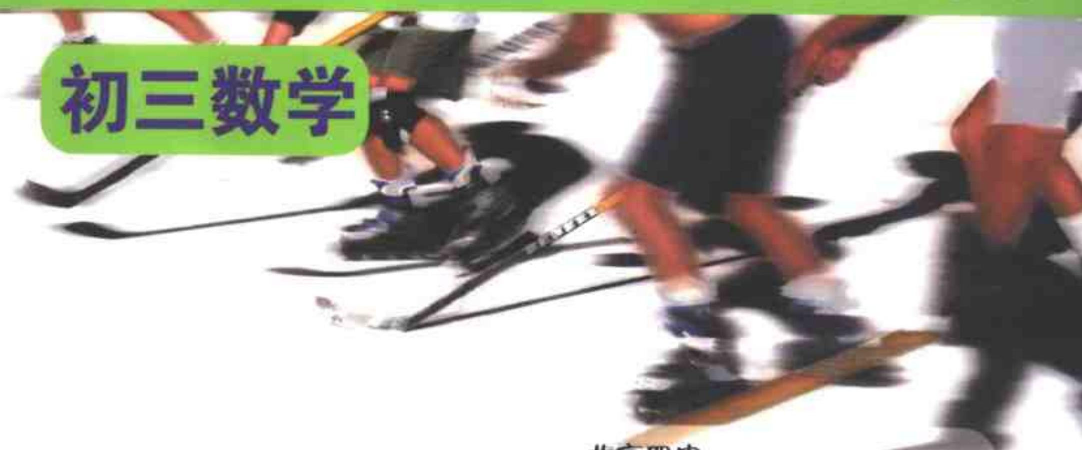
时代教育

立足中考大纲　探究知识内涵　解读奥赛真题
揭示思维规律　点击中考难题　登上名校殿堂

奥赛·中考全程对接



初三数学

北京四中
北师大实验中学
人大附中
清华附中
北师大二附中
首师大附中
北京八中
北京101中学
民族大学附中
北京13中

教师联合编写组编写

本书主编　陈龙清　廖康强

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

奥赛·中考全程对接

初三数学

丛书总策划：蔡　晔

本书主编：陈龙清　廖康强

机械工业出版社

本书以初中三年级教学大纲中的重、难点和初中奥林匹克竞赛大纲中被加深、拓展的知识点为知识基础，结合涉及到的本年级各类典型竞赛例题，剖析知识的内涵，发掘思维的本质，介绍解决难题的常规方法，归纳发散，培养和训练开放型创新思维，对接历年各地中考中有关本知识段的“难题”，用奥赛解题思维巧解中考难题，并通过举一反三训练及时巩固，引导创新。

图书在版编目(CIP)数据

奥赛·中考全程对接．初三数学/陈龙清，廖康强主编．—北京：机械工业出版社，2003.9

ISBN 7-111-01851-6

Ⅰ.奥… Ⅱ.①陈…②廖… Ⅲ.数学课-初中-升学参考资料 Ⅳ.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第070033号

机械工业出版社(北京市百万庄大街22号　邮政编码100037)

策划编辑：邝　鸥　　　　责任编辑：余茂祚

版式设计：郑文斌　　　　封面设计：鞠　杨

责任印制：施　红

三河市宏达印刷有限公司印刷·新华书店北京发行所发行

2003年9月第1版·第1次印刷

880mm×1230mm　1/32·11.5印张　357千字

定价：15.00元

前　言

如今，奥林匹克这个名字，已经成为人类最高水平竞赛的代名词，对每一位有竞争意识的人，都充满着无法抗拒的诱惑力。能够得到它的垂青，是一个人一生中无上的荣誉，哪怕是仅仅参与一下都会让人激动不已。

本书编写意图

中学生学科奥林匹克竞赛也是如此。1959 年第一届国际中学生数学奥林匹克竞赛(IMO)在罗马尼亚成功举办，拉开了中学生学科奥林匹克竞赛的序幕，紧接着又相继产生了中学生物理(IPHO)、化学(ICO)、生物(IBO)、信息学(IOI)等学科奥林匹克竞赛。我国自 1985 年参加这一赛事以来，取得了辉煌的成绩，争得了很高的荣誉，同时也使得国内奥林匹克选拔赛轰轰烈烈地开展起来。国家的最高教育和科技行政部门也对中学生各学科一系列的奥林匹克竞赛给予了足够重视。不仅形成了规范的竞赛制度，还制定了与普通教学大纲相衔接的三级竞赛大纲，如此系统的大纲，除高考外还是第一个。

在 2003 年高考招生过程中，全国一流重点大学及各地招生办对高中应届毕业生的保送资格有如下要求：获全国高中数学联赛、全国中学生物理竞赛、全国高中学生化学竞赛、全国青少年信息学奥林匹克联赛、全国中学生生物学联赛，省级赛区一等奖；获全国数学奥林匹克竞赛、全国中学生物理竞赛、全国高中学生化学竞赛、全国青少年信息学奥林匹克竞赛、全国中学生生物学竞赛，全国决赛一、二、三等奖。而且，对于以上获奖又参加高考的，享有 10 到 20 分的特征加分待遇。

看到以上这段文字，每一位面临高考的同学都不免会怦然心动。既是一种莫大的荣誉，又有实实在在的收获。

对于面临中考的同学，如果能够上一所优秀的重点中学，就等于一只脚已经踏进了名牌大学的校门。而能在初中奥林匹克竞赛中获

得优胜成绩的同学可以直接保送到最好的中学学习。但是，要想攀上奥林匹克的高峰可不是一件易事，首先因为它要求同学们在具有扎实的课本知识的基础上还要了解知识的更深内涵和更广的外延；其次，还要求同学们具有很强的综合创新解题能力。这两点要求，就目前正常的中学教学和学习深度还是很难达到的。所以要在学好教学大纲规定的知识和能力的同时，进行一些拓展学习和训练。日积月累、循序渐进，把自己也培养成一个“天才”。

如何进行课外拓展学习，不能盲目操作，要有一套科学的方法和计划，还要有一个得力的助手——辅导参考书。否则，会顾此失彼，得不偿失。

另外，奥林匹克竞赛受到如此高度的重视，其最根本原因是各级“奥赛”试题具有很强的创新性、灵活性、综合性。注重考查学生对知识的理解及综合运用能力和思维方法的掌握和创新能力。而这一点恰恰是素质教育的核心内容，也是高考改革的精神实质。

下面是有关 2003 年的高考试卷的一段报道：“今年的数学题新而不怪，试题难，易拉开档次，每位考生可以根据自己的能力爬台阶式地做题。”高考数学阅卷组组长周兴和教授谈起今年的高考数学显得很有话说。据介绍，今年的数学试卷就连小题目都没有明显的送分题，考查点偏重于知识网络的交汇点。周兴和指出：这张数学试卷是对沉迷于题海战术式教育的一次沉重打击，用常规的课堂教学思维应付这张试卷显然不太够。据了解，从试批的考卷看，考生缺乏开放性思维、应用意识不完美等问题已暴露无遗。

从以上这段报道，我们可以更清晰地看出学习“奥赛”的重要性。对比“奥赛”初赛、复赛大纲和中考大纲，以及历年初赛、复赛试题和各地中考中的难题、压轴题也不难得出这一结论。许多地区的某些中考题就是上一届奥林匹克竞赛题的翻版。因此，我们学习和研究奥林匹克竞赛不光是为了夺取“奥赛”金牌，更重要的是可以让我们站在一个更高的高度俯视普通的中学学习和中考，在学习和应考上能够登上一个新的台阶，更加从容地面对中考的洗礼，取得出色成绩，实现心中梦想。

基于以上几方面原因，我们编写了这套丛书，将奥赛和中考有机

地结合起来，希望能为同学们找到一条通向成功的有效捷径。

本书编写特点

本书内容的难度定位在略高于中考水平，相当于奥林匹克竞赛中等难度，以初中教学大纲中的重点、难点和在奥赛大纲中被加深、拓展的知识点为知识基础。结合各类典型竞赛例题，剖析知识的内涵，发掘思维的本质，介绍解决难题的常规方法，归纳发散，培养和训练开放型创新思维，对接各地中考中的经典“拔高”题，用奥赛解题思维巧解中考难题，并通过举一反三训练及时巩固，引导创新。

本书编写形式为讲练结合，重点放在例题讲解上。各栏目所选例题具有典型的代表性，思路剖析透彻，解答过程详尽，点津之笔富有启发性，练习题少而精，能起到举一反三之效果，避免“偏题”、“怪题”和“题海战术”。对于较难的练习题，一般会给出全解或解答提示，但这仅作参考。同学们要自己开动脑筋，结合例题，想出自己的解决方案来。

本套丛书涉及数学、物理、化学、生物各科，涵盖初、高中各个年级，共计 16 分册，知识讲解系统，题型全面，可作为同步辅导教材使用。

本书编写力量

本套丛书由中学教育专家、全国化学教学研究会副理事长、北京化学奥校校长、特级教师黄儒兰担任编委会主任，主持丛书编写工作。

参加本套丛书编写的人员均为来自北京四中、北师大附属实验中学、人大附中、清华附中、首师大附中、北师大二附中、北京八中、北京 101 中学、北京 13 中、民族大学附中等一批京城重点名校的一线优秀教师和奥赛辅导教练；几位清华大学和北京大学的奥赛保送生和高考理科状元也为本书做了许多有益工作。

由于编写时间较紧，可能存在一些缺憾，敬请广大读者批评指正。

编　者

目　　录

前言
第一章　一元二次方程 …………………………………………… (1)
　第一节　根的判别式 …………………………………………… (1)
　第二节　根与系数的关系 ……………………………………… (17)
　第三节　可化为一元二次方程的方程(组) …………………… (35)
第二章　函数图像与统计初步 …………………………………… (51)
　第一节　直角坐标系与函数 …………………………………… (51)
　第二节　反比例函数与一次函数 ……………………………… (66)
　第三节　二次函数 ……………………………………………… (81)
　第四节　统计初步 ……………………………………………… (98)
第三章　三角函数 ……………………………………………… (114)
　第一节　锐角三角函数 ……………………………………… (114)
　第二节　解直角三角形 ……………………………………… (127)
第四章　圆 ……………………………………………………… (147)
　第一节　圆的基本知识 ……………………………………… (147)
　第二节　直线与圆、圆与圆的位置关系 ……………………… (162)
　第三节　三角形的"四心" …………………………………… (180)
　第四节　四点共圆 …………………………………………… (198)
　第五节　圆的应用性问题 …………………………………… (214)
第五章　数学思想与解题方法 ………………………………… (239)
　第一节　分类讨论 …………………………………………… (239)
　第二节　方程思想 …………………………………………… (256)
　第三节　构造法 ……………………………………………… (280)

第四节　反面考虑法 …………………………………… (294)
第五节　定值与最值 …………………………………… (313)
第六节　组合数学 …………………………………… (333)
第七节　归纳与推理 …………………………………… (347)

注:每节均包含[知识对接]、[经典名题]、[思维发散]、[中考对接]、[举一反三训练]、[答案与提示]六个板块。

第一章 一元二次方程

第一节 根的判别式

知识对接

一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的根的判别式 $\Delta=b^2-4ac$. 当 $\Delta\geqslant0$ 时, 方程有实数根; 当 $\Delta>0$ 时, 有两个不相等的实数根; 当 $\Delta=0$ 时, 有两个相等的实数根; 当 $\Delta<0$ 时, 没有实数根. 以上性质的逆命题同样成立.

根的判别式是有关一元二次方程的重要知识之一, 是近年来的中考和竞赛中常出现的题型之一. 它既可以根据判别式判断一元二次方程根的情况, 也可以应用判别式的知识解决有关方程、不等式和函数方面的问题. 它要求我们掌握根的判别式的有关定理及其逆定理的灵活运用.

经典名题

例1 (1997·江苏省初中数学竞赛)已知 a、b、c 是不全为 0 的 3 个实数, 那么关于 x 的一元二次方程 $x^2+(a+b+c)x+(a^2+b^2+c^2)=0$ 的根的情况是 (　　)

A. 有 2 个负根　　B. 有 2 个正根

C. 有 2 个异号的实根　　D. 无实根

【思路导航】 要判断 1 个一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根的情况, 首先想到判别式 $\Delta=b^2-4ac$.

若 $\Delta>0$, 方程有 2 个不相等的实数根;

若 $\Delta=0$, 方程有 2 个相等的实数根;

若 $\Delta<0$, 方程无实数根.

【解答】 方程 $x^2+(a+b+c)x+(a^2+b^2+c^2)=0$ 的判别式为

$\Delta=(a+b+c)^2-4(a^2+b^2+c^2)$

$=-3a^2-3b^2-3c^2+2ab+2bc+2ca$

$=(-a^2+2ab-b^2)+(-b^2+2bc-c^2)+(-c^2+2ca-a^2)-a^2-b^2-c^2$

$= -[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2+a^2+b^2+c^2]$

$\because a$、b、c 不全为 0

$\therefore \Delta<0$

$\therefore$ 原方程无实数解

【答案】 D

【点津】 本题在判断 Δ 的正负过程中，用到了配方的技巧，这也是常用的技巧，同学们务必掌握．

例2（第9届祖杯赛）已知 a、b、c 为正数，若二次方程 $ax^2+bx+c=0$，有两个实根，那么 $a^2x^2+b^2x+c^2=0$　　（　　）

A. 有两个不等的正根　　B. 有一个正根一个负根

C. 有两个不等的负根　　D. 不一定有实根

【思路导航】 要讨论根的情况，首先确定方程的根是否存在，即计算 Δ 再利用韦达定理算出根的符号．

【解答】 $\because$ 方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个实根，$\therefore b^2-4ac\geqslant 0$.

对于方程 $a^2x^2+b^2x+c^2=0$，由 $\Delta=(b^2)^2-4a^2c^2=(b^2+2ac)(b^2-2ac)$.

$\because a$、b、c 为正数且 $b^2\geqslant 4ac$，

$\therefore b^2+2ac>0, b^2-2ac\geqslant 2ac>0, \therefore \Delta>0$.

$\therefore$ 方程 $a^2x^2+b^2x+c^2=0$ 必有两个不等的实根．

设 x_1, x_2 为 $a^2x^2+b^2x+c^2=0$ 的两实根，由韦达定理得

$x_1+x_2=-\dfrac{b^2}{a^2}, x_1x_2=\dfrac{c^2}{a^2}, \therefore x_1x_2>0, x_1+x_2<0$.

$\therefore$ 两根同号且均为负根，故方程有两个不等的负根．

【答案】 C

例3（1994·安徽省初中数学竞赛）已知方程 $2x^2-2ax+3a-4=0$ 没有实数根，那么代数式 $\sqrt{a^2-8a+16}+|2-a|$ 的值是　　（　　）

A.2　　B.5　　C.$2a-6$　　D.$6-2a$

【思路导航】 由方程 $2x^2-2ax+3a-4=0$ 没有实数根，首先想到 $\Delta<0$.

【解答】 $\Delta=(-2a)^2-4\times 2\times(3a-4)$

$=4a^2-24a+32$

$=4(a-2)(a-4)<0$

$2 < a < 4$

而 $\sqrt{a^2-8a+16}+|2-a|=|a-4|+|2-a|$

$\because 2 < a < 4$

$\therefore \sqrt{a^2-8a+16}+|2-a|=4-a+a-2=2$

【答案】 A

例 4（1997·全国初中数学联赛）当 a,b 为何值时，方程 $x^2+2(1+a)x+(3a^2+4ab+4b^2+2)=0$ 有实根？

【思路导航】 二次项系数不为0，此方程必为二次方程，要使此方程有实数解，当且仅当 $\Delta \geqslant 0$ 时方程有实数解．

【解答】 所给方程的判别式为

$$\begin{aligned}\Delta &= 4(1+a)^2-4(3a^2+4ab+4b^2+2)\\ &=4(-1+2a-2a^2-4ab-4b^2)\\ &=-4[(1-a)^2+(a+2b)^2]\end{aligned}$$

方程有实根，则 $\Delta \geqslant 0$，故 $(1-a)^2+(a+2b)^2=0$

故 $1-a=0$ 且 $a+2b=0$，解得 $a=1, b=-\dfrac{1}{2}$.

因此，当 $a=1, b=-\dfrac{1}{2}$ 时，方程有实根．

【点津】 此题解法中用到配方和非负数思想．配方法是中学数学中的重要方法，有着相当广泛的应用，应高度重视并能灵活运用此方法．

例 5（第8届"祖冲之杯"初中数学邀请赛）如果方程 $(m+2)x^2-2(m+1)x+m=0$ 只有一个实数根，那么方程 $(m+1)x^2-2mx+m-2=0$ （ ）

A. 没有实数根　　B. 有2个不同的实数根

C. 有2个相等的实数根　　D. 实数根的个数不能确定

【思路导航】 特别注意：方程 $(m+2)x^2-2(m+1)x+m=0$ 只有1个实数根．

若 $m+2\neq 0$，则方程要么有2个根（相等或不相等），要么没有实数根．条件指明，该方程只有1个实数根，所以 $m+2=0$，并且 $m+1\neq 0$.

【解答】 $\because$ 方程 $(m+2)x^2-2(m+1)x+m=0$ 只有1个实数根，

$\therefore m+2=0$，并且 $m+1\neq 0$，得 $m=-2$. 于是方程 $(m+1)x^2-2mx+m-2=0$ 即为方程

$-x^2+4x-4=0$ (*)

(*)的 $\Delta=0$

【答案】 C

【点津】 (*)配方得$(x-2)^2=0$,可以得到(*)有2个相等的实数根$x_1=x_2=2$.

例6 (1996·江苏省竞赛)已知 $x^2-ax+3-b=0$ 有两个不相等的实数根,$x^2+(6-a)x+6-b=0$ 有两个相等的实数根,$x^2+(4-a)x+5-b=0$ 没有实数根,则 a、b 的取值范围是 ( )

A. $2<a<4,2<b<5$ B. $1<a<4,2<b<5$

C. $1<a<4,1<b<5$ D. $2<a<4,1<b<5$

【思路导航】 本题已知根的情况,应充分利用判别式来确定 a、b 应满足的条件,从而最终确定 a、b 的取值范围.

【解答】 由 $x^2-ax+3-b=0$ 有两个不相等的实数根,

$\therefore \Delta_1=(-a)^2-4(3-b)>0$

即 $a^2+4b-12>0$ ……………… ①

由 $x^2+(6-a)x+(6-b)=0$ 有两个相等的实根,

$\therefore \Delta_2=(6-a)^2-4(6-b)=0$

即 $a^2-12a+12+4b=0$. ……………… ②

由 $x^2+(4-a)x+(5-b)=0$ 没有实数根,

$\therefore \Delta_3=(4-a)^2-4(5-b)<0$

即 $a^2-8a+4b-4<0$. ……………… ③

将②代入①和③得,$a>2$, $a<4$, $\therefore 2<a<4$.

由 $b=-\frac{1}{4}[(a-6)^2-24]=-\frac{1}{4}(a-6)^2+6$,

又$\because 2<a<4<6$,当 $a=2$ 时,$b_{\min}=2$;当 $a=4$ 时,$b_{\max}=5$.

故 $2<b<5$.

【答案】 A

【点津】 本题除利用到判别式外,还需应用二次函数在某一区间上的极值问题.

例7 (1997·陕西省初中数学联合竞赛)已知一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(ac\neq 0)$有2个异号实根 m 和 n,且 $m<|m|$,那么二次方程 $cx^2+(m-n)ax-a=0$ 的根的情况是 ( )

A. 有 2 个负根　　　　　　B. 有 2 个正根

C.2 根异号　　　　　　　　D. 无实根

【思路导航】 本题首先判断方程 $cx^2+(m-n)ax-a=0$ 是否有根，若有根，再判断是正根还是负根.

【解答】 $\because$ 方程 $ax^2+bx+c=0(ac\neq 0)$ 有 2 个异号实根 m 与 n，且 $m<|m|$

$\therefore m<0, n>0$，且 $mn=\frac{c}{a}<0, n-m>0$

而方程 $cx^2+(m-n)ax-a=0$ 的判别式为

$$\begin{aligned}\Delta &= a^2(m-n)^2+4ac\\ &= a^2\left[(m-n)^2+4\frac{c}{a}\right]\\ &= a^2[(m-n)^2+4mn]\\ &= a^2(m+n)^2\geqslant 0\end{aligned}$$

故必有 2 个实根.

设该方程的 2 个实根为 x_1, x_2，则

$x_1+x_2=\frac{a}{c}(n-m)<0, x_1x_2=-\frac{a}{c}>0$

$\therefore x_1<0, x_2<0$

【答案】 A

例 8 (1997·山东省初中数学竞赛)设 a、b、c 为互不相等的非零实数. 求证:3 个方程

$$ax^2+2bx+c=0$$
$$bx^2+2cx+a=0$$
$$cx^2+2ax+b=0$$

不可能都有 2 个相等的实数根.

【思路导航】 本题若分别考虑 3 个方程的根的情况，则不太容易找到突破口，于是我们把 3 个方程作为 1 个整体来考虑，问题则容易解决.

【解法一】 假设题中 3 个方程都有 2 个相等的实数根，则有

$$\begin{cases}\Delta_1=4b^2-4ac=0\\ \Delta_2=4c^2-4ab=0\\ \Delta_3=4a^2-4bc=0\end{cases}$$

三式相加得

第一章 一元二次方程

$$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0 \cdots\cdots ①$$

即 $$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0 \cdots\cdots ②$$

所以 $a=b=c$,这与已知条件矛盾.

所以题中的3个方程不可能都有2个相等的实数根.

【解法二】 设3个方程的判别式分别为 Δ_1、Δ_2、Δ_3,由 a、b、c 不全相等,得 $\Delta_1+\Delta_2+\Delta_3=2[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]>0$,$\therefore \Delta_1$、$\Delta_2$、$\Delta_3$ 中至少有1个大于0,即至少有1个方程有不等的实数根.

【点津】 将①式转化为②式,是常用的技巧.这个技巧曾在例1中运用过.

例9(1996·上海市初中数学竞赛)若关于 x 的方程 $ax^2+2(a-3)x+(a-2)=0$ 至少有一个整数解,且 a 为整数,求 a 的值.

【解答】 当 $a=0$ 时,方程化为 $-6x-2=0$ 无整数解;

当 $a\neq0$ 时,已知方程至少有一个整数解,必须使判别式 $\Delta=4(a-3)^2-4a(a-2)=4(9-4a)$ 为完全平方数,从而 $9-4a$ 为完全平方数.

设 $9-4a=s^2$(s 为正奇数且 $s\neq3$)

则 $a=\dfrac{9-s^2}{4}$,

$x_{1,2}=\dfrac{-2(a-3)\pm2s}{2a}=-1+\dfrac{4(3\pm s)}{9-s^2}$,

$x_1=-1+\dfrac{4}{3+s}$,$x_2=-1+\dfrac{4}{3-s}$.

欲使 x_1 为整数,而 s 为正整数,只有 $s=1$,此时 $a=2$;

欲使 x_2 为整数,s 只能为1,5,7,当 $s=5$ 或7时 $a=-4$ 或 -10.

综上所述,a 的值为2,-4,-10.

【点津】 整数的性质也是解决方程整数中常用的知识,必须灵活应用.

例10(1997·天津市初中数学竞赛)若关于 x 的方程 $x^2+(m+2)x+m+5=0$ 有两个正数根,则 m 的取值范围是________.

【思路导航】 方程有两正根的条件为 $\Delta\geqslant0$,$x_1x_2>0$,$x_1+x_2>0$,由此得到关于 m 的不等式组,从而确定 m 的取值范围.

【解答】 $\because$ 方程 $x^2+(m+2)x+m+5=0$ 有两个正数根.

$$\therefore \begin{cases} \Delta = (m+2)^2 - 4(m+5) \geqslant 0 \\ x_1 + x_2 = -(m+2) > 0 \\ x_1x_2 = (m+5) > 0 \end{cases}$$

$\therefore -5 < m \leqslant -4$

例11 k 取何值时，方程 $x^2 - 11x + (30+k) = 0$ 有两个实根，且两实根均大于5.

【思路导航】 可将原方程转化为以 $x-5$ 为未知数的二次方程，考虑设 $y = x-5$，即 $x = y+5$ 代入原方程整理成关于 y 的二次方程，此时方程应有两个正根，再利用方程有正根的条件就可求出 k 的取值范围.

【解答】 令 $y = x-5$，则 $x = y+5$ 代入原方程并整理得 $y^2 - y + k = 0$.

$\because x > 5, \therefore y > 0$ 即方程 $y^2 - y + k = 0$ 有两个正根.

$$\therefore \begin{cases} \Delta = 1 - 4k \geqslant 0 \\ y_1 + y_2 = 1 > 0 \\ y_1y_2 = k > 0 \end{cases}$$

$$\therefore \quad 0 < k \leqslant \frac{1}{4}$$

由 $y_1 = x_1 - 5 > 0, y_2 = x_2 - 5 > 0, \therefore x_1 > 5, x_2 > 5$,

即当 $0 < k \leqslant \frac{1}{4}$ 时，原方程两根 $x_1 > 5, x_2 > 5$.

【点津】 如果设两根为 x_1, x_2，由 $x_1 > 5, x_2 > 5$，得 $x_1x_2 > 25$，从而 $k > -5$，这样解法是错误的，事实上由 $x_1 > 5, x_2 > 5$，可得 $x_1 + x_2 > 10, x_1x_2 > 25$，但其逆命题未必成立，因此在讨论根的情况时，可将问题转化成根的符号问题，转化的方法就是换元法.

例12（1998·全国初中联赛）设抛物线 $y = x^2 + (2a+1)x + 2a + \frac{5}{4}$ 的图像与 x 轴只有一个交点.

(1)求 a 的值；

(2)求 $a^{18} + 323a^{-6}$ 的值.

【解答】 (1)因抛物线与 x 轴只有一个交点，所以一元二次方程 $x^2 + (2a+1)x + 2a + \frac{5}{4} = 0$ 有两个相等的实根，于是

$$\Delta = (2a+1)^2 - 4\left(2a + \frac{5}{4}\right) = 0$$

即 $$a^2-a-1=0,$$

∴ $$a=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

(2)由(1)知 $a^2=a+1$,可得

$$a^4=(a+1)^2=a^2+2a+1=3a+2$$

$$a^8=(3a+2)^2=9a^2+12a+4=21a+13$$

$$a^{16}=(21a+13)^2=441a^2+546a+169$$

$$=987a+610.$$

$$a^{18}=(987a+610)(a+1)=987a^2+1597a+610=2584a+1597.$$

又 $$a^{-6}=\frac{1}{a^6}=\frac{1}{a^4\cdot a^2}=\frac{1}{(3a+2)(a+1)}=\frac{1}{8a+5},$$

∵ $$a^2-a-1=0.$$

$$64a^2-64a-65=-1,$$

即 $$(8a+5)(8a-13)=-1.$$

∴ $$a^{-6}=\frac{1}{8a+5}=-8a+13.$$

∴ $a^{18}+323a^{-6}=2584a+1597+323(-8a+13)=5796.$

思维发散

竞赛中常出现的几类问题是:①根据方程根的情况,确定方程中字母系数的取值范围;②应用判别式来判断实根的有理性、无理性和整数性;③应用判别式求值、证不等式等.

在利用一元二次方程的根的判别式时,首先要把方程化为一般形式,正确地确定各项系数,计算出 $\Delta=b^2-4ac$ 的值,然后对问题进行解答.

中考对接

例1 (1995·山西省中考)下面四个方程中,有两个不等实根的是(　　)

A. $x^2-x+1=0$　　　B. $x^2+x-1=0$

C. $x^2-x+\frac{1}{4}=0$　　　D. $x^2+1=0$

【思路导航】 分别用判别式来判断四个方程根的情况,问题即可解决.

【答案】 B

例2（1995·湖南省中考）当 $k=$ ________ 时，方程 $x^2-2kx+k^2+k-1=0$ 有两个相等的实数根.

【思路导航】 由题意知，方程有两个相等实根，说明 $\Delta=0$，所以通过判别式 $\Delta=0$ 可求得 k 值.

【答案】 当 $k=1$ 时，方程 $x^2-2kx+k^2+k-1=0$ 有两个相等的实根.

【点津】 根据一元二次方程的根的情况，可以确定方程中字母系数的取值范围或相互关系，这是常用的一种方法.

举一反三训练

1. 如果正数 a、b、c 满足 $b>a+c$，那么关于 x 的方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根的情况是 （　　）

A. 有2个不相等的实根　　B. 有2个相等的实根

C. 没有实根　　D. 无法确定有无实根

2. 满足 $x^2+7x+c=0$ 有实根的最大整数 c 是 （　　）

A.4　　B.8　　C.10　　D.12

3. 设 x_0 是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的1个实数根，则判别式 $\Delta=b^2-4ac$ 与平方式 $M=(2ax_0+b)^2$ 的大小关系是 （　　）

A. $\Delta>M$　　B. $\Delta=M$

C. $\Delta<M$　　D. 不能确定

4. 设 m 是不为0的整数，一元二次方程 $mx^2-(m-1)x+1=0$ 有有理根，求 m 的值.

5. 如果关于 x 的方程 $(x+a)(x+b)+(x+b)(x+c)+(x+c)(x+a)=0$（其中 a,b,c 均为正数）有两个相等的实数根，

求证：以 a,b,c 的长为线段能够组成一个三角形，并指出三角形的特征.

6. 是否存在这样的实数 k，使得二次方程 $x^2+(2k-1)x-(3k+2)=0$ 有两个实数根且两根都在2与4之间？如果有，试确定 k 的取值范围？如果没有，试述理由.

7. 实数 x,y 满足 $x^2-2x-4y=5$. 则 $x-2y$ 的取值范围是什么？

8. 如果关于 x 的实系数一元二次方程 $x^2+2(k+3)x+k^2+3=0$ 有两个实数根 α,β，那么 $(\alpha-1)^2+(\beta-1)^2$ 的最小值是多少？