量子力学教学丛书 喀兴林 主编

量子力学中的散射问题

熊钰庆 编著

福建科学技术出版社

量子力学中的散射问题

喀兴林　主编

熊钰庆　编著

福建科学技术出版社

1988年·福州

内 容 提 要

本书在量子力学框架内阐述散射问题，着重讨论势散射理论和弹性散射。内容包括：经典势散射；量子力学中散射问题的一般描述；分波法；玻恩近似法；势散射的格林函数解法；库仑场的散射；全同粒子的散射；考虑自旋与轨道相互作用时的散射；非弹性散射；散射截面与跃迁几率。

本书可供高等院校有关专业教师、学生作为教学和学习用书，以及科技人员参考书。

量子力学中的散射问题

喀兴林 主编 熊钰庆 编著

福建科学技术出版社出版
（福州得贵巷27号）
福建省新华书店发行
三明市印刷厂印刷
开本787×1092毫米 1/32 4.5印张 95千字
1988年7月第1版
1988年7月第1次印刷
印数：1—2,000
ISBN 7—5335—0112—8/O·10
书号：7211·89 定价：1.10元

前　言

量子力学这门学科自1925年诞生以来，至今已有60多年了。在这60多年中，它已从“原子的理论”发展成为微观现象的普遍理论，是一切近代物理学的理论基础。目前，量子力学是大学物理系的一门重要基础课，是所有学物理的人都必须认真学习的一门必修课，学习的份量在增加、内容在提高。不仅如此，理科的化学、生物学等学科和工科的材料科学、激光和半导体等学科也都要学习这门课程。

然而，由于量子力学所反映微观世界中的许多概念和规律，不能象经典概念那样根据人们的生活经验去体会，使量子力学这门课程显得有些抽象难懂。加上量子力学所用的数学方法又与人们所熟悉的经典物理有较大的差别，使得这门课程既不容易教又不容易学。

我们经常听到不少担任量子力学课的年轻教师提出，希望能看到一些有助于他们提高教学水平、解决他们备课和教学中问题的参考资料；也听到许多学习量子力学的大学生提出，希望能看到帮助他们理解概念、学好这门课程的参考读物。为此，全国高校量子力学研究会针对广大师生的要求，组织编写了这一套《量子力学教学丛书》。该丛书紧密配合大学的量子力学课程，把内容分为若干单元，每一分册针对一个单元，对其中所涉及的概念和规律、重点、难点以及用到的数学技巧，作了较详细、全面、深入的分析和讲解，有些地方还对有关的知识加以拓宽和加深。目的是为了帮助读

者更好地掌握量子力学中的概念和理论，以及教好和学好这门十分重要与有用的课程。

《丛书》的每一分册都是请有丰富教学经验并对本专题有深入研究的教授或副教授执笔。各书具有相当大的独立性，自成体系，与其他分册联系不多，这是为了使各位作者充分地写出自己的教学经验和特定风格。同时，对《丛书》的体例和格式等方面没有过分地追求一致，使每本书带有自己的特色。

我们希望这套《丛书》能够在一定程度上满足不同方面的读者需要，对读者的教学工作和学习上有所帮助。同时也希望各位读者对这套《丛书》的内容和编排等各个方面，给于批评和指教。

全国高校量子力学研究会理事长

喀兴林

1987. 4

引　言

散射问题是粒子在势场作用下的偏转问题。散射实验是研究原子、原子核和基本粒子的内部结构以及它们之间的相互作用的重要手段。处理微观粒子散射问题的理论工具是量子力学和量子场论，其中心内容是计算散射粒子的散射截面，从而与实验进行比较。

本书在量子力学理论框架内，综述微观粒子的散射问题，着重讨论势散射理论。

目　　录

第一章　经典的势散射

势散射的量子力学描述方法，与经典处理方法之间有一定的联系。例如，散射截面的概念、两体问题约化为单体问题、质心坐标系与实验室坐标系的变换等，特别是高速α粒子被中性原子散射时，在大散射角的情况下，量子力学计算所得的散射截面表示式——*Rutherford* 公式——与 *Rutherford* 用经典力学方法计算 *Coulomb* 散射（不考虑屏蔽作用）所得结果一致。

§1. *Coulomb* 散射　*Rutherford* 公式

我们将研究带电粒子在库仑（*Coulomb*）场中的散射，从而导出卢瑟福（*Rutherford*）公式。

一、粒子在中心场中的运动

*Coulomb*场是特殊形式的中心力场。所以，首先要概述粒子在中心场中运动的主要特性，中心力可表述为

$$\mathbf{F}=F(r)\frac{\mathbf{r}}{r} \tag{1·1}$$

即力的方向沿着粒子与力心的联线（斥力或引力），而其大小只依赖于力心至粒子的距离。

可以证明*，有心力是保守力，因而(1·1)式可表为

* 参阅周衍柏编《理论力学》，1979年版，P.67。

$$\mathbf{F} = -\frac{\partial U(r)}{\partial r} = -\frac{dU}{dr}\frac{\mathbf{r}}{r} \tag{1·2}$$

这时势能函数U也只是矢径r的函数，即$U(\mathbf{r}) = U(r)$。

还可以证明*，中心力场中运动的粒子其对力心的动量矩守恒，因而粒子只能在垂直于动量矩的平面内运动**。采用平面极坐标系(r, θ)，取力心为极坐标的极点，则 *Lagrangian* 可写成

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - U(r) \tag{1·3}$$

粒子的运动微分方程为

$$\left.\begin{aligned} &m(\ddot{r} - \dot{r}\theta^2) = F_r = F(r) \\ &m(r\ddot{\theta} + 2r\ddot{\theta} = F_\theta = 0 \end{aligned}\right\} \tag{1·4}$$

由（1·4）式可得到中心场中粒子的动量矩守恒和能量守恒***：

$$\left.\begin{aligned} &M = mr\dot{\theta}^2 = \text{常数} \\ &E = \frac{1}{2}m(\ddot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + U(r) \\ &= \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{M}{2mr^2} + U(r) = \text{常数} \end{aligned}\right\} \tag{1·5}$$

从能量守恒定律和动量矩守恒定律出发，可以得到中心场中粒子的轨道方程****

* 参阅朗道与栗弗席兹著《力学》，1959年版，§ 9。
** 同上书，§ 14。
*** 参阅 Goldstein《*Classical Mechanics*》，§ 3—2。
**** 参阅朗道与栗弗席兹著《力学》，1959年版，§ 14。

$$\theta=\int\frac{\frac{M}{r^2}dr}{\sqrt{2m[E-U(r)]-\frac{M}{r^2}}}+\text{常数} \tag{1·6}$$

二、平方反比力场 Kepler问题

中心场的一个极重要的情况是平方反比力场，相应的势能与r成反比。*Newton*万有引力场和*Coulomb*静电场就是这类场。前一种场具有吸引的特性，而后一种场则可能是吸引场（例如氢原子问题），也可能是排斥场（例如α粒子被中性原子的散射）。吸引场与排斥场可分别表为

$$U(r)=-\frac{\alpha}{r},\quad \alpha>0 \tag{1·7}$$

$$U(r)=\frac{\alpha}{r},\quad \alpha>0 \tag{1·8}$$

将(1·7)式或(1·8)式代入(1·6)式进行积分，可得到轨道方程为*

$$\frac{p}{r}=1+e\cos\theta,\ \text{吸引势}, \tag{1·9}$$

$$\frac{p}{r}=-1+e\cos\theta,\ \text{排斥势}, \tag{1·10}$$

其中

$$p=\frac{M^2}{m\alpha},\qquad e=\sqrt{1+\frac{2EM}{m\alpha^2}} \tag{1·11}$$

分别称为**轨道的参数**和**偏心率**。

在此，我们不研究吸引场的情形。对于排斥场，粒子能量只可能是正的，因而运动总是无限的，轨道是双曲线（当

* 参阅朗道与栗弗席兹著《力学》，1959年版，§ 15。

$E=0$时是抛物线），由（1·10）式表示。

三、粒子在中心场中的散射

为了进一步研究带电粒子在Coulomb场中的散射问题，我们一般讨论一个质量为m的粒子在力心不动的场$U(r)$中偏转的问题。首先确定散射角（偏转角）与"瞄准距离"的关系，然后求出射散的有效截面的公式。

考虑到粒子在中心场中的轨道，相对于通过轨道上离中心最近的点所作的直线（图1—1中的OA）是对称的，因而轨道的两条渐近线与这条直线相交的角是一样的，用θ_0表示。根据(1·6)式，θ_0角由下面的积分来决定：

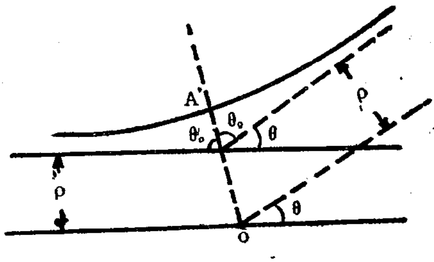

图1—1

$$\theta_0=\int_{r_{min}}^{\infty}\frac{\frac{M}{r^2}dr}{\sqrt{2m[E-U(r)]-\frac{M^2}{r^2}}} \tag{1·12}$$

这是从粒子离中心最近的位置到无穷远的位置的积分。

由图1—1可见，粒子在它飞过中心附近以后的偏转角为

$$\theta=|\pi-2\theta_0| \tag{1·13}$$

我们这里所讨论的无限运动，采用粒子在无穷远处的速度v_∞和所谓"瞄准距离"ρ来代替常量E和M特别方便。"瞄准距离"（或称碰撞参数）是从中心向v_∞方向所引垂

直线的长度，亦即这样的距离，如果力场不存在，则粒子以这样的距离从中心旁边经过而不偏转（图1—1）。能量和动量矩按下式与v_∞和ρ相联系：

$$E=\frac{mv_\infty^2}{2},\qquad M=m\rho v_\infty \tag{1·14}$$

这时(1·12)式变成

$$\theta_0=\int_{r_{min}}^{\infty}\frac{\rho\frac{dr}{r^2}}{\sqrt{1-\frac{\rho^2}{r^2}-\frac{2U(r)}{mv_\infty}}} \tag{1·15}$$

（1·13）式与（1·15）式一起决定散射角θ与瞄准距离ρ的依赖关系。

在散射实验中，不是一个粒子的偏转，而是投向散射中心（靶粒子）的有相同速度的全同粒子所组成的整个粒子束的偏转(散射)。在束内不同的粒子有着不同的瞄准距离ρ，因而相应地也以不同的偏转角θ散射。我们用dN表示单位时间内在$\theta\sim\theta+d\theta$角度内被散射的粒子数。但这一数目不便于描述散射过程的特性，因为它依赖于入射粒子束的强度（或称流密度）。所以，我们引入下述关系式

$$d\sigma=\frac{dN}{N} \tag{1·16}$$

其中，N是在单位时间内通过垂直于束的单位截面积的粒子数——**入射粒子束的强度**（当然，我们假定粒子束在自己的整个截面上是均匀的）。容易看出，比率$d\sigma$具有面积的量纲，称为**散射的有效截面**。它完全由散射场的形式所决定，是散射过程的一个重要物理量，是一切散射实验所测量

的量。

如果散射角是瞄准距离的单调下降函数，则θ与ρ间的关系是互为单值的。在这样的情形下，在散射角区间$\theta\sim\theta+d\theta$内所散射的，只是其瞄准距离在一定区间$\rho\sim\rho+d\rho$内的粒子（图1—2），此粒子数目等于N与半径为ρ和$\rho+d\rho$的两圆周间环形面积的乘积，即$dN=2\pi\rho d\rho\cdot N$。于是，有效截面为

$$d\sigma=2\pi\rho d\rho \tag{1·17}$$

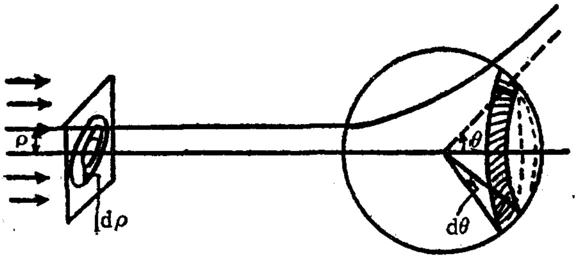

图 1—2

为了要找到有效截面对于散射角θ的依赖关系，只须把此式改写成

$$d\sigma=2\pi\rho(\theta)\left|\frac{d\rho(\theta)}{d\theta}\right|d\theta \tag{1·18}$$

其中$\frac{d\rho}{d\theta}$取绝对值，这是因为它可能是负值。由（1·15）式可知，只要相互作用势能$U(r)$已知，就可确定ρ与θ的关系，从而由上式计算散射截面。

常常用立体角元$d\Omega$代替平面角元$d\theta$。在两个张角为θ和$\theta+d\theta$的圆锥体间的立体角是

$$d\Omega = 2\pi \sin\theta d\theta. \tag{1·19}$$

于是，（1·18）式可变形为

$$d\sigma = \frac{\rho(\theta)}{\sin\theta}\left|\frac{d\rho}{d\theta}\right| d\Omega$$

$$= \sigma(\theta) d\Omega \tag{1·20}$$

其中

$$\sigma(\theta) = \frac{\rho(\theta)}{\sin\theta}\left|\frac{d\rho}{d\theta}\right| \tag{1·21}$$

是入射粒子被散射到单位立体角中的微分散射截面。

四、Coulomb散射　Rutherford公式

现在应用前面结果来研究带电粒子在*Coulomb*场中的散射。*Coulomb* 势可表为

$$U(r) = \frac{\alpha}{r} \tag{1·22}$$

代入（1·15）式进行积分，我们便得到

$$\theta_0 = \arc\cos \frac{\dfrac{\alpha}{mv_\infty^2 \rho}}{\sqrt{1 + \dfrac{\alpha}{\left(mv_\infty^2 \rho\right)^2}}}$$

由此得

$$\rho^2 = \frac{\alpha^2}{m^2 v_\infty^2 \ \mathrm{tg}^2\theta_0}$$

按（1·13）式引入$\theta_0 = \dfrac{\pi - \theta}{2}$，则上式成为

$$\rho^2 = \frac{\alpha^2}{m^2 v_\infty^4 \ \mathrm{ctg}^2\dfrac{\theta}{2}} \tag{1·23}$$

将上式对θ微分，代入（1·18）式或（1·20）式，最后得到

$$d\sigma=\pi\left(\frac{a}{mv_{\infty}^{2}}\right)^{2}\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin^{3}\frac{\theta}{2}}\,d\theta \tag{1·24}$$

或

$$d\sigma=\left(\frac{a}{2mv_{\infty}^{2}}\right)^{2}\frac{d\Omega}{\sin^{4}\frac{\theta}{2}} \tag{1·25}$$

由上两式可见，有效截面不依赖于a的符号，因而，所得结果相对于斥力或引力的*Coulomb*场而言都一样。

对α粒子被中性原子散射的情形，忽略原子核外电子的屏蔽作用，*Coulomb*势可表为

$$U(r)=\frac{z'ze^{2}}{r} \tag{1·26}$$

式中，ze和$z'e$分别表示散射原子核的电荷和α粒子的电荷。比较（1·22）式和（1·26）式可知

$$a=z'ze^{2}>0 \qquad （排斥场） \tag{1·27}$$

代入（1·25）式得

$$d\sigma=\left(\frac{z'ze^{2}}{2mv_{\infty}^{2}}\right)^{2}\frac{d\Omega}{\sin^{4}\frac{\theta}{2}} \tag{1·28}$$

注意到（1·14）式第一式，上式又可表为

$$d\sigma=\frac{1}{4}\left(\frac{z'ze^{2}}{E}\right)^{2}\frac{1}{\sin^{4}\frac{\theta}{2}}\,d\Omega \tag{1·29}$$

（1·28）式或（1·29）式就是*Rutherford*公式，是*Rutherford*在1911年首先推导出来的。*Rutherford*在对H·盖革和E·马尔斯登的α粒子散射实验作了理论分析之

后，提出了关于原子的某种图象，即原子的核式结构。按照这种图象，原子有一个非常小的带正电的中心核，原子大部分质量集中在核内，周围环绕着一个或许多个电子。由此，便非常自然地尝试建立原子的行星模型，把核看作太阳，把电子看作行星，原子的大小就是最外层电子轨道的半径。

1913 年 N·玻尔（Bohr）循着这条线索提出了一个氢原子理论。这个理论的最简单描述为：单电子沿半径为a_0的圆形轨道绕质子运动。轨道由运动方程

$$m\left(\frac{v^2}{a_0}\right)=\frac{e^2}{a_0^2}$$

以及Bohr 的量子化条件

$$M=mva_0=\frac{h}{2\pi}$$

共同决定，其中 v是电子速度，而M是动量矩。如果在上述方程中消去 v，便得到

$$a_0=\frac{h^2}{(2\pi)^2me^2}=0.53\times10^{-8}\text{厘米},$$

这正是所希望的数量级。

Bohr 理论能够定量地解释氢原子光谱实验，是这个新概念的成功之处。原子的行星模型在氢原子的特殊情况下，能如此成功是个幸运的(或是不幸的)偶然事件。同时，它鼓舞了*Bohr* 和其他一些人去尝试建立原子的量子理论；但如果它导致人们相信原子无论在哪一方面都象一个行星系，那就不对了。*Bohr* 本人并没有受骗；他认为：他自己的理论只是在探求更加前后一致的理论中的一个中间步骤，这样的理论就是量子力学。