

地震荷重

錢 培 風

建 筑 工 程 出 版 社

地 震 荷 重

錢 培 風

江苏工业学院图书馆
藏 书 章

建 筑 工 程 出 版 社

• 1958 •

內 容 提 要

本書主要介紹几个国家对地震区建筑规范中所采用的地震荷重理論，特別是苏联1956年拟定的“地震区建筑规范草案”。在叙述这些理論时所需要的一些公式，都作了比較詳細的介紹。同时还对动力系数 β 提出了一些意見和建議，另附录了苏联、德国、美国、日本、智利的地震区建筑规范中的地震荷重部分，以作参考。

地 震 荷 重

錢 培 風

*

建筑工程出版社出版(北京市阜成門外南礼士路)

(北京市書刊出版業營業許可證出字第052號)

建筑工程出版社印刷厂印刷·新华書店發行

書号343 140千字 787×1092 1/25 印張6¹⁴/₂₅

1953年8月第1版 1953年8月第1次印刷

印數11 1,650冊

*

統一書号: 15040·843

定 价: (10) 1.00元

序

我国是一个地震区較多的国家，根据历史記載，曾爆發过多次災害严重的地震。在我国偉大的社会主义建設事業中，不可避免地要在好些地震区进行各种各样的建設，因而就不能不考虑到建筑物的抗震性能問題。但要預防地震災害，不是一个簡單的問題，不仅要慎重選擇建設地区，要有縝密的設計与良好的施工，以保証建筑物具有可靠的抗震性能，达到安全的目的，同时还要从經濟方面打算，不要因此过大地增加造价，以致影响国家对基本建設的投資。因此，研究地震荷重，确实是一个很重要的問題。編写本書的目的，就是介紹几个主要地震国家对地震区建筑規範中采用的地震荷重理論，並且通过一些計算及比較，对先进的苏联規範草案中的动力系数 β 提出一些意見和对我国采用这个系数作初步的建議，以供从事实际工作的同志們参考。

介紹的这些有关地震荷重的理論，以苏联1956年拟定的“地震区建筑規範草案”中的地震荷重理論为重点。为了介紹这些理論所需要的一些公式，本書都作了簡單的介紹，以便后面用到时，可以查考。关于連續架及連續梁的动力分析，笔者建議了一个比較簡單的方法，把它列于附录六，供大家参考，並希指正。

在介紹各种理論时，尽量按照原著者的推証方法，以便于閱讀原著。

本書並把苏联、德国、美国、日本和智利的地震区建筑規範中的地震荷重部分摘出，作为附录，以便查考。

本書第二十二节内容曾由笔者在中国科学院哈尔滨土木建筑研究所抗震結構小組內进行报告，承組內同志們提出很多寶貴意見，大多已采入文內；另承尹之潛同志幫助校核，黃傳宝同志代为制圖，並此誌謝。

錢 培 風

目 录

第一章 緒 論	1
第二章 單自由度体系的振动	5
第 一 节 單自由度体系的自由振动	5
第 二 节 單自由度体系的强迫振动	13
第 三 节 能量消耗系数	18
第 四 节 <i>Е.С.Сорокин</i> 对阻尼作用的假定	19
第 五 节 用位移表达法建立振动的微分方程	21
第 六 节 不考虑阻尼作用,由基础振动所引起的單自由度体系 的振动	23
第三章 <i>К.С.Захарев</i> 教授的地震荷重理論	29
第 七 节 <i>К.С.Захарев</i> 教授的地震荷重理論	29
第四章 <i>И.И.Корчинский</i> 博士的地震荷重理論	35
第 八 节 概 論	35
第 九 节 基础按 $y_0 = a_0 e^{-\delta_0 t} \sin \theta t$ 振动时單自由度体系的 强迫振动 (考虑阻尼作用)	37
第 十 节 單自由度体系的地震荷重	46
第 十 一 节 动力系数 β	47
第 十 二 节 多自由度体系的自由振动	49
第 十 三 节 多自由度体系的强迫振动	52
第 十 四 节 基础按 $y_0 = a_0 e^{-\delta_0 t} \sin \theta t$ 振动时多自由度体系的 强迫振动 (考虑阻尼作用)	55
第 十 五 节 多自由度体系的地震荷重	57
第五章 美国加州側力联合委员会对計算地震荷重的建議	62
第 十 六 节 結構物由地震作用引起的总側力或底層剪力的決定	62
第 十 七 节 总側力沿結構物高度的分布	68

第六章 苏联规范中关于地震荷重的某些规定的说明70

第十八节 特殊考虑的动力系数70

第十九节 苏联1956年拟定的新规范草案中的动力系数 β 70

第二十节 磚石居住房屋72

第二十一节 高耸建筑73

第二十二节 对苏联1956年的新规范草案中动力系数 β 的商榷和
对我国采用 β 值的建议74

附 录

附录一 苏联1956年制订的地震区建筑规范草案中的地震荷重一章84

附录二 德国地震区建筑物设计及施工规范草案
1955年3月 (Din 4149)96

附录三 美国加州侧力规范 102

附录四 日本建筑规范中的地震荷重 107

附录五 智利现行地震区建筑规范摘录 109

附录六 无限自由度体系的振动 112

使用符号说明 157

第一章 緒 論

地震是个殘酷的自然現象，不时襲击着人类的和平幸福生活。它不特破坏力强，而且突如其来，常常在几分鐘內就使得多少房屋变成瓦礫，多少城鎮变成荒丘，多少人伤亡殘廢，多少人無家可归；至于当时大地呼嘯，房屋倒毀，塵土滿天，日月失色，禽鳥惊飞，百兽奔逃，人們倉惶失措、胆战心惊的恐怖現象，凡曾身历其境者，莫不談虎色变。

根据統計，人們能感觉到的地震，全世界每年平均約爆發五千次之多。我国是个地震区較多的国家，特别是西北和西南地区更是地震頻繁。据历史記載，地震在我国所造成的破坏和伤亡是非常严重的，特别突出的如明嘉靖34年12月12日的渭河南北大地震，死亡达八十三万人之多，1920年12月16日的甘肅大地震，死亡二十三万余人。現在党和人民政府，正在領導着全国人民进行偉大的社会主义建設，我們必須和地震的災害作斗争。因此，在地震区設計各种建筑物时，必須考虑地震的作用，並采取适当的防御措施，以減少或避免可以預防的伤亡和破坏。

地震对某一区域影响的大小，用地震烈度来表示。地震烈度的划分方法很多，在全苏标准的地震烈度表里，从極輕微的地震影响到極严重的地震影响，共分为十二度；以人們的感觉反应、器物的振动情形、建筑物的毀坏程度，以及各种自然現象等来判断地震的烈度，並且对于某一烈度地面运动水平加速度的上下界限值也作了規定。

苏联“地震区建筑规范”只規定地震烈度在七度、八度和九度的地区需要設防（包括因地質条件等提高或降低的度数），对于六度和六度以下的地区，概不考虑地震作用。如果烈度在十度或十度以上，就很难防御，而苏联十度和十度以上的地区非常少，所以在苏联，一般都不在这些地区建造各种建筑物。但在我国，因天气較暖，房屋的外牆沒有苏联的厚，技术、設備等也不相同，地震区又很多，对于在六度地区，是否需要考虑地震作用以及在十度地区是否仍可进

行建設，尙待研究。現在將六度至十度地區地震時的現象及地震加速度的值列出，以供參考（用 τ_0 表示地震時地面的水平加速度）：

六度（強）： $\tau_0=50\sim100\text{mm}/\text{sec}^2$ 人人感覺驚慌，很多人逃出戶外；槽桶中的水劇烈地動蕩，畫從牆上掉下，書從桌上掉下，陶器打破，笨重的家具移動了位置或翻倒；有些地方，小塊的灰泥從牆上掉下，結構不良的房屋，受到尙無危險性的損害。

七度（很強）： $\tau_0=100\sim250\text{mm}/\text{sec}^2$ 室內物件和家具受到很大損害；教堂里的小鐘鳴响；池塘里發生波浪，並有污泥升起，個別的情況，在多沙或石子的岸邊有些崩潰；井泉水位變化；牆壁發生裂縫，大量的灰泥塊和塑造裝飾脫落；煙囪裂縫；骨架建築的隔牆損壞。

八度（破壞）： $\tau_0=250\sim500\text{mm}/\text{sec}^2$ 樹木劇烈搖動，有時折斷；笨重的家具移動很遠或翻倒；紀念碑和塑像從基礎上扭轉或倒下；結構堅固的房屋（如教堂）遭受損壞，牆上出現裂縫或部分破壞；塔尖或工廠煙囪倒下；即使在結構很好的房屋上的煙囪，其頂部亦遭毀壞；骨架建築的隔牆倒塌；在陡坡和潮濕的地方出現小的裂縫，個別情況且冒出夾泥沙的水。

九度（毀壞）： $\tau_0=500\sim1,000\text{mm}/\text{sec}^2$ 結構堅固的房屋（如教堂）劇烈損壞；一般磚砌房屋則受嚴重的毀壞，大多數倒塌不能居住；骨架建築的基礎亦被推移；地面出現很多裂縫。

十度（毀滅）： $\tau_0=1,000\sim2,500\text{mm}/\text{sec}^2$ 大的教堂和骨架夾磚房屋連牆基一起毀壞，堅固的磚牆發生危險的裂縫；堰堤、橋梁和城牆遭受嚴重的損壞，個別情況下且遭毀壞；鐵軌彎曲；地下管道毀壞；地面和柏油馬路上出現縐紋和裂縫；在疏松而潤濕的土地上，有相當寬而深的裂隙，同時有部分塌陷；石塊從山頂上裂墜；河水波濤洶湧，衝擊河岸。

設計人員最關心的，是在各種烈度的地震作用下，結構物到底要承擔多大的附加荷重（以下簡稱地震荷重）。編寫本書的主要目的之一，就是想介紹計算地震荷重的幾種方法。但對於水壩、擋土牆等因地震作用而產生的動水壓力和動土壤壓力，則不在介紹範圍之內。

地震的發生，大都由于地層斷裂、坍陷和火山爆發等，通过震波的傳播，以达于他处。地震波的主要波長，比房屋的長度和寬度总是大得很多，研究地震对房屋的作用时，可以不考虑地面傾斜的影响。因此，在地震时，地基的运动，可以近似地当作只有水平方向的綫加速度分量和垂直方向的綫加速度分量；或是再將前者分为两个分量，而成为水平方向两个綫加速度分量和垂直方向的一个綫加速度分量。普通建筑物的振动，都是微幅振动，因此，这三个分量的影响，可以分別計算，最后疊加，以获得总的影響。

垂直方向綫加速度分量的作用，普通只会使結構物的自重和承受的重量产生垂直方向的慣性力，其影响只是垂直方向荷重的增減，而結構在承受垂直方向荷重的能力，一般都是有富余的。因此，除了極少数的例外，在所有的地震災害記錄中，建筑物的破坏，極大多数是由于水平慣性力所引起的。所以在研究地震对建筑物的作用时，都着重研究水平綫加速度的分量。

日本大森房吉教授首先提出了計算地震荷重的方法。他假定在地震时，結構物各部分的加速度，均与地面的加速度完全一致，因此，若以 Q 表示結構物某一部分的重量，則因地震使这部分重量产生的地震荷重（水平方向）当为：

$$I = \frac{Q}{g} \tau_0 \quad (1)$$

式中： τ_0 表示地震时地面的水平綫加速度；

g 表示重力加速度。

这样計算“地震荷重”是一个古老而又極簡單的方法，因为它需要結構物具有絕对的剛性，而忽視了結構物的彈性性質。这显然是不合实际的。但这个方法，从前却用得很多，有些人现在还主張采用。例如德国1955年3月制訂的“德国地震区建筑物設計及施工規範草案”中，就是建議采用这样的計算方法的。

如何正确地确定地震荷重，的确是非常困难的問題。几十年来，很多学者曾作过不少的研究，也發表了很多文章，但直到現在，仍旧存在着很多不同的見解；有些問題，还需要繼續研究。我們現在就

要在地震区进行大规模的建設，考虑地震对結構物的作用，是很重要的。但是，究竟应该如何确定地震荷重呢？目前我們几乎是完全根据苏联“地震区建筑规范”中所规定的計算方案进行計算的。的确，苏联学者在这方面的見解和方法也是比較合理而且便于应用的。

过去我国的工程人員，絕大多数沒有注意到地震对結構物的作用問題。现在由于全国正在进行大规模的工業建設，而我国地震災害如此严重，地震区又如此寬广，因而大家都迫切地希望知道一些这方面的知識。所以本書特把苏联1951年制定的“地震区建筑规范”和1956年拟定的“地震区建筑规范草案”中有关地震荷重的规定的理論根据，作一个簡單的介紹，使实际設計人員知道它的来历，在設計时，才能心中有数。

苏联1951年“地震区建筑规范”中关于地震荷重的规定，主要是根据 *К.С.Завриев* 教授的理論；1956年的，則主要是以 *И.Л.Корчинский* 博士的理論为根据，有些地方，也可能参考了美国加州側力联合委员会在1952年对地震荷重的建議。下面主要就是介紹这些理論。

第二章 單自由度体系的振动

前面說過，日本大森房吉教授曾首先提出了計算地震荷重的方法。他完全不考慮結構物的動力性能，因而很多學者都稱他的理論為靜力理論。

К.С.Заспеев 教授的理論，已經考慮了結構物的動力性能。為了介紹他的地震荷重理論，我們首先簡單地敘述一下單自由度體系振動的一些公式，以便引用。

第一节 單自由度體系的自由振動

一、自 由 度

假若一個體系上的質量，在任一瞬間的位置，用一個參變數就能表示，則這個體系就稱為單自由度的體系。同樣，如果要用幾個獨立的參變數才能表示，那就稱為幾個自由度的體系。

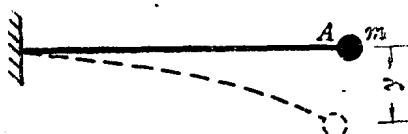


圖 1

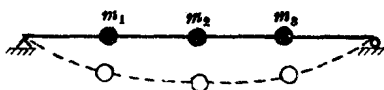


圖 2

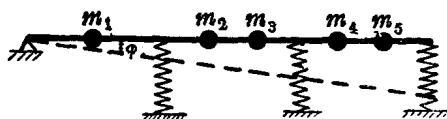


圖 3

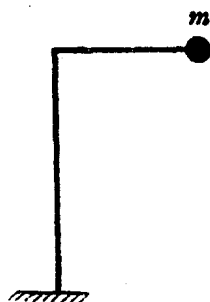


圖 4

圖 1 表示在一个沒有重量的梁上置有一个集中質量 m 。若这个梁只能在一个平面內振动（以下都假定只能在一个平面內振动），則这个体系就是單自由度的体系。这是因为在任何时候質量 m 的位置，都可用它的位移（或撓度） y 来表示。同样，如圖 2 所示的梁，一看就知道它是 3 个自由度的体系。至于圖 3，是表示在一个無限剛勁的梁上，放置着 5 个集中質量的情形。但这个体系却並不是 5 个自由度的体系，而是單自由度的体系。因为，只要一个参变数 φ ，就可以表示任何时刻这些質量的位置。如果我們用 y_1 、 y_2 、 y_3 、 y_4 、 y_5 表示这五个質量的位移，我們知道，这五个位移並不是互相独立而是呈一定比例关系的。如果左支承也是彈性支承，那就成为兩個自由度的体系。在这种情形下，要确定任何时刻梁上各質量的位置，除了要知道参变数 φ 之外，还需要知道左支承（或其他支承）的垂直位移 y 。最后我們再来看一看圖 4，虽然只有一个集中質量，但却是兩個自由度的体系。这个道理一看就知道，不必再解釋了。

一个体系，不論發生振动的的原因如何，發生振动以后，就不再受外力干扰（包括支承运动等，但阻尼除外），这种振动，称为自由振动；反之，如果它一直受到外力干扰，就称为强迫振动。本节先介紹自由振动。

二、不考虑阻尼作用的自由振动

自由振动，总是随着時間的增加而逐漸衰減以至靜止的，因为它要受到材料內部的摩擦阻力 以及各構件間的摩擦阻力 …… 等的作用（对于結構物，因为振幅很小，所以主要是材料內部的摩擦阻力，普通称为內阻力）。但为了便于研究起見，先假定沒有阻尼存在，或者不考虑这些阻力的作用，来研究体系的自由振动。

不考虑阻尼的作用，当体系作自由振动时，每一質量总是受着兩個力的作用：

一个是彈性力 S ：以 K 表示体系的剛度系数（即在振动方向使質量产生單位位移所需要的力），如圖 1，当質量 m 产生位移 y 时，則彈性力

$$S = -Ky$$

負号表示彈性力总是与位移 y 的方向相反；

另一个是慣性力 I ：它等于質量乘加速度，前面冠以負号。

$$I = -m \frac{d^2 y}{dt^2} = -m \ddot{y}$$

根据达朗貝尔原理，無論在任何时候，此二力皆相互平衡，故其和应等于零，即：

$$S + I = 0$$

將 S 和 I 之值代入，就得到質量 m 振动的微分方程为：

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + Ky = 0 \quad (2)$$

$$\text{或} \quad \frac{d^2 y}{dt^2} + \omega^2 y = 0 \quad (2')$$

$$\text{式中：} \quad \omega^2 = \frac{K}{m} \quad (3)$$

(2') 式的解答为：

$$y = A_1 \sin \omega t + A_2 \cos \omega t \quad (4)$$

由 (4) 式可以看出： y 的值总是週而复始、循环不已地改变的。

当時間 t 改变 $\frac{2\pi}{\omega}$ 的整数倍时， y 又恢复原来的值。所以 $\frac{2\pi}{\omega}$ 称为振动週期或自振週期，如以 T 表示，即：

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (5)$$

以 f 表示頻率，即每秒鐘的振动次数，即：

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \quad (6)$$

頻率 f 的 2π 倍，或 2π 秒的振动次数，显然应当为 ω ，我們称之为圓頻率，但因常常用 ω ，而很少用 f ，所以習慣上往往就称 ω 为頻率。 ω 之值可由 (3) 式求之。如果以 δ 表示單位位移（即如圖 1 在 A 点作用 $P = 1$ 时 A 点的撓度），則：

$$K = \frac{1}{\delta}$$

故 (3) 式又可变为:

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{1}{m\delta}} = \sqrt{\frac{g}{mg\delta}} = \sqrt{\frac{g}{y_{cm}}} \quad (3')$$

y_{cm} 表示在質量 m 的重力作用下 A 点的位移, 故又称为靜力位移。

求自振頻率 ω , 是一个重要的問題, 所以公式 (3') 常常會用到, 必須熟記。

如果我們用 n 表示每分鐘的振動次數 (又称为工程頻率), 于是得:

$$n = 60 \times \frac{\omega}{2\pi} = \frac{300}{\sqrt{y_{cm}}} \quad (7)$$

(4) 式中的 A_1 和 A_2 是两个积分常数, 它随振动的起始条件而定。所謂起始条件, 就是在 $t = 0$ 时的情况, 或者說我們选作計算時間的起点时的情况。例如:

当 $t = 0$ 时,

設 位移: $y = y_0$

速度: $\frac{dy}{dt} = v_0 = v_0$

代入 (4) 式得:

$$y_0 = A_2 \quad v_0 = \omega A_1$$

即

$$A_1 = \frac{v_0}{\omega}$$

故 (5) 式又可写为:

$$y = y_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t \quad (4')$$

如果体系系自平衡状态开始振动, 我們以开始振动时为時間的計算起点, 即:

当 $t = 0$ 时, $y_0 = 0$

則得: $y = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t \quad (4'')$

(4) 式我們还可以用另一个常用的写法来表示:

$$\left. \begin{array}{l} \text{令} \quad A_1 = A \cos \varphi \\ \quad \quad A_2 = A \sin \varphi \end{array} \right\} \quad (8)$$

代入 (4) 式, 則 (4) 式变为:

$$y = A \sin(\omega t + \varphi) \quad (9)$$

若以 t 为横坐标, y 为纵坐标, 根据上式可繪得振動圖如圖5所示。

显然 $A = y_{\max}$, 我們称它为振幅, $(\omega t + \varphi)$ 称为相角, φ 称为初相角, 即時間 $t = 0$ 时的相角。

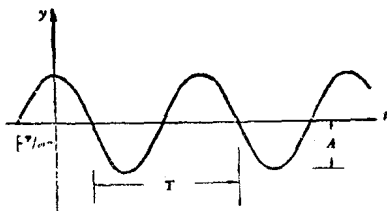


圖 5

由(8)式可以看出:

$$\left. \begin{aligned} A &= \sqrt{A_1^2 + A_2^2} \\ \operatorname{tg} \varphi &= \frac{A_2}{A_1} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

所以 A_1 、 A_2 及 A 、 φ 兩对常数, 知道一对就可以求另一对。因为在进行計算时, 普通复数常較三角函数方便, 所以(2')式的解答, 有时也写为复数的形式:

$$y = Ae^{i(\omega t + \varphi)} \quad (9'')$$

因

$$\begin{aligned} y &= Ae^{i(\omega t + \varphi)} \\ &= A[\cos(\omega t + \varphi) + i \sin(\omega t + \varphi)] \end{aligned}$$

实数部分表示体系的位移, 略棄有虚数 i 的部分, 即为振动的方程式, 即:

$$y = A \cos(\omega t + \varphi)$$

下面列举两个求自振频率的簡單例子:

例一: 試求圖 1 所示的梁的自振频率。

$$\begin{aligned} \text{解:} \quad \therefore y_{cm} &= \frac{mgL^3}{3EJ} \\ \therefore \omega &= \sqrt{\frac{g}{y_{cm}}} \\ &= \sqrt{\frac{3EJ}{mL^3}} \end{aligned}$$

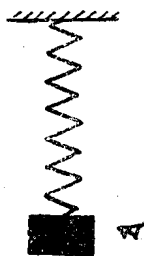


圖 6

例二: 如圖 6 所示的情形, 当重量 $Q = 1000$ 公斤时, 彈簧共伸長 2 公分, 若將 Q 減为 500 公斤, 試求这体系的自振频率。

解:

$$\therefore \delta = \frac{2}{1000}$$

$$= \frac{1}{500}$$

$$\therefore \omega = \sqrt{\frac{g}{Q\delta}}$$

$$= \sqrt{\frac{981}{500 \times \frac{1}{500}}}$$

$$\approx 31.3 \text{ 弧度/秒}$$

求体系自振频率的公式还可以根据能量守恒的关系推得, 因为最大的位移 $y_{\max}$ 等于振幅 A , 如果以 W 表示振动时的最大位能, 则:

$$W = \frac{1}{2} K y_{\max}^2$$

或

$$W = \frac{1}{2} K A^2$$

根据公式 (9), 得:

$$\dot{y} = A\omega \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\therefore \dot{y}_{\max} = A\omega$$

若以 U 表示振动时的最大动能, 则:

$$U = \frac{1}{2} m \dot{y}_{\max}^2$$

$$= \frac{1}{2} m A^2 \omega^2$$

而

$$W = U$$

將以上之值代入, 則得:

$$\frac{1}{2} K A^2 = \frac{1}{2} m A^2 \omega^2 \quad (11)$$

$$\therefore \omega^2 = \frac{K}{m} \quad (3)$$

三、考虑阻尼作用的自由振动

我們在下面將假定質量振动时所受的阻尼作用系与其振动速度成正比。这种阻尼称为膠質阻尼。若以 γ 表示阻尼系数， R 表示阻尼力，則：

$$R = -\gamma \frac{dy}{dt} = -\gamma \dot{y}$$

負号表示阻尼力与振动速度的方向相反。

加入了阻尼作用之后，則單自由度体系振动的微分方程 (2) 將变为：

$$m\ddot{y} + \gamma\dot{y} + Ky = 0$$

或：

$$\ddot{y} + 2\varepsilon\dot{y} + \omega_0^2 y = 0 \quad (12)$$

其中：

$$\varepsilon = \frac{\gamma}{2m} \text{ 称为阻尼特性系数。}$$

(12) 式的解答为：

$$y = e^{-\varepsilon t} (B_1 \sin \omega_\varepsilon t + B_2 \cos \omega_\varepsilon t) \quad (13)$$

式中：

$$\omega_\varepsilon^2 = \omega^2 - \varepsilon^2 \quad (14)$$

ω_ε 为考虑阻尼作用的自振頻率。

將 (13) 式对 t 微分一次，得：

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} = \dot{y} &= -\varepsilon e^{-\varepsilon t} (B_1 \sin \omega_\varepsilon t + B_2 \cos \omega_\varepsilon t) + e^{-\varepsilon t} \omega_\varepsilon (B_1 \cos \omega_\varepsilon t \\ &\quad - B_2 \sin \omega_\varepsilon t) \\ &= -\varepsilon y + e^{-\varepsilon t} \omega_\varepsilon [B_1 \cos \omega_\varepsilon t - B_2 \sin \omega_\varepsilon t] \end{aligned} \quad (15)$$

B_1 、 B_2 仍旧是根据起始条件来确定的。假設当 $t = 0$ 时：

$$y = y_0 \quad \dot{y} = v_0$$

于是代入上式可得：

$$B_1 = \frac{v_0 + \varepsilon y_0}{\omega_\varepsilon}$$

$$B_2 = y_0$$

故 (13) 式又可写为：

$$y = e^{-\varepsilon t} \left[\frac{v_0 + \varepsilon y_0}{\omega_\varepsilon} \sin \omega_\varepsilon t + y_0 \cos \omega_\varepsilon t \right] \quad (16)$$