头脑风暴译丛

φ的故事

解读黄金比例

長春出版社

φ的故事

——解读黄金比例

图书在版编目（CIP）数据

φ的故事：解读黄金比例 /（美）马里奥·利维奥著：刘军译.
—长春：长春出版社，2003.8
（头脑风暴译丛）
ISBN 7-80664-588-8

Ⅰ.φ…　Ⅱ.①马…②高…　Ⅲ.黄金分割法—普及读物
Ⅳ.0224—49

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2003）第 064810 号

责任编辑：许加澍　封面设计：刘　洋
策划编辑：张陆武

长春出版社出版
（长春市建设街 1377 号）
（邮政编码 130061　电话 8569938）
长春大图视听文化艺术传播中心设计制作
长春新世纪印业有限公司印刷
新华书店经销
880×1230 毫米　32 开本　10.25 印张　240 千字
2003 年 8 月第 1 版　2003 年 8 月第 1 次印刷
印数：1-10 000 册　定价：22.00 元

目　录

序　言

《黄金比例》是一本关于一个数字的书——这是一个非常特别的数字。在艺术史讲座中，你会遇到这个数字——1.61803…而且，在数学家编辑的《喜爱的数字》清单中，也能找到它。同样引人注目的是，这个数字还是许多心理试验的主题。

我是在 15 年前准备一个有关物理美学的讲座时，对它产生兴趣的。自此，我就再也没有能够将这个数字从我的脑海中抹掉。

许多不同学科的同事、朋友和学生对本书做出了直接或者间接的贡献，在此难以一一列举。我要特别感谢伊夫斯·阿兰·包耶斯、米奇·芬格堡、希勒·高奇曼、泰德·希尔·罗恩·利夫兹齐斯·罗杰·彭罗斯、约翰纳·鲍斯

特玛、保罗·斯坦因哈特、帕特西尔、安尼·万·德·赫尔姆、迪瓦卡·威斯万斯和史蒂芬·沃尔夫兰提供了宝贵的资料和有益的探讨。

感谢我的同事丹尼拉·卡尔扎蒂、斯特夫诺·卡斯坦诺和马西莫·斯蒂亚维利提供了拉丁语和意大利语的翻译,感谢克劳斯·莱塞雷和赫尔梅因·兰德特提供德语翻译的帮助,感谢佩特里克·高登提供法语的翻译。莎拉·史蒂文斯·拉本、伊丽莎白·弗莱塞和兰西·汉克斯为我提供了宝贵的文献和语言方面的支持。特别感谢沙龙·图兰在手稿准备阶段提供的协助。

真诚感谢我的代理人,苏珊·拉宾纳在本书写作之前和写作之时给我的慷慨鼓励。

深深地感谢百老汇双日公司的编辑格兰特·霍华德,他仔细阅读了本书的草稿,并提出了中肯的建议。同样感谢丽贝卡·霍兰德——百老汇双日公司的出版经理,在本书付印过程中,她提供了始终如一的帮助。

最后,感谢苏菲·利维奥,因为她的不断激励和耐心支持,我才得以完成此书。

注:由于原书中所使用的是英制计量单位,若将其一一改正将使所有数字成为近似值,进而失去原书的风格。故为保证原书风格不变,本书的计量单位采用英制单位。具体换算方法如下:1 英尺=0.3048 米,1 英寸=2.54 厘米。

一　数字的序幕

世界奇观知多少
——萨福克里斯(前 495—前 405)

著名英国物理学家卡尔文爵士（威廉·汤姆森，1824—1907）——绝对温度单位就是以他的名字命名的——曾经在一次演讲中说：“当你不能用数字来表达时，你的知识就不能说是充分和令人满意的。”当然，卡尔文的这番话是就科学进步而言的。但是数字和数学的确有一种奇怪的倾向，就是能够帮助我们理解那些与科学关系甚远（至少看上去是这样）的事物。在爱伦·坡的《玛丽·罗杰特的秘密》中，著名侦探家奥古斯特·杜宾说：“我们使运

气成为一种真正意义的计算，我们用学校的数学公式来研究那些不被关注和难以想像的事物。”举一个简单的例子，您在准备晚会时可能会碰到下面的问题：将一块巧克力分成 12 份，你要折多少次才能完成？答案实际上比你想像的要简单得多，而且它几乎不需要什么计算：你每折一次就会多出一小块，因此如果你要分成 12 小块，就需要折 11 次（请自己验证）。总之，不论需要的巧克力的总数是多少，折断次数总是等于你所需要的小块总数减一。

即使你不爱吃巧克力，你也可以通过这个例子了解一个能够适用于许多其他情况的简单数学法则。不过，除了数学属性、公式和法则外（许多我们可能已经忘记了），还存在着一些使我们永远感到惊奇的特殊数字。最著名的就是π，这是任意圆的圆周和直径的比值。π曾经使多少代数学家魂牵梦萦。虽然π最初是在几何学上意义的，但是它在概率的计算上也常有意想不到的应用。一个著名的例子就是“布丰之针”。这是为纪念法国数学家乔治斯·路易斯·勒克莱尔·德·布丰而命名的，他提出并于 1777 年解决了这个难题。勒克莱尔提出了这样一个问题：假定地上有一张较大的纸，用直尺画几条平行直线，彼此保持相同的间隔距离，将一根长度恰好等于直线之间距离的针随机地扔在纸上，问针与其中一根直线相交的概率是多少？（如图 1 所示）令人惊讶的是，答案是 2/π。原则上，您可以通过多次重复进行这样的实验并观察相交次数占扔针总次数的比例来测算π的值（当然还有更简明的方法来

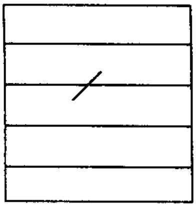

图 1

测算π)。π现在已经成为一个家喻户晓的词，以至于电影导演达仁·阿罗诺夫斯基还由此得到启发，拍摄了一部以“π”为标题的智力科幻片。

另一个名气比π差一点的数字是φ，在许多方面它比π更有吸引力。例如我问你：萨尔瓦多·达利的名画《最后的晚餐》中红玫瑰花瓣的排列、软体动物华丽的螺旋形贝壳以及兔子的繁殖有什么共同的地方？令人难以置信，但是自古以来人们就确信这些各不相同的事物中存在着某一个数字或某种几何比例，这个数字在 19 世纪被尊称为“黄金数”或称“黄金比例”，在 16 世纪初的意大利出版的一本书中更是把它称为“神圣比例”。

在日常生活中，我们使用“比例”这个词用来表示事物各个部分之间大小和数量的对比关系，或者用它来描述不同事物之间的协调关系。在数学中，“比例”用于描述类型的等同性：9 相对于 3 和 6 相对于 2 是相同的。正如我们所看到的，黄金比例为我们提供了两种定义的相关综合，用数学的话来说，就是具有令人满意的和谐品质。

最初对黄金比例进行明确定义是在公元前 300 年左右，由几何学归纳法的创始人欧几里德提出的。我们再到第四章来看一看欧几里德和他令人惊叹的成就吧！在此之前我要说明：欧几里德非常受人崇拜，诗人爱德加·圣·文森特·米莱写过一首诗，标题就是《欧几里德追求纯粹的

美》，甚至米莱的几何学课笔记本至今仍保存完好。欧几里德从简单的直线中确定了一种比例，并把这个比例称为“极限中间比”。用他的话来说就是：

一条直线按所谓极限中间比分割后，这时整条直线和较大部分的比值等于较大部分和较小部分的比值。

图 2

换句话说（我们看图 2），AB 直线当然要比 AC 部分长，而 AC 部分比 CB 部分长，如果 AC 长度和 CB 长度的比值与 AB 和 AC 长度的比值相同，那么这条直线就是按极限中间比分割的，或者说它是按照黄金比例分割的。

谁能想到，欧几里德出于纯几何的目的而提出的貌似简单的直线分割会产生如此广泛的影响——从植物叶子的分布，到包含亿万星体的银河系，从数学到艺术。黄金比例为我们提供了一个连著名物理学家爱因斯坦都高度评价的绝对惊奇的范例。爱因斯坦说：“我们所能经历的最美好的事物是神秘，这是真正的艺术和科学的摇篮中的基本情感；对未知的事物不感到好奇的人，与行尸走肉和熄灭的蜡烛没什么两样。”

正如我们在书中通过计算将要看到的，黄金比例（图 2 中 AC 和 CB 的比值）是一个永无穷尽、永不重复的数字 1.6180339887…这个永无穷尽的数字自古以来就触动了

人们的好奇心。传说麦特蓬托姆的希腊数学家西帕瑟斯在公元前5世纪发现黄金比例既不是一个整数（如我们熟悉的1、2、3），也不是两个整数的比值（如分数1/2、2/3、3/4…总称为有理数）。这使得著名数学家毕达哥拉斯的信徒们（毕达哥拉斯学派）极为震惊，因为毕达哥拉斯学派的世界观（详见第二章所述）是建立在对运算——整数或整数之间比值的内在属性——和它们在宇宙中地位的极端崇拜之上的。人们意识到黄金比例这样的数字可以没有任何重复和规律地无限延续下去，从而导致了哲学观念上的危机。甚至还传说由于这项大发现，毕达哥拉斯学派宰杀了100头牛作为祭品——虽然这看上去不太可能，因为毕达哥拉斯学派的人都是素食主义者。在这一点上我要强调，许多传说无法用充分的历史材料证实，如发现这个既不是整数也不是分数的所谓无理数的准确日期就无法确认。一些研究者认为发现的日期是公元前5世纪，因为它至少和传说的日期相一致。可以肯定的是毕达哥拉斯学派的人对这些数字的存在感到恐惧，他们认为这可能是宇宙的某种错误，必须进行压制，而不能公之于众。

实际上黄金比例不能用分数来表达只是说明图2的AC和CB长度不能用分数来表达。换句话说，不论我们如何努力寻找，都无法找到包含在其中的某种通用量度单位，从而使AC是它的31倍，CB是它的19倍。这样两个没有共同量度单位的长度我们称之为无理数。在我们发现黄金比例是一个无理数的同时，也发现了它的不可通约

性，在《毕达哥拉斯的一生》中，叙利亚贵族的后代、哲学家和历史学家伊安布里齐斯（*iamblichus*）描述了该发现所产生的巨大反响：

据说第一个向那些不配理解这个理论的人揭示可比性和不可通约性本质的人遭到了不同寻常的憎恨，以至于他被排除在毕达哥拉斯学会和日常生活之外，甚至他的坟墓都被建造好了，似乎他以前的同事认为他已经不属于人类。

在专业的数学文献中，黄金比例的符号通常是希腊字母T（希腊语托米，意思是分割或分段），但是在20世纪初，美国数学家马克·巴尔把该比例命名为菲（φ），是伟大的希腊雕刻家菲迪亚斯（约前490—前430）姓名的第一个字母。菲迪亚斯的伟大作品包括雅典的“帕台农神庙的雅典娜”和“奥林匹亚神庙的宙斯神像”，一般都认为他曾负责过许多其他帕台农雕塑的创造，尽管很可能其中许多都是他的学生和助手所为。巴尔之所以决定把这一荣誉给他，是因为许多艺术史学家认为菲迪亚斯经常在雕塑中精细地运用黄金比例（本书中我们会对类似的说法进行仔细研究）。我将在本书中交替使用黄金比例、黄金分割、黄金数、菲以及符号φ作为其名称，因为这些是通俗数学著作中经常出现的名词。

历史上一些伟大的数学家——从古希腊的毕达哥拉斯和欧几里德，到中世纪比萨的意大利数学家莱昂纳多，文艺复兴时期的天文学家约翰尼斯·开普勒，以及当今科学

名人如牛津物理学家罗杰·彭罗斯——都对这个看似简单的数率问题及其本质投入了大量的精力。然而，黄金比例不仅对数学家有吸引力，生物学家、画家、音乐家、历史学家、建筑师、心理学家乃至神秘主义者都在思考和讨论它的普遍性和影响力。事实上，这样说可能公平一点：在数学历史上再没有一个数字，能像黄金比例那样激发所有学科探索人士的灵感。

例如加拿大数学家罗杰·赫兹·菲齐勒所做的大量研究（见载于其著作《黄金数字的数学史》），其目的只在研究“黄金分割”这个名称的起源。由于对黄金比例的热情源自古代，我们或许会认为这个名称也来自古代；事实上，一些数学史的权威著作，如弗朗西斯·拉塞尔《柏拉图时代数学的诞生》和卡尔·B·伯耶尔的《数学史》都认为这个名称起源于15世纪和16世纪，但是这似乎也不大可能。根据我所能找到的历史资料，我发现这个名字最初是由德国数学家马丁·欧姆（著名物理学家格奥尔格·西蒙·欧姆的兄弟，电磁学的欧姆定律即以他的名字命名）提出的。在他的1835年再版的《纯粹基础数学》中，欧姆在脚注中写道：“人们还常常把任意直线的这种划分称为‘黄金分割’……”欧姆的语言清楚地向我们表明，他没有发明这个术语，而是使用了一个被广泛接受的名称。

但是实际上，他在该书的第一版（1826年出版）中没有使用这个名称，这说明“黄金分割”这个名称最早只是在19世纪30年代才流行起来。此前它也许在非数学领域

中被口头使用，但是毫无疑问，在欧姆的后一版书之后，“黄金分割”这个术语开始频繁出现在德国的数学和历史文献上。它最初出现在英语文献上是 1875 年大英百科全书第九版中詹姆斯·苏里所做的一篇有关美学的文章，苏里在文章中把“这个有趣的实验性问题”（19 世纪德国先驱心理学家和物理学家古斯塔夫·西奥多·费奇纳提出）归结为具有直观比例的黄金分割的所谓特殊性（我将在第七章中讨论费奇纳的这个实验）。最早出现在数学论文中的英语文献是 1895 年刊登在《美国数学月刊》上的一篇名为《黄金分割》（E ·阿克曼作）的文章。1898 年著名教师和作家 G ·克里斯陀（1851—1911）的著作《几何初步》中也出现了这个词汇。出于好奇，我查阅了 1900 年版法国百科全书中对“黄金数字”所做的惟一定义：“一个用于表示每年月运周期的数字。”它指的是 19 世纪历年的算法，即表示同一时期重复出现的闰年。很明显，这个词用了很长时间才进入法国的数学专用词汇里。所有这些都说明了什么？是什么使这个数字、这个几何学的比例，如此令人激动、令人关注？

黄金比例的迷人之处首先来自它出人意料的神秘现身。例如一个普通的苹果——一种和智慧之树相关的水果（可能是误解），在圣经中有关人类降生的叙述中它占有重要地位——你会发现苹果的种子形成一个五角星的形状，如图 3 所示。组成五角星一个角的等腰三角形具有这样的属性，即它的较长一边的长度和较短一边的长度的比例等

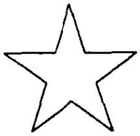

图 3

于黄金比例 1.618…。你也许会想，这有什么奇怪。毕竟，自从黄金比例被定义为几何比例之后，我们已经不再对几何形状上的其他发现感到惊奇了。

但是，这还只是冰山的一角。根据佛教传说，有一位佛在传教时一言不发，他只是在他的听众面前拿出一束花，这一束花告诉了我们什么？例如一朵玫瑰花，通常被看做是自然对称、和谐、爱和脆弱的象征。在《人类的宗教》中，印度诗人和哲学家拉宾德纳斯·泰戈尔（1861—1941）说："不知何故，我们会觉得通过一束玫瑰花可以传达我们的爱的语言。"如果你想确切地知道玫瑰的对称性，你可以拿一朵玫瑰进行分解，找出花瓣的相互重合部分，你会发现（如我在第五章中介绍的），花瓣的位置竟然是按照黄金比例的数学规则排列的。

现在我们到动物王国去看一看，我们对软体动物异常美丽的螺旋形躯壳非常熟悉（如鹦鹉螺，见图 4）。事实上，印度教传说中跳舞的湿婆神手中就拿着这

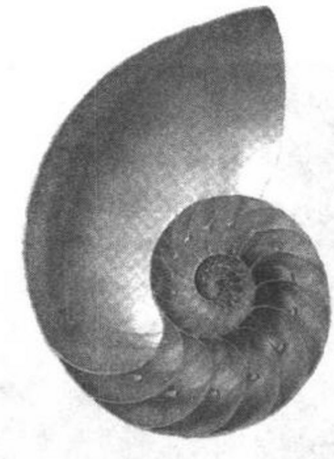

图 4

样的鹦鹉螺，作为她创造万物的工具；这些躯壳也启发了许多建筑工程，例如美国建筑师弗兰克·罗伊德·莱特（1869—1959）就根据鹦鹉螺的结构设计了纽约古根海姆博物馆。在博物馆内，参观者沿着螺旋形的斜坡而上，他们的艺术想像力就像软体动物的螺旋躯壳一样得到了充分的满足。我们会在第五章中发现，螺旋躯壳也符合黄金比例。

现在，我们不必像数字神秘主义者那样，因黄金比例出现在毫不相关的场合和环境下而产生恐惧。况且，正如我在本章开始所讲的，黄金比例不只在自然环境中可以找到，还可以在各种不同的人类活动以及艺术作品中出现。例如萨尔瓦多·达利 1955 年的绘画作品《最后的晚餐》（华盛顿特区国家展览馆，图 5），这幅画的尺寸（大约 105

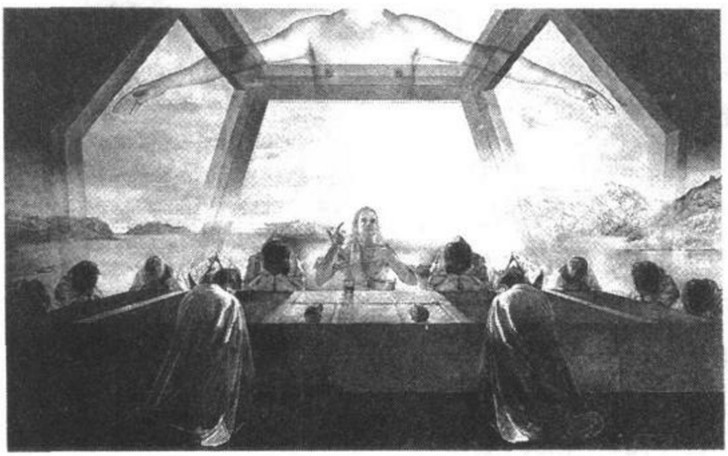

图 5