 $\boldsymbol{r}$ 記之，即 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}$。点$(1,4,-3)$的矢径为 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}$。

**例 3** 已知两点 $M_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$，$M_2(x_2,\ y_2,\ z_2)$，求 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的分解式。

**解** 引矢径 $\boldsymbol{r}_1$ 和 $\boldsymbol{r}_2$(图7-14)，則有

$$\boldsymbol{r}_1=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k},$$
$$\boldsymbol{r}_2=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k}。$$

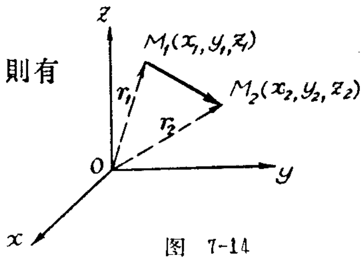

图 7-14

于是

$$\begin{aligned}\overrightarrow{M_1M_2}&=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1\\&=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k}\end{aligned}\qquad(7\text{-}4)$$

**这个例子說明，連空間两点的矢量的坐标等于終点的坐标减去起点对应的坐标。**

**习题** 已知 $A(-1,2,3)$、$B(5,-3,4)$和 $C(2,1,6)$，試写出$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{BC}$和$\overrightarrow{CA}$的分解式，并验证 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=0$。

**例 4** 試求点 $M_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$ 和 $M_2(x_2,\ y_2,\ z_2)$ 連线中点的坐标(图7-15)。

**解** 設中点 $M$ 的坐标为$(x,\ y,\ z)$，由于 $M$ 在連线$M_1M_2$上，而且 $M_1M=MM_2$，故矢量 $\overrightarrow{M_1M}$ 和 $\overrightarrow{MM_2}$ 相等，即

$$\overrightarrow{M_1M}=\overrightarrow{MM_2}。$$

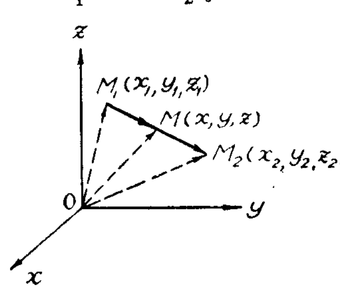

图 7-15

利用例3的結果，又有

$$\overrightarrow{M_1M}=(x-x_1)\boldsymbol{i}+(y-y_1)\boldsymbol{j}+(z-z_1)\boldsymbol{k}$$
$$\overrightarrow{MM_2}=(x_2-x)\boldsymbol{i}+(y_2-y)\boldsymbol{j}+(z_2-z)\boldsymbol{k}$$

这两个矢量相等，故它們的对应坐标应相等，即

$$x-x_1=x_2-x,\quad y-y_1=y_2-y,\quad z-z_1=z_2-z$$

解出 $x, y, z$，得到

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y=\frac{y_1+y_2}{2},\quad z=\frac{z_1+z_2}{2} \tag{7-5}$$

这就是空間两点連线的**中点坐标公式**。

## §7-4 矢量的数量积

**1.問題** 設有一力 $\boldsymbol{f}$ 作用在一物体上，物体就产生位移 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{s}$，求此力所作之功。

若作用力的方向与位移的方向相同，則所作之功等于此力的大小与位移的大小的乘积，即

$$w=|\boldsymbol{f}||\boldsymbol{s}|。$$

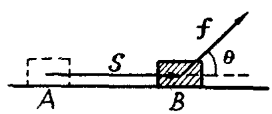

图 7-16

若作用力的方向与位移的方向有一夹角θ（图7-16），則可把此力分解成与 $\boldsymbol{s}$ 平行的分力和与 $\boldsymbol{s}$ 垂直的分力，平行分力作功，垂直分力不作功，故功为平行分力的大小与位移大小的乘积，即

$$w=|\boldsymbol{f}|\cos\theta|\boldsymbol{s}|=|\boldsymbol{f}||\boldsymbol{s}|\cos\theta。$$

解决这个問題的結果表明这样一个事实：上式右端是一个数量（就是所要求的功），这个数量是以两个矢量的模与它們間夹角余弦的乘积形式表現的，故知两个矢量（力 $\boldsymbol{f}$ 和位移 $\boldsymbol{s}$）可确定一数量。这个特点不仅是功的問題所独有，也为其他一些实际問題所具有。为此，我們給出两矢量的数量积定义如下：

**两个矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积就是这两个矢量的模与它們間的夹角❶余弦的乘积**，記作

❶ 平行移动两矢量之中任一矢量到它們的起点相重合，則此两矢量的正向所組成的在0与π之間的角叫做两矢量間的夹角。