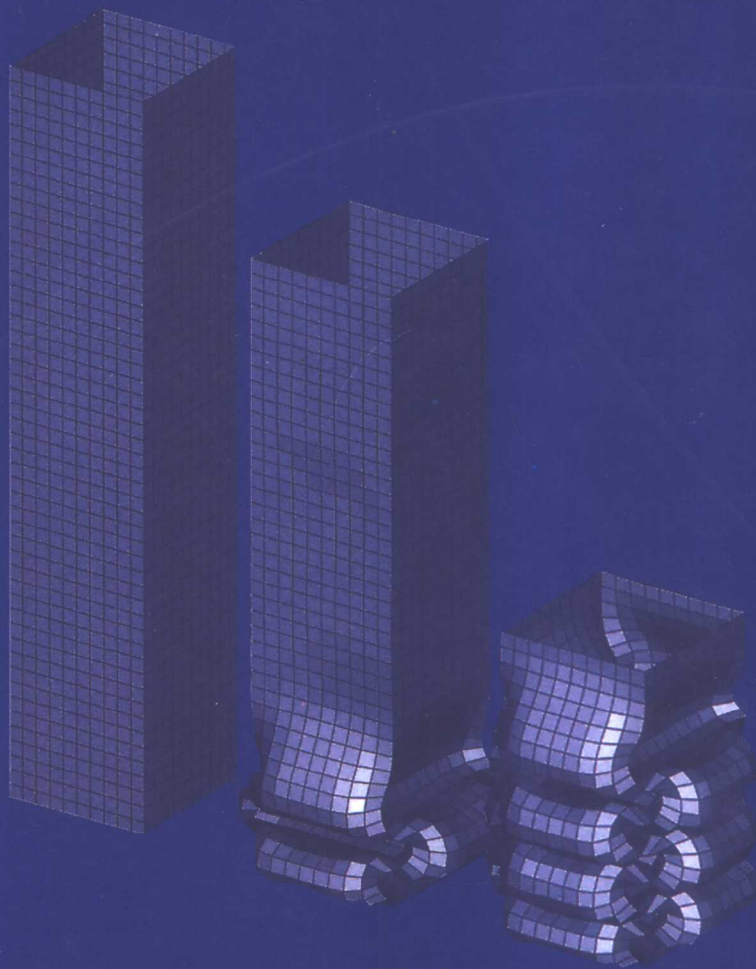


# Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures

## 连续体和结构的非线性有限元

Ted Belytschko, Wing Kam Liu, Brian Moran / 著

庄茁 / 译



清华大学出版社

## (京)新登字 158 号

连续体和结构的非线性有限元/庄茁 等译

Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures

EISBN: 0-471-98774-3

Copyright © 2000 by John Wiley & Sons Ltd.

All rights reserved. No part of this publication may be reproduced, stored in a retrieval system, or transmitted, in any form or by any means, electronic, mechanical, photocopying, recording, scanning or otherwise, except under the terms of the Copyright, Designs and Patents Act 1998 or under the terms of a licence issued by the Copyright Licensing Agency, 90 Tottenham Court Road, London, UK W1P 9HE, without the permission in writing of the publisher.

本书中文简体字版由 John Wiley & Sons 出版公司授权清华大学出版社出版发行。未经出版者书面许可,任何人不得以任何方式复制或抄袭本书的任何部分。

北京市版权局著作权合同登记号:图字 01-2001-1565 号

### 图书在版编目(CIP)数据

连续体和结构的非线性有限元/(美)彼莱奇科,(美)廖荣锦,(美)默然著.庄茁等译.

—北京:清华大学出版社,2002

ISBN 7-302-05748-6

I. 连… II. ①彼…②廖…③默…④庄 III. 有限元法—应用—非线性结构分析—英文  
IV. O342

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 059268 号

出 版 者:清华大学出版社(北京清华大学学研大厦,邮编 100084)

<http://www.tup.tsinghua.edu.cn>

责任编辑:张秋玲

版式设计:韩爱君

印 刷 者:北京市四季青印刷厂

发 行 者:新华书店总店北京发行所

开 本:787×960 1/16 印张:38 字数:778 千字

版 次:2002 年 12 月第 1 版 2002 年 12 月第 1 次印刷

书 号:ISBN 7-302-05748-6/O·265

印 数:0001~3000

定 价:49.00 元

---

## 译者前言

---

本书在 2000 年夏季刚刚面世就深深地吸引了我,以至于我渴望以我和我的研究生们的共同努力,将此书译成中文,介绍给中国及世界其他地区的华人学者。

非线性力学问题(材料、几何和接触)是力学发展的前沿课题,非线性有限元是连续介质力学的重要分支——计算固体力学的组成部分。这是虚拟科学与工程研究的重要工具。计算机仿真研究的发展,使我们能够瞬抚四海和纵揽古今,而有限元及其计算机软件的作用正是我们到达彼岸的工具和桥梁。

本书内容凝聚了有限元的先行者和本书作者近半个世纪的研究成果,荟萃了数百篇文献的精华,某些真知灼见绝非一日之功,日积月累的宝贵经验恰有水滴石穿之感。

有限元是有限的,而学术研究是无限的;科学家是有国籍的,而科学是没有国界的。历经矢志不渝的努力和艰辛严谨的翻译工作,终于能够将此书中文版奉献给广大的读者,使我们能够分享固体力学研究的共同成果,提高相关领域的研究水平。

参加本书翻译工作的有:庄茁(序言、第 1 章、第 5 章、附录和索引)、梁明刚(第 2 章、第 9 章和第 10 章)、卢剑锋(第 3 章和第 4 章)、赵慧娟(第 6 章和第 8 章)、范成业(第 7 章)。庄茁负责对每一章的斟酌、校对和复译,以及全书的审核,同时更正了多处原著中出现的笔误并且编辑增补了个别遗漏。

感谢清华大学工程力学系黄克智院士、王勰成教授和陆明万教授对本书出版所给予的关注和与译者的某些有益讨论,帮助译者澄清了某些学术概念。感谢清华大学出版社的出版资助,感谢金文织编审和张秋玲副教授的大力支持。由于本人水平所限,在对原著的理解上难免有不当之处,敬请读者谅解。

庄茁 教授

2002 年春节于清华园

---

## Preface for Chinese version

---

We are very pleased that our book “Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures” is being made available to our colleagues in Asia through this translation. We hope those involved in research, teaching and study in computational mechanics as well as those applying nonlinear finite elements to technological advances in civil, mechanical, aerospace, and manufacturing engineering, will find the book useful.

We are grateful to Dr. Zhuang and his graduate students at Tsinghua University, Beijing, for carrying out the translation. We are acquainted with Dr. Zhuang and share many research interests. We are pleased to be formally associated with him and with Tsinghua University through this translation.

Ted Belytschko

Wing Kam Liu

Brian Moran

Evanston, IL USA, July 2001

### 译 文

我们非常高兴地看到,通过本书的翻译,中文版《连续体和结构的非线性有限元》一书即将奉献给我们的亚洲同事。我们希望那些在计算力学领域中从事研究、教学和学习的

学者,以及那些在土木、机械、航天和制造工业中应用非线性有限元于先进技术的工程师们,将会发现本书的用途。

我们非常感谢庄茁博士和他的研究生们在北京的清华大学完成了本书的翻译工作。我们将与庄茁博士保持联系以共同分享许多研究的兴趣。通过本书的翻译,我们为与他本人和与清华大学建立的正式联系感到非常高兴。

Ted Belytschko

Wing Kam Liu

Brian Moran

Evanston, IL USA, July 2001

---

## 英文版前言译文

---

本书的目的是全面介绍关于非线性有限元分析的方法和理论。对于有限元方法在固体力学和结构力学的应用中的各类感兴趣的主要问题,我们关注离散方程的公式和求解。题目包括:关于一维和多维连续体的有限元离散化、关于非线性材料和大变形本构方程的公式、关于离散方程的求解过程(包括数值和物理的非稳定性的考虑)、以及结构和接触-碰撞问题的处理。这些题目关系到工业和研究的应用,对于从事非线性有限元实践、研究和教学的读者,它们是一些很重要的题目。

本书具有力学特点而不是数学风格。尽管它包含了数值方法的稳定性和相关的偏微分方程的分析,但目的却是讲解有限元分析的方法以及它的解答和方法的性能。没有考虑诸如收敛性和解答数学性质的证明题目。

在离散方程的公式中,我们从基于系统的力学控制方程开始,建立弱形式,并且应用它推导离散方程。在工业过程和研究的仿真中,具有大变形的 Lagrangian、任意的 Lagrangian 和 Eulerian 网格问题正在逐步发展,即由 Lagrangian 网格不能处理的问题,我们将建立它们的弱形式和离散方程。全面地阐述了更新的 Lagrangian 和完全的 Lagrangian 方法。

由于对方程的基本理解需要熟悉连续介质力学,第 3 章总结了连续介质力学中与本书内容相关的题目。这一章开始于强调转动运动的基本描述。伴随它们之间的转换,描述了应变和应力的度量,后来生成为前推和后拉运算。在称为 Eulerian 和 Lagrangian 描述中,描述了基本的守恒定律,并介绍了客观性(常称为框架不变性)。

第 4 章描述了关于 Lagrangian 网格的离散方程公式。我们开始于建立动量平衡的弱形式,并应用它们建立离散方程。全面地阐述了完全的 Lagrangian 格式和更新的

Lagrangian 格式,并且讨论了在两种格式之间进行转换的方法和算法。给出了在二维和三维中建立各种单元的例子。

第 5 章讨论了本构方程,特别是强调与材料非线性和大变形方面有关材料模型。

第 6 章描述了求解过程和稳定性的分析。对于瞬时过程和求解,描述了显式和隐式积分程序,考虑了平衡问题的连续性过程。建立了关于构造 Newton 方程所需要的 Newton 方法和线性化过程。在非线性问题的求解中,数值过程和物理过程的稳定性是至关重要的。因此,为了确定解答和数值过程的稳定性,总结和运用了稳定性的理论。并且考虑了几何和材料的稳定性。

第 7 章涉及到任意的 Lagrangian Eulerian 方法。这一章也提供了关于 Eulerian 分析的工具。描述了这类网格所需要的数值技术,诸如迎风方法和 SUPG 公式。

第 8 章涉及的是单元技术。在有约束介质的问题中,讨论了单元的成功设计所需要的特殊技术。重点是放在不可压缩材料的问题,而描述的技术是在一般的上下文中。另外,本章也描述了一点积分单元和沙漏控制。

第 9 章关注于结构单元,特别是壳和梁单元。没有单独地对待板,因为它们特殊的壳。对于非线性分析,我们强调基于连续体的结构公式,因为它们更容易被掌握而且得到了更广泛的应用。小心地学习各种假设,并建立基于连续体的关于梁和壳的公式。由于稍微修改连续单元就可以建立基于连续体的单元,也就是说这一章的大部分内容主要依赖于前面的章节,因此,本章仅仅是简单地讨论了诸如线性化和材料模型的题目。

第 10 章描述了接触-碰撞。我们将接触-碰撞视为一个变分不等式,所以在离散方程中满足合适的接触不等式。描述了基于位移和基于速度的公式。我们关注的是接触-碰撞的非平滑特性及其对求解过程和仿真的影响。

本书是为机械工程、土木工程、应用数学和工程力学专业的低年级研究生学习程序编写的。本书假设某些读者熟悉有限元方法,诸如学过一个学期课程或者 4 到 5 周的一大段课程。学生必须熟悉形函数、刚度和力的组合,具有一些变分或者能量方法的背景是有帮助的。此外,学生必须具有某些关于材料力学和连续介质力学的知识,熟悉指标标记和矩阵标记是重要的。

大多数教师将选择部分而不是本书的全部内容,如果选择全部,将需要一年的课程。我们的目的是包括全面的素材以便适合许多教师的需要和偏爱。此外,在从事文献阅读之前,我们为感兴趣的学生提供了附加材料,即关于研究背景阅读的资料。

短期课程,诸如一个 10 周季度或者 16 周学期,需要对材料进行明智的选择,这取决于教师的目的和口味。本书展示的大部分材料是完全的 Lagrangian 和更新的 Lagrangian 公式。因此,一堂概论课可以关注从第 2 章到第 4 章的更新的 Lagrangian 观点,选择从第 5 章到第 6 章的题目,使学生熟悉材料模型和求解过程。某些教师可能选择越过第 2 章的一维处理,留下它可能作为要求的阅读。通过简单地证明在第 4 章中的转

换,则可以引入完全的 Lagrangian 格式。由强调完全的 Lagrangian 格式,可以设计类似的课程。

在全书中,我们尽量采用了统一的风格和标记,这是非常重要的。因为对于学生,在标记和格式上的剧烈变化常常妨碍理解。虽然对于一个特殊领域的文献所常用的标记,这样可能会存在偏差,但是,我们希望表达的一致性将有助于学生。

我们感谢我们的朋友们、同事们和从前的学生们,他们阅读了本书初稿的章节,并且提出了许多的建议,特别值得提到的是:

J. S. Chen, University of Iowa  
John Dolbow, Duke University  
Thomas J. R. Hughes, Stanford University  
Shaofan Li, Northwestern University  
Arif Masud, University of Illinois at Chicago  
Nicolas Moës, Northwestern University  
Katerina Papoulia, Cornell University  
Patrick Smolinski, University of Pittsburgh  
Natarajan Sukumar, Northwestern University  
Henry Stolarski, University of Minnesota  
Ala Tabiel, University of Cincinnati

我们也感谢我们的学生: Zulfiqar Ali, Debbie Burton, Hao Chen, Yong Guo, Dong Qian, Michael Singer, Pritpal Singh, Gregory Wagner, Shaoping Xiao 和 Lucy Zhang, 他们帮助准备图表,做了打印和大量的校对工作。当然,任何遗漏的错误是作者的责任。

对于 Shaofan Li 和 Yong Guo 关于几个练习和例子的贡献,我们给予他们特殊的感谢。

Ted Belytschko, Wing Kam Liu, Brian Moran  
Northwestern University



---

# 目录

---

译者前言 .....	VII
中文版序言及其译文 .....	IX
英文版前言译文 .....	XI
框目录 .....	XV
<b>1 绪论 .....</b>	<b>1</b>
1.1 在设计中应用非线性有限元 .....	1
1.2 非线性有限元的有关著作和简要历史 .....	4
1.3 标记方法 .....	7
1.4 网格描述 .....	8
1.5 偏微分方程的分类 .....	12
1.6 练习 .....	16
<b>2 一维 Lagrangian 和 Eulerian 有限元 .....</b>	<b>17</b>
2.1 引言 .....	17
2.2 完全的 Lagrangian 格式的控制方程 .....	18
2.3 完全的 Lagrangian 格式的弱形式 .....	24
2.4 完全的 Lagrangian 格式的有限元离散 .....	28
2.5 单元和总体矩阵 .....	33
2.6 更新的 Lagrangian 格式的控制方程 .....	42

2.7	更新的 Lagrangian 格式的弱形式 .....	44
2.8	更新的 Lagrangian 格式的单元方程 .....	45
2.9	Eulerian 格式的控制方程 .....	55
2.10	Eulerian 网格方程的弱形式 .....	56
2.11	有限元方程 .....	57
2.12	求解方法 .....	60
2.13	小结 .....	62
2.14	练习 .....	62
<b>3</b>	<b>连续介质力学</b> .....	<b>64</b>
3.1	引言 .....	64
3.2	变形和运动 .....	65
3.3	应变度量 .....	79
3.4	应力度量 .....	86
3.5	守恒方程 .....	93
3.6	Lagrangian 守恒方程 .....	103
3.7	极分解和框架不变性 .....	108
3.8	练习 .....	119
<b>4</b>	<b>Lagrangian 网格</b> .....	<b>122</b>
4.1	引言 .....	122
4.2	控制方程 .....	123
4.3	弱形式:虚功率原理 .....	126
4.4	更新的 Lagrangian 有限元离散 .....	131
4.5	编制程序 .....	140
4.6	旋转公式 .....	161
4.7	完全的 Lagrangian 格式 .....	168
4.8	完全的 Lagrangian 弱形式 .....	171
4.9	有限元半离散化 .....	173
4.10	练习 .....	186
<b>5</b>	<b>本构模型</b> .....	<b>188</b>
5.1	引言 .....	188
5.2	应力-应变曲线 .....	189

5.3	一维弹性	193
5.4	非线性弹性	196
5.5	一维塑性	209
5.6	多轴塑性	216
5.7	超弹-塑性模型	231
5.8	粘弹性	239
5.9	应力更新算法	241
5.10	连续介质力学和本构模型	256
5.11	练习	267
<b>6</b>	<b>求解方法和稳定性</b>	<b>268</b>
6.1	引言	268
6.2	显式方法	269
6.3	平衡解答和隐式时间积分	276
6.4	线性化	292
6.5	稳定性和连续方法	307
6.6	数值稳定性	320
6.7	材料稳定性	333
6.8	练习	340
<b>7</b>	<b>任意的 Lagrangian 和 Eulerian 公式</b>	<b>341</b>
7.1	引言	341
7.2	ALE 连续介质力学	342
7.3	ALE 描述中的守恒规则	349
7.4	ALE 控制方程	350
7.5	弱形式	351
7.6	Petrov-Galerkin 方法介绍	354
7.7	动量方程的 Petrov-Galerkin 公式	361
7.8	路径相关材料	364
7.9	离散方程线性化	374
7.10	网格更新方程	377
7.11	数值算例:一个弹-塑性波的传播问题	383
7.12	完全的 ALE 格式	387

---

<b>8 单元技术</b> .....	391
8.1 引言.....	391
8.2 单元性能.....	393
8.3 单元性质和分片试验.....	400
8.4 Q4 和体积自锁 .....	407
8.5 多场弱形式和单元.....	411
8.6 多场四边形.....	422
8.7 一点积分单元.....	426
8.8 举例.....	434
8.9 稳定性.....	438
8.10 练习 .....	440
<b>9 梁和壳</b> .....	442
9.1 引言.....	442
9.2 梁理论.....	443
9.3 基于连续体的梁.....	446
9.4 CB 梁的分析 .....	456
9.5 基于连续体的壳.....	467
9.6 CB 壳理论 .....	479
9.7 剪切和膜自锁.....	484
9.8 假设应变单元.....	488
9.9 一点积分单元.....	491
9.10 练习 .....	494
<b>10 接触-碰撞</b> .....	495
10.1 引言.....	495
10.2 接触界面方程.....	496
10.3 摩擦模型.....	505
10.4 弱形式.....	509
10.5 有限元离散.....	517
10.6 关于显式方法.....	528

---

附录 1 Voigt 标记 .....	534
附录 2 范数 .....	538
附录 3 单元形函数 .....	541
术语汇编 .....	546
参考文献 .....	550
索引 .....	562

---

# 框目录

---

框 2.1	一维完全的 Lagrangian 格式的虚功原理 .....	28
框 2.2	完全的 Lagrangian 格式的离散方程 .....	36
框 2.3	更新的 Lagrangian 格式的离散方程 .....	50
框 2.4	Eulerian 格式的控制方程 .....	55
框 2.5	Lagrangian 网格显式时间积分流程图 .....	61
框 3.1	应力度量的定义 .....	87
框 3.2	应力转换 .....	88
框 3.3	守恒方程 .....	102
框 3.4	在功率上的应力-变形(应变)率耦合对 .....	107
框 3.5	客观率 .....	114
框 4.1	更新的 Lagrangian 格式的控制方程 .....	124
框 4.2	更新的 Lagrangian 格式的弱形式:虚功率原理 .....	131
框 4.3	更新的 Lagrangian 格式的离散方程和内部节点力算法 .....	140
框 4.4	完全的 Lagrangian 格式的控制方程 .....	169
框 4.5	完全的 Lagrangian 格式的弱形式:虚功原理 .....	172
框 4.6	完全的 Lagrangian 格式的离散化方程和内部节点力算法 .....	175

框 5.1	切线模量之间的关系 .....	203
框 5.2	二阶张量的基本不变量 .....	208
框 5.3	一维率无关塑性与组合各向同性和运动硬化的本构关系 .....	213
框 5.4	一维率相关塑性的本构关系,组合各向同性和(线性)运动硬化 .....	215
框 5.5	次弹-塑性本构模型(Cauchy 应力公式) .....	219
框 5.6	$J_2$ 流动理论次弹-塑性本构模型 .....	220
框 5.7	$J_2$ 流动理论次弹-塑性本构模型组合各向同性运动硬化 .....	222
框 5.8	率无关 Gurson 模型 .....	226
框 5.9	次弹-塑性本构模型:旋转 Kirchhoff 应力公式 .....	228
框 5.10	弹-塑性本构模型——小应变 .....	229
框 5.11	大应变率相关塑性 .....	230
框 5.12	超弹-塑性 $J_2$ 流动理论本构模型 .....	236
框 5.13	向后 Euler 图形返回算法 .....	244
框 5.14	径向返回算法 .....	247
框 5.15	超弹性-粘塑性模型的应力更新方法 .....	255
框 5.16	后拉和前推运算的总结 .....	257
框 5.17	Lie 导数 .....	258
框 6.1	显式时间积分的流程图 .....	271
框 6.2	Newmark $\beta$ 方法 .....	277
框 6.3	隐式时间积分的流程图 .....	282
框 6.4	平衡解答的流程图 .....	282
框 6.5	内部节点力的 Jacobian(切向刚度矩阵) .....	297
框 6.6	平衡求解流程图:采用算法模量的 Newton 方法 .....	306
框 7.1	ALE 控制方程 .....	351
框 7.2	关于 ALE 应力更新矩阵 .....	366
框 7.3	显式时间积分 .....	374
框 7.4	(7.10.16)在一维、二维和三维的例子 .....	380
框 8.1	在混合单元中的内力计算 .....	419
框 8.2	单元节点力的计算 .....	432

---

框 9.1	CB 梁单元的算法 .....	454
框 10.1	接触界面条件 .....	504
框 10.2	弱形式 .....	517
框 10.3	非线性接触的半离散方程 .....	524
框 10.4	接触-碰撞的显式时间积分流程 .....	533



---

# 1

## 绪论

---

### 1.1 在设计中应用非线性有限元

非线性有限元分析是计算机辅助设计的基本组成部分。由于它提供了更快捷和低成本的方式评估设计的概念和细节,因此,人们越来越多地应用非线性有限元仿真的方法代替样品原型的试验。例如,在汽车设计领域中,对初期设计概念和最终设计细节的评估,碰撞的仿真代替了整车的试验,如布置判定气囊释放的加速计、内部的缓冲装置以及选择材料和满足碰撞准则的构件截面。在许多制造领域中,可以进行加工过程的仿真,从而加速了设计过程,例如金属薄板成型、挤压和铸造。在电子工业中,为了评估产品的耐久性,仿真分析代替了跌落试验。

分析和开发非线性有限元程序的人员必须理解非线性有限元分析的基本概念。若不理解基本概念,有限元程序就只是一个提供仿真的黑匣子。然而,非线性有限元分析使分析者面对许多选择和困惑,若不理解所包含的内容和这些选择和困难的内涵,分析者将处于非常不利的状态。

本书的目的是描述固体力学非线性有限元分析的方法。我们的意图是提供一种全面的阐述,这样使读者能够获得对基本方法的理解,对不同近似计算用途的比较,正确对待潜藏在非线性世界中的困难。同时,也足够详细地给出了各种方法的实现过程,以便读者能够编程。

非线性分析包含下列步骤:

1. 建立模型
2. 基本方程的公式