国家理科基地教材

数学核心教程系列/柴俊 主编

数学专业50学时课程

常微分方程

林武忠 汪志鸣 张九超 编著

5.1
7

科学出版社
www.sciencep.com

国 家 理 科 基 地 教 材

数学核心教程系列／柴俊主编

常 微 分 方 程

林武忠 汪志鸣 张九超 编著

教育部“世行贷款21世纪初高等教育教学改革项目”“面向21世纪高等师范教学改革项目”成果

科 学 出 版 社

北 京

内 容 简 介

本书作为数学系本科生的常微分方程教材，每周三节课（3个学分），主要内容有常微分方程初等解法和基本理论（Picard 定理、Peano 定理、解对初值的连续性和可微性定理）、线性方程、定性理论和稳定性理论. 此外，本书还给出了各种类型的微分方程的模型.

本书可供高等院校数学系本科二年级的学生作教材或参考书.

图书在版编目 (CIP) 数据

常微分方程 / 林武忠，汪志鸣，张九超编著. —北京：科学出版社，2003
国家理科基地教材·数学核心教程系列 / 柴俊主编
ISBN 7-03-011455-8

Ⅰ. 常… Ⅱ. ①林…②汪…③张… Ⅲ. 常微分方程-高等学校-教材 Ⅳ. O175.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2003) 第 033018 号

责任编辑：杨 波 吕 虹 / 文案编辑：彭 斌 姚 晖
责任校对：宋玲玲 / 责任印制：安春生 / 封面设计：黄华斌

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com
西源印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2003年9月第一版 开本：B5(720 × 1000)
2003年9月第一次印刷 印张：11 1/2
印数：1—4 000 字数：214 000

定价：17.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈路通〉)

序　言

自 20 世纪 90 年代后期开始，我国的高等教育改革步伐日益加快. 实行 5 天工作制，使教学总时数减少，而新的专业课程却不断出现. 在这样的情况下，对传统的专业课程应该如何处置，这样一个不能回避的问题就摆在了我们的面前. 而这时，教育部师范司启动了面向 21 世纪教学改革计划. 在我们进行 “数学专业培养方案” 项目的研究过程中，这个问题有两种方案可以选择：一是简单化的做法，或者削减必修课的数量，将一些传统的数学课程从必修课的名单中去掉，变为选修课，或者少讲内容减少课时；二是对每门课程的教学内容进行优化、整合，建立一些理论平台，减少一些繁琐的论证和计算，以达到削减课时，同时又能保证基本教学内容的目的. 我们选择了第二种方案.

当我们真正进入实质性操作时，才感到这样做的困难并不少. 首先，教师对数学的认识需要改变. 理论 “平台” 该不该建？在人们的印象中，似乎数学课程中不应该有不加证明而承认的定理，这样做有悖于数学的 “严密性”. 其实这种 “平台” 早已有之，中学数学中的实数就是例子. 第二个困难是哪些内容属于整合对象，优化从何处下手. 我们希望每门课程的内容要精练，尽可能地反映这门课程的基本思想和方法，重视数学能力和数学意识的培养，让学生体会数学知识产生和发展的过程以及应用价值，而不去过分地追求逻辑体系的严密性.

教材从 1998 年开始编写，历时 5 年，经反复试用，几易其稿. 在这期间，我们又经历了一些大事. 1999 年高校开始大幅度扩大招生规模，学生情况的变化，提示我们教材的编写要适应教育形势的变化，迎接 “大众教育” 的到来. 2001 年，针对教育发展的新形势，高教司启动了 21 世纪初高等理工科教育教学改革项目，在项目 “数学专业分层次教学改革实践” 的研究过程中，我们对 “大众教育” 阶段的学生状况有了更具体、更直接的了解. 在经历大规模扩招后，在校学生的差距不断增大，我们应该根据学生的具体情况，实行分层次、多形式的培养模式，每个培养模式应该有各自不同的教学和学习要求. 此外，教材的内容还应该为教师提供多一些的选择，给学生有自我学习的空间，要反映学科的新进展和新应用，使所有学生都能学到课程的基本内容和思想方法，使部分优秀学生有进一步提高的空间. 这个指导思想贯穿了本套教材的最后修改稿.

在建立 “理论平台” 与打好数学基础之间如何进行平衡，也是本套教材编写中重点考虑的问题. 其实任何基础都是随着时代的进步而变化的，面对科学技术的进步，对基础的看法也要 “与时俱进”. 新的知识充实进来，一部分老的知识就要被简化、整合，甚至抛弃. 并且基础应该以创新为目标，并不是什么都是越深越好、越厚越好. 在现实条件下，建立一些 “课程平台” 或 “理论平台” 是解决课时偏少的有

效手段，也可以使数学教学的内容加快走向现代化. 不然的话，100年以后，我们的数学基础大概一辈子也学不完了.

本套教材的主要内容适合每周3学时、总共50学时左右的教学要求. 同时，教材留有适量的选学内容，可以作为优秀学生的课外或课堂学习材料，教师可以根据学生情况决定.

教材的编写和出版得益于国家理科基地的建设和教育部师范司、高教司教改项目的支持. 我们还要对在本套教材出版过程中提供过帮助的单位和个人表示衷心的感谢. 首先要感谢华东师范大学数学系的广大师生自始至终对教材编写工作的支持，感谢华东师范大学教务处领导对教材建设的关心. 最后，感谢张奠宙教授作为教育部两个项目的负责人对本套教材提出的极为珍贵的意见和建议.

尽管我们的教材经过了多次试用，但其中仍难免有疏漏之处，恳请广大读者批评指正. 另外，如对书中内容的处理有不同看法，欢迎探讨. 真诚希望大家共同努力将我国的高等教育事业推向一个新阶段.

柴俊

2003年6月

于华东师范大学

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

前 言

在 20 世纪的 90 年代，由于科学技术的飞快发展，特别是计算机的广泛普及，许多有关计算机及其应用的学科逐渐成为数学本科的必修课程，例如“数学建模”、“数学实验”以及计算机的各种软件课程等等，因此原有的必修课程或者改为选修课（例如“数学物理方程”）或者减少课时．“常微分方程”就是从 4 个学分改为 3 个学分，这就是编写本教材的直接原因．此外，本学科的迅速发展也要求对教材进行改革．因此，一方面必须对原有教材进行删减、压缩、改编，以便保证后续课程的基本需要，另一方面又要求反映本学科的新发展和其他学科的新要求，这就是编写本书的基本指导思想．

首先，我们不仅给出一般的力学、物理的微分方程例子，而且还给出生态、环保、交通、经济等方面的微分方程模型，指出通常建立连续性模型的两种方法．其次，对于初等解法我们并不采取否定的做法，因为它们不仅是精确求解一阶常微分方程的几个简单有效方法，而且是开始学习微分方程的很好台阶．第三，我们给出利用不动点定理证明初值问题解的存在惟一性方法，因为它是研究各种微分方程定解问题基本理论的重要工具．第四，我们把线性微分方程式作为线性微分方程组的特殊情况进行处理，这不仅可以节省篇幅，而且使内容更具有系统性，当然我们也不忽略它的特殊性．第五，我们给出常系数线性方程组的 $\exp(At)$ 和基本解矩阵的具体计算方法．第六，为了许多力学、物理和其他实际问题的需要，我们还介绍了线性方程组和二阶方程式的边值问题，以及非线性初值问题的解对小参数的渐近展开，但都打上了“*”号，以便读者根据自己的能力、需要及兴趣等具体情况进行选择．第七，我们对动力系统及其极限集合等概念做了较详细的介绍，并且给出了二维定常系统的 Poincaré-Bendikson 原理以及极限环的分类．第八，我们在每章后面都给出一个小结，指出该章需要掌握的基本概念、基本理论和基本解题方法，并给出一些与该章有关的可以进一步思考的问题，其中打上“*”号的有一定难度．此外，在习题中也给出一些打“*”号的应用题目，让有余力的读者进一步思考和研究．

在本教材的试用过程中，刘永明教授和汪元培老师指出了不少问题和不足之处，并提出了很多建设性的建议，我们在此表示衷心的感谢．由于编者水平有限，错误在所难免，希望读者多加批评指正．

编者

2003 年 2 月

于上海

目　录

第一章　基本概念和初等解法

矛盾的对立统一法则是唯物辩证法最根本的法则，宇宙间的任何事物都是按照对立统一的法则在不断发展和变化. 函数就是自变量和因变量这两个互相对立又互相联系的对立统一，它既是事物发展变化过程的抽象，又是定量描述事物发展变化的理想工具. 但在许多科学、技术和实际工程问题中，却很难找到因变量与自变量 (可能不止一个) 之间的直接联系，而只能从其变化过程中求出自变量、因变量与 **因变量对自变量的变化率** 之间的关系式 (即微分方程，且可能不止一个). 虽然建立这种关系式也往往不是一件容易的事，但本学科的主要任务却是如何从这些关系式找出描述该事物发展过程的函数，即自变量与因变量之间的关系式.

本章首先利用一些例子来说明如何建立微分方程模型和微分方程的基本概念，其次给出能够利用初等方法求解的一阶常微分方程类型及其解法，最后介绍一阶常微分方程的主要基本理论问题.

§1.1　微分方程模型与基本概念

一、微分方程模型

1. 增长率问题

令 $x(t)$ 为 **某个量在时刻 t 的值**；这个量可以是某个力学、物理过程中如位移、速度、电流、电压等随时间变化的量，也可以是某类生物种群的数量，某个公司的资本存量，某个湖水中每单位体积的污染物质数量 (即污染浓度)，某种商品的销售量，某种传染病流行时病人的数量等等. 为了确定起见，假设它是某类生物种群的数量. 令 $b(t)$ 为 **在时刻 t 该类生物每单位时间每单位种群增加的数量**，即所谓 **瞬时出生率**；同样， $d(t)$ 记为 **瞬时死亡率**，即该类生物在时刻 t 每单位时间每单位种群减少的数量. 于是对 $\Delta t>0$，在区间 $[t,t+\Delta t]$ 中，该类生物种群数量的改变量为

$$x(t+\Delta t)-x(t)=\int_t^{t+\Delta t}[b(s)-d(s)]x(s)ds\,.$$

记 $\mu(t)\triangleq b(t)-d(t)$，并称它为该类生物种群数量的 **纯增长率**. 将此代入上式右边的被积函数，然后把等式两边都除以 Δt 即得

$$\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}=\frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t}\mu(s)x(s)ds\,,$$

令 $\Delta t \to 0$，从而推出 $\frac{dx}{dt} = \mu(t)x$，或者写成

$$\frac{1}{x}\frac{dx}{dt} = \mu(t). \tag{1.1}$$

显然，这里假设 $x(t)$ 对 t 可微. 值得注意的是在实际情况下，μ 往往还与种群数量 x 有关，即 $\mu = \mu(t,x)$. 于是当 $\mu(t,x)$ 为已知时，我们就得到一个含有 t，x 和 $\frac{dx}{dt}$ 的关系式

$$\frac{dx}{dt} = x\mu(t,x), \tag{1.2}$$

这就是 **纯增长率问题的微分方程模型**. 当 μ 为未知时，(1.1) 式左端可以作为纯增长率的定义.

(i) 当 $\mu(t,x) = k$ 为常数，并将"某类生物种群"设想为"某地区的人口"时，(1.2) 式就成为 **马尔萨斯 (Malthus) 人口发展方程**

$$\frac{dx}{dt} = kx. \tag{1.3}$$

由于人口数量 $x \neq 0$，故由上式得出 $\frac{1}{x}\frac{dx}{dt} = k$. 如果当 $t = 0$ 时，某地区人口的初始数量为 $x(0) = x_0 > 0$，则将等式 (1.3) 两边都从 0 到 t 积分之后，并加以整理即得

$$x(t) = x_0 e^{kt}.$$

由此可见，当 t 取离散值 $1,2,3,\cdots$ 时，人口就以 e^k 作为公比的几何级数增长.

(ii) 当把 $x(t)$ 看成一个池塘中某种鱼类的种群数量时，就存在一个该池塘能够容纳生存该种鱼类的最大种群数量 x_f，即所谓该池塘对该种鱼类的 **包容量**；这时该种鱼类种群数量的纯增长率可取为 $\mu = r\left(1 - \frac{x}{x_f}\right)$，因此方程 (1.2) 就成为

$$\frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{x_f}\right), \tag{1.4}$$

这里常数 $r > 0$ 称为该种鱼类的 **固有增长率**.(1.4) 就是所谓的 **logistic 方程**，它比 (1.3) 更准确地反映了生物种群数量在其食物、生存空间受到约束情况下的增长过程.

类似地，对于某种耐用商品 (例如彩电、冰箱等) 的销售量 $x(t)$ 也可用 logistic 方程来描述，即该商品的 **销售速度** $\frac{dx}{dt}$ 与销售量 x 和消费者持有该种商品饱和程度 $a - x$ 的乘积 $x(a-x)$ 成正比，即

$$\frac{dx}{dt} = kx(a-x),$$

其中， $k>0$ 为比例常数； a 为消费者可能购买该种商品的最大数量 (即 **饱和水平**). 对于诸如粮食、纸张之类的高损耗商品，其销售量的数学模型是否也可以这样建立呢？

(iii) 当发现一个体积为 V 的湖泊受到严重污染时，若立即切断一切污染来源、停止向湖中排放任何污染物质，则这时每单位体积湖水的污染物 $x(t)$ (即污染浓度) 的纯增长率为 $\mu=-\dfrac{r}{V}$ ，这里 **流量** r 为每单位时间流入 (假设也等于流出) 该湖泊水的体积. 令 $k=\dfrac{r}{V}$ ，于是有

$$\frac{dx}{dt}=-kx\,.$$

在此我们称 $\dfrac{1}{k}$ 为 **排水时间**，它表示用流量 r 排干该湖泊全部湖水所需要的时间. 不难算出，为使污染浓度降低到初始浓度的 5% ，所需要的时间 $t_{0.05}=\dfrac{\ln 20}{k}\approx\dfrac{3}{k}$. 例如北美五大湖中的 Superior 湖，其湖水体积约为 $12\,221\times 10^9$米^3 ，平均流量为 $178\,619\,904$米^3/ 天，从而它的 $t_{0.05}\approx 562$ 年，可见湖泊一旦受到污染，要消除它并不容易.

2. RLC 电路问题

在 RLC 电路中，一般含有电阻 R 、电感 L 、电容 C 和电源 $e(t)$ 等元件，而常用电路中随时间 t 而变化的电压 $V(t)$ 或电流 $I(t)$ 或电量 $Q(t)$ 作为待求的未知函数；显然自变量为时间 t ；其中 I 与 Q 之间还有关系式 $I=\dfrac{dQ}{dt}$.

上面关于 **纯增长率的数学模型是根据事物变化过程的机理，用无穷小分析的方法来建立的，而 RLC 电路的数学模型却是根据已知物理定律来推导的**，即根据 **Kirchhoff 关于电压和电流的两条定律**:(a) **在电子回路中任何闭合支路电位的代数和为零** (KVL)； (b) **在电路中任一节点处电流的代数和为零** (KIL). 此外，从电学中我们还知道，当电流流经电阻 R 、电感 L 和电容 C 时所产生的电压降 V 应分别为 RI 、 $L\dfrac{dI}{dt}$ 和 $\dfrac{Q}{C}$.

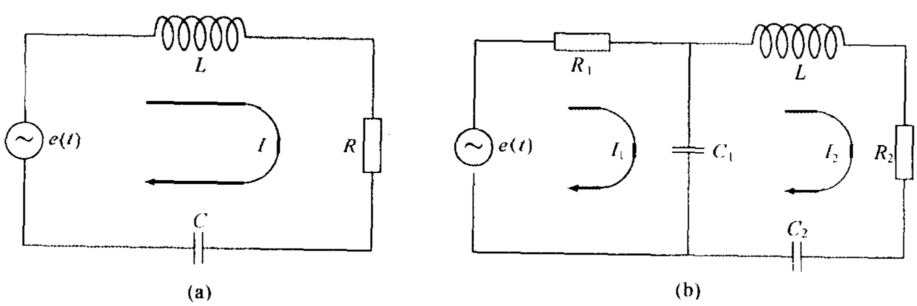

图 1.1 RLC 回路

利用 Kirchhoff 定律和这些关系式我们就可以建立 RLC 电路的微分方程模型，例如图 1.1 所示的两个 RLC 电路：

(i) 对于图 1.1(a) 的回路，应用 KVL 即得

$$L\frac{dI}{dt}+RI+\frac{Q}{C}=e(t),$$

或者写成关于电量 Q 的微分方程

$$\frac{d^2Q}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{dQ}{dt}+\frac{1}{LC}Q=\widetilde{e}\,(t),\quad \widetilde{e}\,(t)=\frac{e(t)}{L}. \tag{1.5}$$

(ii) 同样对于图 1.1(b) 的两个回路，应用 KVL 可得

$$\begin{cases} R_1I_1+\dfrac{Q_1-Q_2}{C_1}=e(t), \\ R_2I_2+\dfrac{LdI_2}{dt}+\dfrac{Q_2}{C_2}+\dfrac{Q_2-Q_1}{C_1}=0; \end{cases}$$

两边对 t 求导后，并经整理即得关于 I_1,I_2 的联立微分方程组

$$\begin{cases} \dfrac{dI_1}{dt}+\dfrac{1}{R_1C_1}(I_1-I_2)=\dfrac{1}{R_1}\dfrac{de}{dt}(t), \\ \dfrac{d^2I_2}{dt^2}+\dfrac{R_2}{L}\dfrac{dI_2}{dt}+\dfrac{C_1+C_2}{LC_1C_2}I_2-\dfrac{1}{LC_1}I_1=0. \end{cases} \tag{1.6}$$

3. 经典力学模型

为了建立这类模型，我们的主要依据是 **Newton 第二定律**，即

$$F=ma, \tag{1.7}$$

其中，m 为做直线运动物体的质量；a 为其加速度；F 为作用在该物体上的总外力，它一般为自变量时间 t、位移 x 和速度 $\dot{x}\triangleq\dfrac{dx}{dt}$ 的已知函数.

(i) **弹簧上的物体问题**　首先，在下面的图 1.2(a) 中，质量为 m 的物体沿 x 方向作水平直线运动，它除了受 **弹簧系数**(使弹簧伸长或缩短单位长度所需的力) 为 k 的弹簧力作用外，还受到底部摩擦力的作用；前者的方向总是指向原点 $x=0$，而后者的方向则总是与运动速度 $\dot{x}$ 相反，于是由 (1.7) 即得

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-kx-\mu mg\,\mathrm{sgn}(\dot{x}),$$

或者写成

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\mu g\,\mathrm{sgn}\left(\frac{dx}{dt}\right)+\frac{k}{m}x=0,$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

其中 μ 为摩擦系数； $\mathrm{sgn}(y)$ 为 y 的符号函数.

其次，在图 1.2(b) 中，弹簧上物体的运动方程为

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-kx-n\frac{dx}{dt}+mg,$$

其中 n 为空气的阻尼系数，且假设物体的空气阻力与物体的运动速度成正比；而 g 为重力加速度. 若把坐标原点移到 $x=\frac{mg}{k}$ 处，则上面方程可写成

$$\ddot{x}+\tilde{n}\dot{x}+\tilde{k}x=0, \tag{1.8}$$

其中 $\tilde{n}=\frac{n}{m}, \tilde{k}=\frac{k}{m}>0, \dot{x}=\frac{dx}{dt}$. 这时当 $\tilde{n}=0$ 时，就称 (1.8) 为**简谐方程**.

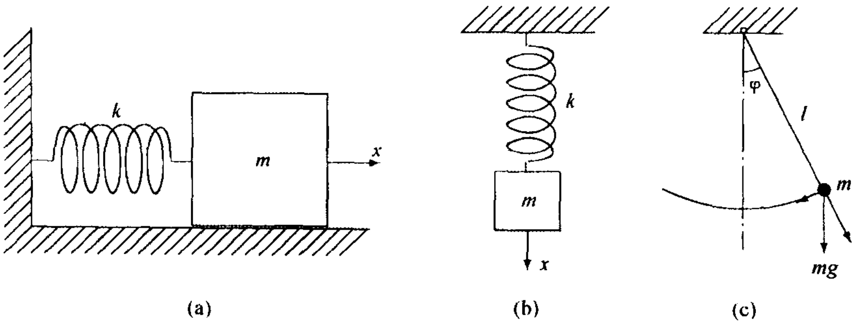

图 1.2 弹簧、物体和单摆

一般来说，弹簧的变形并不与它所受到的外力成正比，而是位移 x 的一个满足 $g(0)=0$ 的非线性函数 $g(x)$ (这时当位移 x 很小时，可取 $\tilde{k}\approx g'(0)$) ，于是若再忽略由速度 $\dot{x}$ 引起的阻力，则 (1.8) 就成为所谓的 **自由振动方程**

$$\frac{d^2x}{dt^2}+g(x)=0. \tag{1.9}$$

同样，若阻尼系数 $\tilde{n}$ 不仅不为零，还与位移 x 有关，即 $\tilde{n}=f(x)$ ，则 (1.8) 就是所谓的 **Liénard 方程**

$$\frac{d^2x}{dt^2}+f(x)\frac{dx}{dt}+g(x)=0. \tag{1.10}$$

它的一个特殊情形就是 **van der Pol 方程**

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\mu(x^2-1)\frac{dx}{dt}+x=0, \tag{1.11}$$

其中 $\mu>0$ 为参数. 这个方程是在 1920 年由荷兰人 van der Pol 从无线电技术中提出的.

(ii) **单摆** 如图 1.2(c) 所示，在一根长度为 l 的可略去重量且不伸长的线上挂着一个质量为 m 的小球，让它在过摆动线固定点 O 的铅垂平面上的垂线附近摆动. 以 φ 记摆动线与垂线的夹角，且定义逆时针方向为正，反之为负. 于是作用在小球上的重力 mg 在圆周运动的法向分力为 $mg\cos\varphi$ ，它与摆线的张力大小相等、方向相反. 而小球重力在圆周运动的切向分力为 $mg\sin\varphi$ ，它的方向类似于上面的弹簧力，总是指向 $\varphi=0$ ，因此由 (1.7) 可得小球的运动方程为

$$m\frac{d^2}{dt^2}(l\varphi)=-mg\sin\varphi,$$

亦即

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\frac{g}{l}\sin\varphi=0. \tag{1.12}$$

这就是 **单摆的运动方程** ，其中略去了空气阻力；显然这是一个自由振动方程.

4. 守恒律问题

一般来说，要定量地描述分布在三维空间中并随时间而运动变化的物质流 (例如水流、气流、车流、热流等等) 至少需要四个自变量，即描写物质流中质点位置的空间坐标变量 (x,y,z) 和时间变量 t. 但为了简单起见，我们考虑物质流只沿一个方向运动，并假设在运动方向 x 的截面上，有关该物质的各个物理量都相同，于是自变量就简化成两个，即位置变量 x 和时间变量 t.

令 $\rho(x,t)$ 表示在时刻 t 于 x 处物质的 **密度** 或 **浓度** ，即在 (x,t) 处每单位长度物质 (例如水、气体、车辆、热量、质量、能量等等) 的数量； $q(x,t)$ 表示在 (x,t) 处物质的 **流量** ，即在时刻 t 每单位时间流经 x 处的物质数量，它是一个向量，当其方向与 x 轴的正向相同时取正值，否则取负值. $k(x,t)$ 表示在 (x,t) 处 **“源”** 或 **“洞”** 的强度，即在 (x,t) 处，每单位时间每单位长度所产生 (“冒出”，当 $k>0$) 或失去 (“漏掉”，当 $k<0$) 物质的数量. 因此在时刻 t 于区间 $[x,x+\Delta x]$ 上，根据物质守恒律我们有：

物质总量对时间的变化率 = 每单位时间流入该区间物质的纯增加量 + 每单位时间在该区间中产生 (失去) 的物质数量

由此我们立即得到方程

$$\frac{d}{dt}\int_x^{x+\Delta x}\rho(s,t)ds=q(x,t)-q(x+\Delta x,t)+\int_x^{x+\Delta x}k(s,t)ds.$$

在 $\rho(x,t),q(x,t)$ 对 x,t 连续可微的假设下，将上式两边同除以 Δx 即得

$$\frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x}\frac{\partial\rho}{\partial t}(s,t)ds=-\frac{q(x+\Delta x,t)-q(x,t)}{\Delta x}+\frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x}k(s,t)ds,$$

然后令 $\Delta x \to 0$ 立即推出

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial x} + k(x,t)\,, \tag{1.13}$$

其中 $k(x,t)$ 一般为已知，而 ρ, q 为 (x,t) 的未知待求函数.

A. 迁移过程 若以 $v = v(x,t)$ 表示物质流在时刻 t 于 x 处的运动速度，则有 $q = v\rho$，于是方程 (1.13) 成为

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (v\rho)}{\partial x} = k(x,t)\,, \tag{1.14}$$

这就是一维流体动力学的基本方程之一 ——**连续性方程**.

当流速 $v = c$ 为常数时，方程 (1.14) 就变成

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + c\frac{\partial \rho}{\partial x} = k(x,t)\,, \tag{1.15}$$

这就是所谓的 **迁移** (advection) **方程**. 下面举出两个例子加以说明.

(i) 当考虑一条以不变流速 $v = c$ 向下游流去的河流中受到有机物质污染时，令 ρ 为 **污染物的浓度**. 由于河水的湍流和不规则流动，故可不考虑污染物扩散的影响. 但是水中的有机污染物由于细菌的分解而逐渐减少，因此可假设 $k(x,t) = -\mu\rho(x,t)$, 这里 $\mu > 0$ 为衡量细菌作用强度的比例系数. 于是 ρ 应满足迁移方程

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + c\frac{\partial \rho}{\partial x} + \mu\rho = 0.$$

(ii) 在高速公路的交通流问题中，车辆速度 v 一般与交通密度 ρ 有关，假设它为

$$v = v_m\left(1 - \frac{\rho}{\rho_m}\right).$$

其中 v_m 和 ρ_m 分别为最大车速和最大交通密度，于是由方程 (1.14) 即得 ρ 应满足迁移方程

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v_m\left(1 - \frac{2\rho}{\rho_m}\right)\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0\,, \tag{1.16}$$

这里显然还假设该段公路没有进出口，即 $k(x,t) \equiv 0$.

B. 扩散过程 当流量 q 是由于物质从密度高的地方向密度低的地方扩散而形成时，它的大小通常是与物质密度 ρ 的梯度 $\dfrac{\partial \rho}{\partial x}$ 成比例，即 $q = -\nu\dfrac{\partial \rho}{\partial x}$，这里 $\nu > 0$ 为扩散系数. 于是方程 (1.13) 式成为

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \nu\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + k(x,t)\,, \tag{1.17}$$

这就是 **扩散** (diffusion) **方程**. 热量、化学反应、微生物种群等的扩散运动变化过程都满足扩散方程.

若在物质的运动中，迁移和扩散两种过程都存在，则有

$$q=-\nu\frac{\partial\rho}{\partial x}+v\rho,$$

于是方程 (1.13) 就成为

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=\nu\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2}-\frac{\partial}{\partial x}(v\rho)+k(x,t). \tag{1.18}$$

值得注意的是在上面微分方程 (1.13)~(1.18) 与 (1.2)~(1.6) 、 (1.8)~(1.12) 的区别，前者的未知函数含有两个自变量，而后者的未知函数只含有一个自变量，这就把微分方程划分成两门不同的学科：常微分方程和偏微分方程.

5. 经济模型

(i) **商品价格问题** 对于一种商品来说，第 i 个消费者对该商品的需求量 q_i 是按照使得该消费者的 **效用函数 (或偏好) 达到最大** 的原则来确定的；当然这与该消费者持有的货币以及该商品的价格 p 有关；在前者不变的假设下，则 $q_i=D_i(p)$ 一般是 p 的 **递减函数**. 对所有消费者求和，就得到该种商品的市场 **总需求函数** $Q=\sum\limits_i q_i=\sum\limits_i D_i(p)\triangleq D(p)$. 另一方面，生产该商品的厂商们是按照使得其 **利润达到最大** 的原则来决定所提供该商品 (产品) 的数量. 由此即可推出厂商生产该产品的 **边际成本**(Marginal Cost) 应等于该产品的市场价格 p，亦即若第 j 个厂商生产该产品数量 q_j 的成本为 $C_j(q_j)$，则有 $C_j'(q_j)=p$，这就推出第 j 个厂商能为市场提供该商品的数量 $q_j=S_j(p)$ 一般是该商品价格的 **递增函数**. 对所有生产该产品的厂商求和，即得到该商品市场的 **总供给函数** $Q=\sum\limits_j q_j=\sum\limits_j S_j(p)\triangleq S(p)$.

记 $F(p)=D(p)-S(p)$, 并称它为该商品的 **超需求函数**. 显然，若总需求大于总供给，即当 $F(p)>0$ 时，则该商品供不应求，因此它的价格 p 必然随时间 t 的增加而上升，亦即 $\dfrac{dp(t)}{dt}>0$; 而当 $F(p)<0$ 时，该商品供大于求，其价格 p 应随 t 的增加而下降，亦即 $\dfrac{dp(t)}{dt}<0$, 因此我们有理由假设该商品的价格 p 对时间 t 的变化率 $\dfrac{dp(t)}{dt}$ 与超需求函数 $F(p)$ 成正比，即

$$\frac{dp(t)}{dt}=kF(p), \tag{1.19}$$

这里比例常数 k 可通过对市场进行实际调查而确定. 方程 (1.19) 就是确定某种商品价格的数学模型；此外，我们称使得 $F(p)=0$ 的价格 $p=p^*$ 为该商品的 **均衡价格**(equilibrium price), 而均衡价格是否稳定是该商品市场的重要特性.

(ii) **新古典经济** (neoclassical economics) **增长模型** 在一定的技术水平上，一个地区的经济产出值 Q 主要依赖于劳动力 L 和资本 K, 即

$$Q=F(L,K). \tag{1.20}$$

这就是所谓的生产函数；例如， C. Cobb 和 P. Douglas 就是利用 1890~1926 年美国马萨诸塞州的统计资料得出一个著名的 Cobb-Douglas 生产函数 $F(L,K)=aL^{1-\beta}K^{\beta}$, 这里 $a>0, 0<\beta<1$ 均为常数. 一般来说，生产函数 F 对 L,K 都有一次齐次性，即若劳动和资本都扩大 α 倍，则产出也将扩大 α 倍. 于是有

$$\frac{Q}{L}=\frac{1}{L}F(L,K)=F\left(1,\frac{K}{L}\right)\triangleq f(k), \tag{1.21}$$

其中， $k=\dfrac{K}{L}$ 为**人均资本**； $\dfrac{Q}{L}$ 为**人均产出**. 产出 Q 一般有两个用途：一是用于消费 C, 一是用来再投资 I, 即

$$Q=C+I. \tag{1.22}$$

而投资 I 又可分成两部分，即

$$I=\frac{dK}{dt}+\gamma K, \tag{1.23}$$

其中， $\dfrac{dK}{dt}$ 是用于增加资本 K 的存量，以便扩大再生产；而 γK 是用于折旧或耗损， $0<\gamma<1$ 为耗损系数.

假设劳动的增长与人口的增长同步，且为指数式增长，即 $\dfrac{dL}{dt}=nL$, 这里 n 为人口的纯增长率，于是由 $k=\dfrac{K}{L}$ 有

$$\frac{dk}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{K}{L}\right)=\frac{1}{L}\frac{dK}{dt}-\frac{K}{L^2}\frac{dL}{dt}=\frac{1}{L}\frac{dK}{dt}-nk,$$

亦即

$$\frac{1}{L}\frac{dK}{dt}=\frac{dk}{dt}+nk. \tag{1.24}$$

将 (1.22) 两边除以 L, 并把 I 用 (1.23) 的右端、 $\dfrac{1}{L}\dfrac{dK}{dt}$ 用 (1.24) 的右端代入即可推得

$$\frac{Q}{L}=\frac{C}{L}+\frac{I}{L}=c+\frac{1}{L}\frac{dK}{dt}+\gamma\frac{K}{L}=c+(\gamma+n)k+\frac{dk}{dt}=c+\mu k+\frac{dk}{dt}, \tag{1.25}$$

其中， $c=C/L$ 为**人均消费量**； $\mu=\gamma+n$ 为常数. 因此由 (1.21),(1.25) 推出

$$\frac{dk}{dt}=f(k)-c-\mu k, \tag{1.26}$$

这就是所谓的新古典经济增长模型，它是关于人均资本 k 的一个微分方程；此外还应满足初始条件

$$k(0)=\frac{K(0)}{L(0)}\triangleq k_0.$$

如果在 (1.22) 中的投资取为 $I = sQ$, 这里 $0 < s < 1$ 是一个固定的比例系数，则 $c = (1-s)\dfrac{Q}{L} = (1-s)f(k)$, 将此代入 (1.26), 并联合上面的初始条件即得

$$\frac{dk}{dt} = sf(k) - \mu k, \qquad k(0) = k_0 . \tag{1.27}$$

容易看出，这个问题的解 k 不仅依赖于时间 t, 还与 s 有关，即 $k = k(t,s)$. 如果 $k_\infty(s) \triangleq \lim\limits_{t\to\infty} k(t,s)$ 存在 (这只需对 $f(k)$ 加上一定的条件)，则有如下问题：应如何选取常数 $s, 0 < s < 1$, 使得人均消费 $c_\infty(s) = (1-s)f(k_\infty(s))$ 达到最大呢？利用将在第三章讨论的稳定性概念并经过计算可以推出，这个 s 值应由方程

$$f'(k_\infty(s)) = \mu \tag{1.28}$$

确定，这就是所谓的 **资本积累的黄金准则**.

二、基本概念

1. 常微分方程和偏微分方程

所谓 **微分方程就是一个或几个联系着自变量、未知函数以及它的某些导数之间相互关系的等式**. 在前面的 (1.2)~(1.18) 式中，除了 (1.7) 式外都是微分方程. 在微分方程中，若未知函数的自变量只有一个，就称它为 **常微分方程** (ordinary differential equation， ODE)；若未知函数的自变量个数不少于二个，则称它为 **偏微分方程**(partial differential equation， PDE). 上面的微分方程 (1.2)~(1.12) 中除 (1.7) 式外都是常微分方程，而微分方程 (1.13)~(1.18) 都是偏微分方程. 下面是一些经常出现在实际问题中的经典微分方程:

$$\frac{dy}{dx} = p(x)y^2 + q(x)y + r(x) \quad (\text{Riccati方程}),$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = xy \quad (\text{Airy方程}),$$

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (x^2 - n^2)y = 0 \quad (n\text{阶Bessel方程}),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (\text{Laplace方程}),$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \quad (\text{热传导方程}),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \quad (\text{波动方程}).$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com