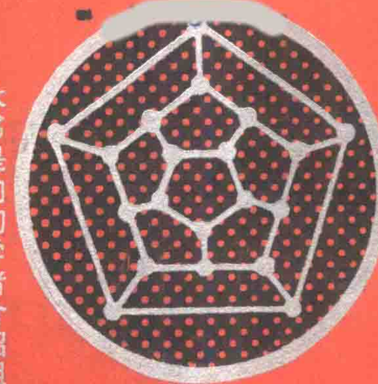

组合论是数学中最令人喜爱的一个分支。它不仅包含各种抽象推理中最优美的论证，而且在现代科学的各个领域，如物理学、化学、工程、统计学、社会学、经济学、运筹学、计算机科学等方面都有着广泛的应用。

本书是向初学者介绍组合论基本知识的入门书，它包括了这门学科所不可少的核心内容，但只要学过一个学期微积分的读者即可循序渐进地学习。通篇强调研究方法的建立而不是已知结论的罗列。

DANIEL I.A.COHEN 著

林和诚译　李慰萱校

组合论基本方法

组合论基本方法

DANIEL I.A.COHEN 著

林和诚译　李慰萱校

湖南教育出版社

组合论基本方法

Daniel I. A. Cohen 著

林和诚译　李慰萱校

责任编辑：阳　文

湖南教育出版社出版发行（长沙市展览馆路8号）

湖南省新华书店经销　湖南省新华印刷二厂印刷

1987年9月第1版　1987年9月第1次印刷

字数：250,000　印张：11　印数：1—1,250

ISBN 7—5355—0273—3／G·273

统一书号：7284·966　定价：2.30元

前　言

人们普遍认为组合论是数学中最令人喜爱的分支。因为它不仅包含着各种抽象推理中最精美的论证，而且在现代科学的各个领域里都有着广泛的应用。各种智力测验和博奕，无论它们是数值的、几何的或只是含有构形与设计的，均可在组合论中作为一般理论的背景而出现。这种一般理论对于物理学、化学、工程、统计学、社会学、经济学、计算机科学及运筹学等都是十分重要的。

这是一本介绍组合论知识的入门书，供具有一个学期微积分基础的大学新生使用。它最初出现于哈佛大学的一个研讨班上，然后作为东北大学的教材。它可用作本科院校一学期的教材，因而书中课题的数目和对每一课题分析的深度都据此作了相应的调整。本书包括了我认为必不可少的材料的核心内容。还有某些课题本来也应包括进来，但考虑到若通过较高深的数学方法去介绍它们，将会获得更好的效果，所以在这里它们被略去了。虽然我不得不略掉组合论中某些优美而重要的分支，但是，我还是希望能激发读者从进一步的学习中去了解这些内容的兴趣。

对于每一结论我都不惜花费较多的时间去讨论，而不是对一个定理给出一个最简易的证明就急转下文。因为本书强调的重点是研究方法的建立，而不是已知事实的罗列。所以，许多定理都给出了不止一种证明。在本书中，许多定理只是组合论基本方法的解释或应用，这是本书的特点。

本书力求保持所有符号都明白易懂，因此，象在表示“连加”

的式子中，也几乎一成不变地使用省略号来代替更为流行的"Σ"符号。

坦白地说，我感到数学归纳法是所有各种证明技巧中最不令人满意的。它通常是非构造性的、不优美的、难于一般化的。并且，它并不能使人了解那仅仅验证了一下的公式是从哪里来的。因此，我把数学归纳法的讨论一直推迟到附录中。

本书对某些较难理解的定理的处理是先从最普通的过程中得到一些简单结论，然后再从简单的结果出发，经过一步一步地推广而得出越来越抽象的较深刻的命题。我认为，在教材中引进一个研究对象时，首先证明这个结论的最一般的表述，然后举出一些感兴趣的推论的做法，不仅不符合数学发展的历史，而且使学生不能洞察数学研究的进程。遗憾的是，各种程度的数学教本都很少注意到这一点。

只要可能，我总是注明本书中所提到的材料的出处。但过去大家常常省略这种信息，因而要查实材料的正确起源很困难，书中所注明的出处难免有误。鉴别材料还受到一些别的妨碍：许多定理是古老的，有的结论多次被重复发现，往往一个定理发现几个世纪后才有了第一个有效的证明，此外，有时发现者本人有意隐藏了他们的研究技巧。

我衷心感谢在我准备这一手稿时给予我帮助的 George E. Andrews, Douglas G. Kelly, Richard M. Wilson, Richard P. Stanley 诸位教授和我的学生们。通过他们的帮助使本书得以避免了更多的失误。

DANIEL I. A. COHEN

1978年8月于波士顿

目　　录

第一章 引 论

§1. 计数

组合论的基本问题是研究计数的方法，即计算具有某种性质的对象有多少？或者某一确定的事件可能以多少种不同的方式发生？例如下面就是一些需用组合论来回答的典型问题：

1．4人围绕一张圆桌而坐，有多少种不同的坐法？

2．5人分配17元，有多少种不同的方式？

3．有多少种方法把乔治逐个介绍给5个男人及5个女人？但要求在任何时候，乔治已会见的男人决不能比女人多。

4．10条直线可把一个平面分成多少个区域？

5．如果我们可用三种不同的颜色中的任一种给一个立方体的六个面中的每一个面着色，有多少种不同的着色法？

6．把8个后放在棋盘上，使没有两个能互相吃掉，有多少种放法？

当我们考虑象最后这种涉及排列或设计的问题的时候，必须允许这种可能性，即我们所问及的构形并不存在。例如问题：

6.把9个后放在棋盘上，使没有两个能互相吃掉，有多少种放法？

答案是“0”.因为在一个棋盘上只有8行，如果要把9个后放在棋盘上，必定有一行上放有两个后，她们就可以互相吃掉.当然，只放8个后，也不能保证不会互相吃掉。我们必须确定：(1) 所要

求的情况是否是可能的；以及（2），如果可能，有多少种方式？

由于组合论处理的是计数问题，我们使用的数几乎永远是正整数，当我们今后使用“数”这个词时，通常理解为正整数.

因为我们问的是在一个确定的集合里有多少种对象，所以我们假定只考虑有限集. 这些有限集的本质，随着它们来自不同的数学分支或实际领域而多种多样.

同所有数学分支一样，学习它的首要意义在于对它本身的认识，而组合论在现实世界中格外有用，最普通的应用之一就是计算概率.

Pierre Simon de Laplace（1749—1827）首先清楚地定义了概率这个概念. 他指出：给定了一个有T个对象的集，它有一个包含F个元素的有利子集，则在该集中用任意方式选取一个元素恰好为有利元素的概率是$\frac{F}{T}$.

$$\text{概率}=\frac{\text{有利元素的个数}}{\text{元素的总个数}}$$

例如：

一枚硬币出现头像的概率

$$=\frac{\text{硬币有头像的面数}}{\text{硬币的面数}}=\frac{1}{2}$$

一手扑克牌（5张）能成为“顺子”的概率

$$=\frac{\text{可能的“顺子”种数}}{\text{不同的一手牌的种数}}=\frac{10240}{2598960}\approx\frac{1}{254}$$

某人的头两个孩子是一男一女的概率

$$=\frac{\text{有利的排列数(男女，女男)}}{\text{排列总数(男男，男女，女男，女女)}}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

一对骰子掷出5点的概率

$$= \frac{\text{掷出5点的方式数(1与4，2与3，3与2，4与1)}}{\text{不同掷出结果的总数(1与1，1与2，……，6与6)}} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

为了从概率的定义计算概率，我们必须能计算有利情况数和所有可能情况的总数，这就是一个纯组合论的例子。

§2. 一一对应

当Arthur Cayley (1821——1895)把计数方法用于研究饱和烃C_nH_{2n+2}对于n的任意值的同分异构体数目的时候，抽象的计数法产生了另一方面的应用。例如C_4H_{10}可以是丁烷和异丁烷。

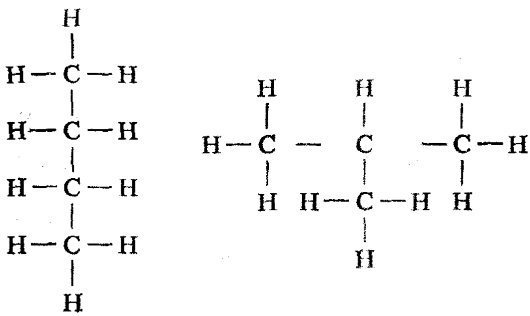

图1

首先，他画出由一些点和线构成的示意图，称为树。每一条线联结两个点，而每个点可以接一条或四条线，这种图形不包含

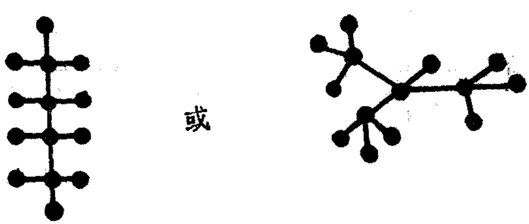

图2

由点和线联成的封闭圈。

计算这种构形的数目的问题是组合论的又一部分。

本例阐明了一个在计数方法中常用的技巧，称为一一对应。在一个计数问题中，我们用两种元素个数相同的系统中的一种来代替另一种。在上例中，由n个接四条线的点和$2n+2$个接一条线的点所构成的树的种数与C_nH_{2n+2}的同分异构体的种数是一样的。在这个特定的例子中，虽然我们还没有能通过代换使问题的答案简化到一望而知的地步，但是这是有用的第一步。

一一对应方法更显著的作用可见下例：从10个人中选出总统、副总统、国务卿和财政部长，每个人都可以兼几种职务，问有多少种选法？我们把每一个人和十个数字0，1，2，……，9中之一联系起来，现在给总统、副总统、国务卿和财政部长的每一种选举法对应一个四位数，这个四位数顺次由担任职务的人所对应的数字组成，数4373对应这样一种选举结果，4担任总统，3任副总统兼财政部长，而7为国务卿。对于每一种选举结果对应着且仅对应着一个四位数。同时对于每一个四位数对应着且只对应着一种选举结果。因此，选举结果的总数与数0000，0001，……，9999的个数完全相同，即各为10000种。在这里一一对应法则帮助了我们计数。

例1 有101名运动员参加一次网球锦标赛，这是一场简单的淘汰赛，即谁输掉一场就被淘汰。每一场比赛的结果都分出胜负，即没有平局。每一轮留下的运动员再尽可能地配对进行比赛，如果剩下的人数是单数，则让其中一人进入下一轮，当比赛进行了足够多轮之后，将决定出最后一个优胜者。问比赛共需进行多少场？

有两种方法可用于本题，直接法可对比赛的每一轮进行分析，

第一轮将有50场比赛和一人轮空；50个优胜者和轮空者将进入第二轮；将51人两两配对进行25场比赛和一人轮空；然后25名优胜者与一名轮空者将进入第三轮，他们恰需进行13场比赛；这13名优胜者又要进行 6 场比赛和一人轮空；然后 7 名幸存者将进入下一轮，其中有3场比赛和一人轮空；这一轮后留下的4名比赛者进入的下一轮有两场比赛；最后留下的两名将争夺冠军．比赛的总场数为

$$50+25+13+6+3+2+1=100$$

本题一个较好的解法是注意到比赛的场次数和被淘汰者的人数之间可以建立一一对应的关系．每一场比赛有唯一的一个被淘汰者，而每一个被淘汰者由唯一的一场比赛来决定．因此，比赛的总场数与被淘汰者的总人数相同． 因为开始有101名比赛者而最后仅有一人保持不败，故恰有100名被淘汰者．

这个方法不仅是较为优美，并使我们更深刻地理解问题，还可将其推广．每一种类似上述的比赛，开始有n个参加者，则恰好有$n-1$场比赛．

在组合论中，将在许多场合运用到这一技巧．

§3. 奇偶性

组合论不仅在现实世界中有许多应用，在数学的其它一些分支中也有许多应用．最美妙的是用计数的结果来论证某些数学对象是否存在，这些论据常由考虑奇偶性来决定．一个整数或为奇数或为偶数，由它被 2 除有无余数来决定．有时，当我们希望知道在某一给定的数学问题中是否有某种元素的时候，就利用组合论方法去证明这种元素的总数是一个奇数，从而断言这种元素至少有一个存在．

另一方面，我们也可利用奇偶性去证明某种元素不存在。下述由Leonhard Euler（1707—1783）发现的影响深远的定理最容易说明这一点。

在东普鲁士的哥尼斯堡市（现为苏联的加里宁格勒）内有一个岛位于两条河流的交汇处，七座桥联结各块陆地如图3所示。著名的七桥问题就是要求找到一条道路，通过每座桥恰好一次，这条道路的起点在某一块陆地，而终点也在某块陆地，这两块陆地可以相同。这样的道路有多少条？它们是怎样的？Euler解决了这个问题，指明这样的道路是不存在的。我们注意到，一块既不是道路的起点也不是终点的陆地，必须有偶数座桥和其它陆地联

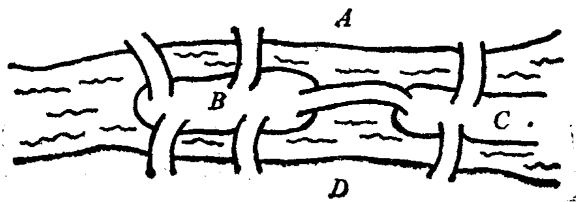

图3

结。因为对于每条道路来说，进入这块陆地的每一座桥都对应着唯一的一座离开这块陆地的桥，因此道路的本身构成进入每一块中间陆地的各桥与离开这块陆地的各桥之间一个一一对应关系。一种可能性如图4所示。

因为进入每一块中间陆地的桥的数目等于离开这块陆地的桥的数目，从而联结这块陆地的桥的总数是偶数（进入的桥加离去的桥）。因此，任一块与奇数座桥联结的陆地必定只能作为道路的起点或终点。对哥尼斯堡问题，A、B、C、D四块陆地都只有奇数座桥联结于它们之间。因为最多只有两块陆地可作为一条道

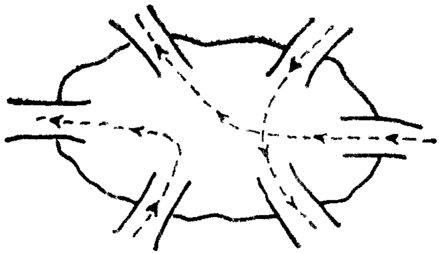

图4

路的两个端点，故所要求的道路不能存在.

在巴黎有一个不同的地形，那里有两个岛座落在一条河中，15座桥联结它们如图5所示. 其中两块陆地（两个岛)有偶数座桥与之联结，另两块陆地（两岸）有奇数条桥与之联结. 这意味着

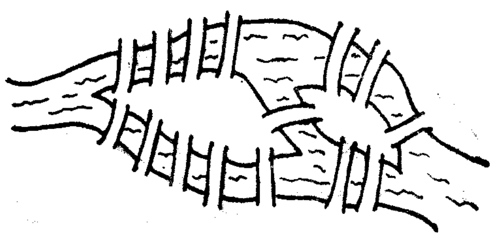

图5

可能存在一条道路，从一岸出发，来回通过每座桥一次，到达彼岸为终点. 事实上，这样的道路是可以找出来的.

William Rowan Hamilton（1805—1865）所考虑的问题是类似的. 他考虑一种称为图的图形，这种图与Cayley的树很相似. 它由一些称为顶点的点，和一些称为线的线段构成，其中容许有环，如图6所示.

在第七章中我们将给出图和树的更精确的定义.

Hamilton问题：如果存在着一条由线组成的道路，由一个顶点出发，通过每一个顶点恰好一次，这样的道路称为Hamilton道路。若道路的终点又回到原来出发的顶点，则称为Hamilton圈。图7中粗线标出一个Hamilton圈。

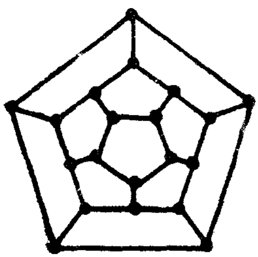

图6

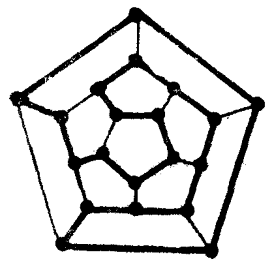

图7

但是，如果我们考虑图8，则可以证明在此图中没有 Hamilton圈。每一个顶点分别与四条线或三条线相联，我们给每一个顶点相应地标上4或3（如图9）。

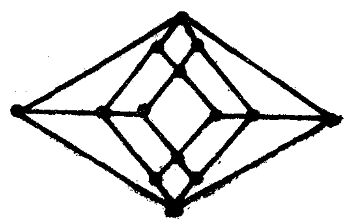

图8

我们可以看出，每一条线都联结一个标上3和一个标上4的顶点。其它类型的线在图中不出现。如果有一个Hamilton圈，它将交替地经过标号为3和4的顶点。这条道路实际上可使标3与标4的顶点建立一一对应，第一点对应第二点，第三点对应第四点，等等。这说明图中标3的点与标4的点应一样多。但是数一下就可发现，这是不可能的。此图中有8个标3的点，只有 6 个标4的点，故此图中不可能存在Hamilton圈。

最后几个例子说明了组合论与树、图之类的几何表示方法之

间的紧密联系。

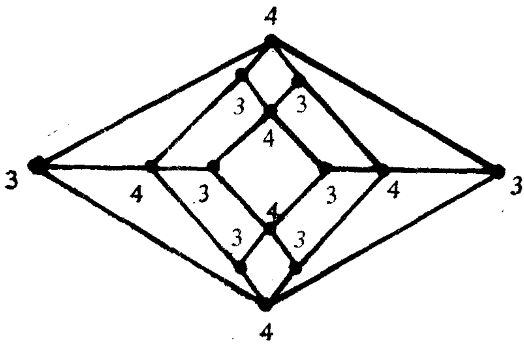

图9

问　　题

1. 从1到100之间取一个数：

(a) 此数为偶数的概率是多少？

(b) 此数为奇数的概率是多少？

(c) 此数是3的倍数的概率是多少？

(d) 此数是平方数的概率是多少？

(e) 此数是素数的概率是多少？

2. 辛烷C_8H_{18}有多少种同分异构体？

3. (a) 如果两个车在同一行或同一列，它们就可互相吃掉，证明8个车可以放在棋盘上而互相不能吃掉。

(b) 找出上述所有可能的摆棋方法所成的集与数码1到8的全部排列所成的集之间的一一对应关系。

4. (a) 两个象如果位于同一对角线上则可互相吃掉。试在棋盘上摆下尽可能多的不能互吃的象（即：这些象彼此不能互吃，但不能用更多的象摆成不能互吃的局面）。证明：这些象的个数只能是偶数。

(*b*) 证明：对任意的n行n列棋盘，能摆下不能互吃的象的最大数是$2n-2$。

(*c*) 证明：当n是偶数时，在n行n列棋盘上放下最大数目的不能互吃的象，所有不同的摆法的总数是一个完全平方数。

5.令n是在一次晚会上与别人握过奇数次手的人数，证明n是偶数。

6.证明：若n是一个完全平方数，则n有奇数个因数（包括1和n本身）；若n不是完全平方数，则n有偶数个因数。

7.我们可以把巴黎的桥的位置重新画成一个图，用一个顶点表示每一块陆地，用联结相应两个顶点的线表示桥，如图10所示。对此图找出一条Euler 道路，即这条道路通过每条线恰好一次。证明：没有以同一个顶点为起点和终点的 Euler 道路，即没有Euler圈。

8.(*a*) 证明：一个数是奇数，当且仅当把它写成三进制时数码1出现奇数个。

(*b*) 证明：在n进位制（n为奇数）中一个数是奇数，当且仅当它有奇数个奇数码。例如，5进制数24320是奇数。

9.在图8中，我们曾证明了它没有Hamilton圈，请证明它也没有Hamilton道路。

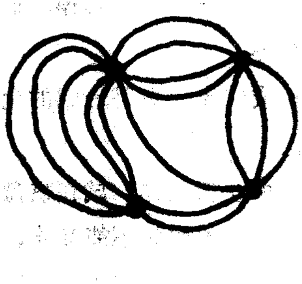

图10

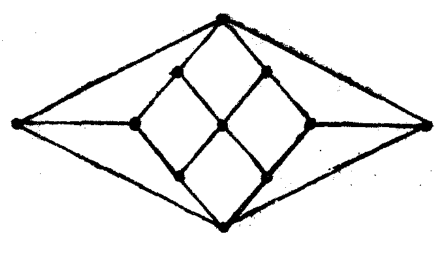

图11