

高等学校教学用书



量子电动力学导论

LIANGZI DIANDONG LIXUE DAOLUN

A. A. 索科洛夫著

吳伯澤譯

人民教育出版社

高等学校教学用~~书~~



量子电动力学导论

LIANGZI DIANDONG LIXUE DAOLUN

A. A. 索科洛夫著

吳伯澤譯

人民教育出版社

本书系根据苏联数理出版社（Физматгиз）出版的
A. A. 索科洛夫（Соколов）著“量子电动力学导论”
（Введение в квантовую электродинамику）的1953年
版译出的。本书可作为高等学校高年级的教学参考书，
也可供对现代量子场论感兴趣的物理学家和数学家、教
师及研究生参考。

本书专门讨论电子、正电子和光子（也包括 μ 介子）
的相对论性运动及相互作用。在叙述中不仅系统地阐明
量子电动力学的物理基础，并且详细地计算了各种具体
效应（如光子与电子的相互作用，电子与正电子的形成
及湮没，原子中电子能级的位移等等）。

量子电动力学导论

A. A. 索科洛夫著

吴伯泽译

北京市书刊出版业营业登记证出字第2号

人民教育出版社出版（北京景山东街）

民族印刷厂印装

新华书店北京发行所发行

各地新华书店经售

统一书号：K13010·1062 开本 850×1168 $1/32$ 印张 19 11/16

字数 472,000

印数 0001—4,250 定价(6) 1.80

1962年8月第1版

1962年8月北京第1次印刷

序 言

大家都知道，在經典物理学中，微粒性质只为某些客体(如电子)所具有，而波动性质則只为另一些客体(如光)所具有。

从普朗克的量子理論和薛定諤-海森伯的量子力学可以知道，在一定的条件下，光也具有微粒性质(爱因斯坦的光子理論)，而电子束也具有波动性质(德布罗意波)。

借助于二次量子化，终于建立了一个前后一致的理論(量子場論)，这个理論能够用統一的观点来描述任何基本粒子的微粒性和波动性。

微粒性和波动性的这样的綜合只有在辯証唯物主义的基础上才是可以理解的，因为辯証唯物主义教导我們，在每一个自然现象中，在出现对立的同时，必然也存在着对立的辯証的統一。

按照量子場論，在光与电子之間不應該存在着曾經在經典理論中存在过的原則性差异。無論是光或电子束，都是由基本粒子組成的，不过，这两种基本粒子具有不同的自旋(光子的自旋等于1，而电子的自旋等于 $\frac{1}{2}$)和不同的靜质量(光子的靜质量等于零，而电子的則等于一定的有限值)。

在量子場論中，又以新的方式提出了把場看成被激发了的粒子真空的問題。除了电磁場之外，还應該存在着电子-正电子場、介子場、电子-中微子場等等。从一方面說，真空在适当激发的条件下制約着粒子間的相互作用，从另一方面說，真空本身又是一個具有无限多虛粒子的系統，这些虛粒子是一种独特的容器，真实粒子在誕生时就是从这种容器“提取”出来的，而在湮沒时則又“变为”这种容器。

現在已經知道的相互作用有下面几种:

1) 电磁相互作用,具体地说,它把电子、正电子和光子以及其他带电粒子(如 μ 介子)彼此联系起来。量子场论中研究只与电磁相互作用有关的过程的那一部分,通常称为量子电动力学。它首先描述光子和电荷的相互作用过程(例如,光子的发射与吸收过程、光子被电子散射的过程、轫致辐射过程等)。借助于量子电动力学,可以研究狄喇克根据电子的相对论性波动方程所预言的、电子及正电子与光子的相互转化。在不久以前,量子电动力学中的新的一章——电子-正电子真空理论——也开始顺利地发展起来了。

考察量子电动力学中的具体问题的主要方法之一是微扰近似法。在许多量子电动力学的问题中,展式的参量都是一个与精细结构恒量 $\alpha = \frac{e^2}{c\hbar} \approx \frac{1}{137}$ 成比例的量,精细结构恒量是一个小量。研究微扰理论的展式的前几项(虽然通常并不整个地研究级数的收敛性),照例会导致与实验符合得很好的结果,不仅在光子与电荷的相互作用理论中如此,而且在电子-正电子真空理论中也如此。不久以前,发现一系列反粒子(反质子、反中子)以及介原子,这件事说明:现代量子电动力学中许多能得出(譬如说)存在着反粒子的结论的原理,必将反映在未来的基本粒子理论中。

2) 强相互作用,具体地说,它制约着核力、核子和 π 介子的相互作用、以及奇异粒子(K 粒子和超子)的产生等。许多作者曾经利用微扰法,并选择适当的介子结构恒量值 $\alpha_{\text{强}} = \frac{g^2}{\hbar c}$ 作为展式参量,企图建立与强相互作用相关连的现象的理论。但是,进一步的研究表明,这个量大于1,也就是说,要按它来展开是不可能的。

这种情况以及有关核子与 π 介子场的一级相互作用的性质的实验资料之不足,是强相互作用理论还远远未能达到量子电动力学目前所处的状态的原因。

强相互作用理論只有依靠近似法在 $\alpha > 1$ 区域内的改善才有可能得到进一步发展(例如, 阻尼理論和塔姆-丹柯夫方法, 这个方法的原理是不按耦合常数展开, 而按粒子数展开, 以及其他等等)。

还应指出, 在 π 介子散射理論的发展中, 所謂色散关系式起着巨大的作用, 这些关系式是由于对量子理論应用某些一般的要求(如因果性等)而得出的。这些关系式能够揭示出过程的物理本质, 并可用来消除在选择 π 介子散射的相位时的非单值性。

正如在电磁相互作用的情况中一样, 在强相互作用理論中, 方程相对于洛伦兹变换、空間時間反演和把粒子变为反粒子的电荷共轭变换也是不变的。除了电荷的符号之外, 在核子和 π 介子理論中起着巨大作用的还有同位旋, 同位旋的投影 T_3 和电荷 Q (以基本电荷 e 为单位)之間存在着下面的关系:

$$Q = T_3 + \frac{n}{2},$$

式中 n 是一个独特的量子电荷(即核子-超子电荷), 并且对于核子和超子 $n=1$, 对于反核子和(尚未发现的)反超子 $n=-1$, 而对于 π 介子和 K 粒子 $n=0$ 。对于质子和中子, 同位旋 $T = \frac{1}{2}$, 而其投影則为 $T_3 = \frac{1}{2}$ (对于质子) 或 $T_3 = -\frac{1}{2}$ (对于中子)。 π 介子可以看作是同位旋 $T=1$ 的三个状态。这个矢量的投影可以有三个值: $T_3 = \pm 1$ (对于 π^\pm 介子) 和 $T_3 = 0$ (对于 π^0 介子), 也就是說, π 介子的电荷和 T_3 的关系式是 $Q = T_3$ 。电磁相互作用会破坏同位旋 T 的守恒(这导致质子和中子、以及 π^\pm 和 π^0 介子間质量的差异), 但却不破坏 T_3 的守恒。

对于超子和 K 粒子來說, 量

$$S = 2 \left(Q - T_3 - \frac{n}{2} \right)$$

不等于零(如同对于核子和 π 介子那样), 从而被称为奇异性。上

面的关系式表明,在 S, T_3, Q 和 n 这四个量之中,只有三个量可以看作是独立的。引入奇异性 S , 便能够解释为什么存在着两个中性 K^0 粒子,因为其中有一个 $S=1$, 另一个 $S=-1$ 。

由强相互作用所制约的过程应该在同位旋和奇异性守恒的条件下发生; 因此, 已经成功地解释了奇异粒子成对地产生的原因, 例如, 在反应 $\pi^- + p^+ \rightarrow \Lambda + K^0$ 中产生两个粒子, 因为 Λ 和 K^0 粒子的奇异性分别等于 $+1$ 和 -1 。

3) 弱相互作用是核子、超子、 K 粒子、 π 介子和 μ 介子衰变的特征。例如, 原子核的 β^\pm 衰变就是与弱相互作用相关的。相应的 $\alpha_{\text{弱}} = \frac{g'^2}{\hbar c}$ 的值的数量级为 10^{-13} 。过去在一段很长的期间内, 弱相互作用的理论一直远远未能与实验定量地相符合。直到最近, 李政道和楊振宁才得到在弱相互作用下宇称不守恒这个巨大的发现, 于是就以全新的方式提出了有关方程相对于空间反演和电荷共轭变换的不变性的问题。在有弱相互作用时所发生的过程中, 同位旋 T 、它的投影 T_3 和奇异性 S 可以在一定的选择定则下发生变化。例如, 在 K 粒子自发衰变的过程中, 奇异性 S 改变 1 。李政道和楊振宁所提出的关于衰变介子和 β 粒子的极化性质的一系列预言, 现在都已经为实验所证实。

可见, 假如说从量子电动力学熟知的守恒律在强相互作用理论中被加强了一些, 那么, 在弱相互作用理论中, 它们则相反地被削弱了一些。

4) 万有引力相互作用, 它目前还没有进入基本粒子理论之列, 因为作用于重粒子之间的牛顿力即使与弱相互作用相比, 也还是小了许多倍。

相应的精细结构恒量的值等于 $\alpha_{\text{引力}} = \frac{\kappa M^2}{\hbar c} \sim 10^{-39}$, 其中 κ 是牛顿万有引力恒量, 而 M 是核子的质量。

假想的引力子和其他基本粒子之间, 显然不应该存在着原则

性的差异。假如把爱因斯坦的万有引力方程在线性近似中进行二次量子化,那么就可以表明,引力子的质量等于零,而自旋等于2。如同光子是电磁场的横向部分一样,引力子也应该这样存在着(即作为引力场的横向-横向部分)。引力场的纵向-纵向部分以及纵向-横向部分(赝引力子)可以在有引力质量时存在,并且只制约着它们之间的相互作用。

从原则上说,假想的引力子可以由引力质量辐射出来,并且甚至还可以转化为其他基本粒子(如转化为电子和正电子)。但是,由于 $\alpha_{\text{引力}}$ 极其微小,所有这些转化的几率是非常小的,目前还远远无法用实验来验证。对这些十分有趣的问题的更为详细的阐述,并不是本书的课题。

本书主要讨论量子电动力学(自由场,光子与电子和正电子的相互作用,电子-正电子真空理论等),它是现代量子场论中探讨得最为详尽的一部分。

在叙述材料时,我们力求不仅能给出量子电动力学的物理学基础,并且还能使读者熟悉理论的计算工具。同时,我们也尽力在叙述数学工具时保持一贯性,主要采用所谓海森伯表象,并运用直接计算法。还应指出,过去人们曾一度寄以巨大希望的规则化理论(即消去与粒子的固有质量相关的无限性的理论),还远远未能克服现代场论中的困难。因此,只有在事实上不能不利用规则化理论时(电子-正电子真空理论),我们才将利用它(并且只用它的最简单的变形),不仅如此,这个问题也还远远未达到其数学的完善性。

在叙述电子理论时,不能不谈到中微子和 μ 介子理论。这些粒子是满足狄喇克方程的,可能,在未来的基本粒子理论中,它们将构成一个独特的同位素族。特别是宇称的不守恒导致在它们的纵向极化中表现出它们之间的自旋耦合。在叙述这个问题时,我

們利用了本书所发展的定向自旋狄喇克粒子理論。

我們也力求以氫原子理論、塞曼效应理論等为例,来闡明理論的各个相继的发展阶段:从經典理論起,直到目前的量子电动力学理論为止。这样来分析对电子的越来越精細的性质的逐步認識过程,可以有力地証实列宁关于电子不可穷尽性的学說的普适性,具体地說,从列宁的学說可得出結論說,任何反映了不依赖于我們的意識而存在的客观自然規律的理論,都不是最終的理論,并且总是需要再进一步发展的,因为即使是認識像电子这样的粒子的过程,也是沒有止境的。

本书事实上已經是第三版了。應該把“量子場論”一书的第一部分看作第一版(第二部分“基本粒子理論导論”是Д.Д.伊凡宁柯写的),这本书在一定的意义上是我們的第一本专論“經典場論”的續篇。第二版在 1957 年由德意志民主共和国科学院出版社以单行本“量子电动力学”的形式出版。在第二版中,除了改正了已經发现的印刷錯誤和不精确的地方之外,还增添了一些补充的章节,这些章节在目前这本书中更大大地扩展了[电子波的极化,相对論性电子在磁場中的輻射,阻尼理論,考虑到电子-正电子真空的格林函数理論;双粒子运动的相对論性理論,介原子(мезоатом)等]。

最后,作者想借此机会对 Б.К. 开利莫夫、А. Н. 馬特維也夫、И. М. 切尔諾夫和其他在本书准备出版时讀过手稿、并提出一系列寶貴的意见的同志們致謝,同时也感謝 В. И. 利德尼克的細心校閱。

А. А. 索科洛夫

1957 年 6 月于国立莫斯科大学

目 录

序言	vii
第一章 自由場的普遍理論	1
§ 1. 波动方程的不变性和波函数的变换规律	1
§ 2. 标量方程	5
§ 3. 研究标量場的变分法	6
§ 4. 标量場的角动量	10
§ 5. 标量波动方程的解	13
§ 6. 經典泊松括号	17
§ 7. 量子泊松括号	19
§ 8. 标量方程的量子化	20
§ 9. 波函数的对易关系式	29
§ 10. 复标量方程	32
§ 11. 复标量方程的量子化	36
§ 12. 电磁場的波动方程	40
a) 麦克斯韦方程的普遍理論 b) 规范不变性 c) 能量张量与角动量张量	
§ 13. 麦克斯韦方程的解	45
§ 14. 橫向电磁場的量子化	47
§ 15. 場的量子化势的对易关系式	50
§ 16. 在普遍情况下电磁場的量子化	52
§ 17. 旋量方程(狄喇克方程)	56
a) 标量方程算符的綫性化 b) 电子的力矩和磁矩 c) 向泡利方程的过渡 d) 电荷密度和电流密度	
§ 18. 波函数的张量量綱	66
a) 方程相对于時間空間轉动(洛伦兹变换)的不变性 b) 方程相对于空間轉动的不变性 c) 规范不变性	
§ 19. 狄喇克矩陣的张量量綱	70
a) 矩陣 α b) 矩陣 γ	
§ 20. 自由粒子的狄喇克方程的解	74
§ 21. 矩陣元的計算	77
§ 22. 变分法	82
a) 拉格朗日函数 b) 能量张量 c) 自旋张量 d) 四維电流密度	
§ 23. 旋量方程的量子化	88
a) 場的能量、电荷和自旋 b) 狄喇克方程的玻色-爱因斯坦二次量子化	
c) 旋量方程的費米-狄喇克二次量子化 d) 具有正能量和負能量的解的	

物理意义	а) 狄喇克方程相对于空间和时间反演的不变性	电荷共轭变换	е) 弱相互作用下宇称守恒律的破坏	ж) 具有定向自旋的中微子的理論	з) 在有定向自旋的中微子参与下基本粒子的最简单的嬗变	и) 粒子数函数	к) 量子化波函数的对易关系式	
第二章	电子与二次量子化电磁场的相互作用							112
§ 24.	相互作用的普遍公式							112
	а) 拉格朗日量	б) 能量张量	в) 混合场的量子化					
§ 25.	纵向分量的消除·库仑定律							118
§ 26.	布雷特公式·横向本征能量							129
	а) 布雷特公式	б) 电子的本征横向能量						
§ 27.	偶极辐射·爱因斯坦系数							139
	а) 在量子力学中问题的提出		б) 在量子电动力学中问题的提出					
	в) 量子理論的适用范围		г) 爱因斯坦系数的計算					
§ 28.	“发光”电子理論							156
	а) “发光”电子的輻射的主要特点		б) 在恒定均匀磁场中超相对論性电子按量子理論的运动					
	в) 自发跃迁		г) 在計及极化效应的經典近似中“发光”电子輻射的研究					
	д) “发光”电子的輻射的实驗研究		е) “发光”电子理論中的量子效应					
	ж) 量子涨落对径向振蕩的影响		з) 在研究电子感应加速器式和同步回旋加速器式振蕩时量子效应的准經典考虑					
	и) 测不准关系式和涨落理論							
§ 29.	光电效应·电离原子对电子的俘获							203
	а) 光电效应的量子理論		б) 电离原子对电子的俘获					
§ 30.	計及阻尼时的輻射·譜綫的自然宽度							216
	а) 經典理論		б) 量子理論					
§ 31.	粒子按阻尼理論的弹性散射							224
	а) 归一化关系式		б) 阻尼理論的基本方程		в) δ 势对粒子的散射			
	г) 短程作用力心对粒子的散射		д) 在湯川势上的散射					
§ 32.	电子与光子場的相互作用							239
	а) 輻射几率		б) 契倫柯夫效应的量子理論					
§ 33.	光的色散							249
	а) 非相对論性理論		б) 色散公式		в) 联合散射			
§ 34.	自由电子对光的散射							280
	а) 普遍公式		б) 克萊因-仁科芳雄公式					
§ 35.	計及阻尼时光的散射							272
	а) 分立譜的阻尼理論		б) 連續譜的阻尼理論					
§ 36.	庫仑中心对带电粒子的弹性散射							288
	а) 卢瑟福公式从經典理論的导出		б) 量子的散射理論		в) 对电子壳层的考虑			
	г) 电子束极化性质的研究		д) 在更高级近似中的极化效应					
	е) 电子束在具有电荷和磁矩的力心上散射时的极化效应							

§ 37. 轫致辐射	311
a) 准經典理論 б) 量子理論 в) 非相對論性情形(倫琴射綫的連續譜) г) “紅外灾难” д) 普遍情形 е) 消耗于轫致辐射的能量損失 ж) 电离損失 з) 总的能量損失	
第三章 正电子理論	334
§ 38. 正电子理論的基础	334
§ 39. 光子形成的电子偶	337
§ 40. 正电子的质湮	346
a) 双光子式质湮 б) 质湮的几率对自旋取向的依賴关系 в) 三光子式质湮 г) 氦	
§ 41. 級联簇射理論	365
a) 电子組份的产生 б) 級联簇射理論	
第四章 电子-正电子真空理論	381
§ 42. 格林函数	381
a) 問題的提出 б) 电磁場的格林量 в) 狄喇克方程的格林量 г) 电荷共轭變換 д) 电子-正电子真空的对称理論 е) 相互作用場的格林量 ж) 洛伦茲条件	
§ 43. 几个最简单的效应的研究	412
a) 总述 б) 一阶效应 в) 二阶和三阶效应 г) 計及真空項时的二阶效应 д) 相互作用的非交換部分 е) 相互作用的交換部分	
§ 44. 相互作用的交換部分的研究	427
a) 普遍公式 б) 自由电子的場质量 в) 各种規則化方法 г) 电子的电矩和磁矩的場致部分的計算 д) 相互作用能的漲落部分的計算 е) 紅外灾难的消除	
§ 45. 电子-正电子真空的极化	455
a) 普遍公式 б) 光子的場质量 в) 电荷的場附加量 г) 极化能量 д) 总的相互作用能	
§ 46. 氢原子的問題与真空理論	464
a) 問題的提出 б) 原始的量子理論 в) 精細結構 г) 非相對論性波动方程 д) 相对論性薛定諤方程 е) 狄喇克方程 ж) 角动量 з) 状态的宇称 и) 狄喇克方程的解的近似形式 к) 选择定則 л) 精細結構 м) 由真空項制約的能級位移 н) 自由运动的情形 о) 在計及阻尼时短程作用力心对狄喇克粒子的散射	
§ 47. 塞曼效应	521
a) 洛伦茲的經典理論。 б) 基于非相對論性波动力学的理論 в) 自旋效应的考虑 г) 正常塞曼效应 д) 反常塞曼效应 е) 电子的附加磁矩	
§ 48. 原子核对原子光譜的影响	532
a) 氢原子光譜的超精細結構的理論 б) 电子附加磁矩的測定	

§ 49. 两个相对論性粒子的碰撞	540
a) 問題的提出 b) 两个自由电子之間的碰撞 B) 正电子和电子的碰撞。 r) 繆勒公式和巴巴公式的实驗驗証	
§ 50. 电子的近似的[包含与 $(v/c)^2$ 同数量級的項的]相对論性理論	561
a) 狄喇克方程的二級近似 b) 开普勒問題 B) 电偶极輻射、磁偶极輻射和电四极輻射 r) 氫原子的光譜 A) 氫原子能級的精細結構与超精細結構	
§ 51. 介原子	590
a) μ^- 介原子的光譜 b) 真空极化对介原子中能級位移的影响 B) μ^- 介子对核反应的催化作用	
人名对照	611
內容索引	614

第一章 自由場的普遍理論

§ 1. 波动方程的不变性和波函数的變換規律^①

按照狹義相對論，描述任何基本粒子的運動的波動方程，都不應該依賴於坐標系的選擇，也就是說，在從一個慣性坐標系變換到另一個慣性坐標系時，這些方程的形狀應該保持不變。

既然這個要求是許多實驗事實的總結，所以在物理學發展的現階段，它通常被用來作為建立基本粒子理論的基礎^②。

從這一點出發，我們便可以得到波函數的變換規律，也就是說，可以確定波函數 ψ 的張量量綱。

在構成電荷和電流密度、能量張量等時（對於綫性方程來說，它們是由波函數 ψ 的二次組合形成的），必須考慮到，它們應該是四維的實張量。

在從一個坐標系（ $x^\alpha = x, y, z, ct$ ）變換到另一個坐標系（ $x'^\alpha = x', y', z', ct'$ ）時^③，張量的各個分量應該按照一定的法則變換。

例如，在這種變換中，標量（零秩張量）保持不變：

$$\varphi' = \varphi. \quad (1.1)$$

① 與波動方程的不變性有關的問題，在伊凡寧柯和索科洛夫的專論“經典場論”中（以下簡稱“經典場論”）有較詳細的敘述。[見中譯本，黃祖洽譯，科學出版社，1953，103—112頁。]

② 由於宇稱不守恆的發現，關於波動方程相對於空間時間反演的不變性的問題應重新加以研究。目前這種提法還只牽涉到弱相互作用的情形（較詳細的討論見§ 23 段）。

③ 在這裡和以後，拉丁字母輪流具有 1, 2, 3 等值，而希臘字母則輪流具有 1, 2, 3, 4 等值。此外，除非特別聲明，當存在着兩個具有相同標號的量時，總是意味着按這個標號求和。

矢量(一秩張量)按照下面的規律變換:

$$A'^{\alpha} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} A^{\mu} \quad (\text{反變矢量}) \quad (1.2)$$

或

$$A'_{\alpha} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}} A_{\mu} \quad (\text{協變矢量}) \quad (1.3)$$

構成二秩張量的量則遵循下列變換規律:

$$A'^{\alpha\beta} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\nu}} A^{\mu\nu} \quad (\text{反變張量}), \quad (1.4)$$

$$A'_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\beta}} A_{\mu\nu} \quad (\text{協變張量}), \quad (1.5)$$

$$A'^{\alpha}_{\beta} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\nu}} A^{\mu}_{\nu} \quad (\text{混合張量}). \quad (1.6)$$

這些變換規律很容易推廣到更高秩張量的情形上去。應該指出，點的空間時間坐標是按照(1.2)的規律變換的，因此，這些坐標的集合就構成了反變矢量。

假如撇開對基本粒子影響較小的萬有引力不談，那麼，在研究場時，就可以只限於討論慣性系統。

在一般情況下，從一個慣性坐標系到另一個慣性坐標系的變換，就是把一個參考系相對於另一參考系平行遷移後再加上其相對的四維轉動。

因為在平行遷移中只改變了參考系的原點，所以在兩個坐標之間便存在着下面的關係：

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + a^{\mu}. \quad (1.7)$$

在空間轉動時，譬如在繞 z 軸轉動一個角度 φ 時，我們有

$$\left. \begin{aligned} x' &= x \cos \varphi + y \sin \varphi, \\ y' &= -x \sin \varphi + y \cos \varphi, \\ z' &= z, \quad t' = t. \end{aligned} \right\} \quad (1.8)$$

最後，洛倫茲變換具有如下形式：

$$x' = \frac{x - vt}{k}, \quad y' = y, \quad z' = z,$$

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{k},$$

式中 $k = \sqrt{1 - \beta^2}$, 而 $v = c\beta$ 是一个坐标系相对于另一坐标系运动的速度。

引入双曲线函数, 令

$$\text{ch } \gamma = \frac{1}{k}, \quad \text{sh } \gamma = \frac{\beta}{k}, \quad (1.9)$$

我們便可以把上面的变换表示成如下形式:

$$\left. \begin{aligned} x' &= x \text{ ch } \gamma - ct \text{ sh } \gamma, \\ ct' &= ct \text{ ch } \gamma - x \text{ sh } \gamma. \end{aligned} \right\} \quad (1.10)$$

用这些公式与公式(1.8)相比较, 我們便可看到, 洛伦兹变换相当于在空間時間平面上“轉动”一定的虛角度。

應該指出, 在作平行迁移及在空間轉动时, 反变张量和协变张量的变换规律是相同的, 因为 $\frac{\partial x'}{\partial y} = \frac{\partial y}{\partial x'}$, ……等等; 但在作空間時間旋轉时則不相同, 这可从 $\frac{\partial x'}{\partial ct} = -\frac{\partial ct}{\partial x'}$, ……等关系式中看出。

假如在形式上引入一个虛的分量来代替時間 ($x_4 = x, y_4 = y, z_4 = z, i'ct$)^①, 那末, (1.10)的变换就具有如下形式:

$$\left. \begin{aligned} x'_1 &= x_1 \cos \alpha + x_4 \sin \alpha, \\ x'_4 &= x_4 \cos \alpha - x_1 \sin \alpha, \end{aligned} \right\} \quad (1.11)$$

式中 $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + (i'\beta)^2}}, \quad \sin \alpha = \frac{i'\beta}{\sqrt{1 + (i'\beta)^2}}.$

① 我們將引入两个虛量 i 和 i' . 这两个量的平方應該彼此相等:

$$i'^2 = i^2 = -1. \quad (1.12)$$

但是在变换为其共軛值时, 这两个量應該有所不同:

$$i'^+ = -i, \quad i'^- = i'. \quad (1.13)$$

我們引入量 i' 是为了把反变分量和协变分量等同起来:

$$A^0 = A_4 = A, \quad -i'A_4.$$

在這種情況下，很容易表明

$$\frac{\partial x'_1}{\partial x_4} = \frac{\partial x_4}{\partial x'_1},$$

也就是說，對於反變分量和對於協變分量來說，變換規律是相同的，因此我們可以不必把它們區別開來。

下面我們將列舉可從其二次形式構成實張量的各種波函數。

1) 標量或價標量函數，它們在一般情形下可能是複數。如同後面將要表明的，標量方程適於描述自旋等於零的粒子的運動。

2) 四維的實矢量或複矢量 $A_\mu (A, A_4)$ ，這種矢量的分量的導數可以構成二秩反對稱張量

$$H_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}.$$

我們也可以取價矢量來代替矢量。就中具有零靜止質量的實矢量波動方程可描述光子場(麥克斯韋方程)。滿足矢量和價矢量方程的粒子所具有的自旋等於1(以 \hbar 為單位)。

3) 其波函數構成二秩對稱張量

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$$

(十個分量)的方程描述自旋等於2的粒子的行徑。例如，引力場在綫性近似中就遵循着實波動方程，並且與場相對應的引力子的靜止質量等於零。

4) 還可以用旋量(即半整數秩張量)來作為波函數。

旋量的普遍變換規律將在§18中研究。應該指出，它們與一般張量的變換規律不同。但是，從旋量的二次形式可以構成實張量。具有複函數的旋量方程描述着自旋等於 $\frac{1}{2}$ 的粒子的運動。

在本章里，我們要討論自由場的量子化。這裡我們不準備建立具有任意自旋的粒子的普遍理論，而把我們的課題限於研究標量場(§2—§11)、電磁場的矢量方程(§12—§16)與描述電子和正