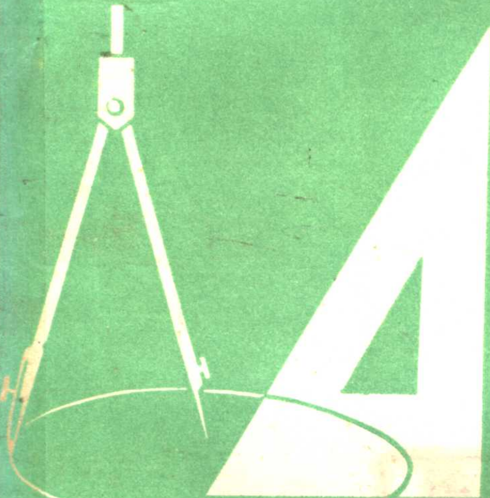
日本各大学历年入学试题集

$S=\pi r^2$



数学题解

上册

科学普及出版社广州分社

日本各大学历年入学试题集

数　学　题　解

（上册）

李吉桂　曾　畅　编译

科学普及出版社广州分社

日本各大学历年入学试题集

数学题解（上册）

李吉桂　曾　畅　编译
绘图：蔡永摽　封面设计：莫梓顺
科学普及出版社广州分社出版
广州市教育北路大华街兴平里二号
广东省粤北印刷厂印刷
广东省新华书店发行
开本：787×1092毫米1/32　印张：8　字数：179千字
1981年11月第一版　1981年11月第一次印刷
印数：56,000册　统一书号：7051·60083
定价：0.80元

编 译 说 明

本书主要根据日本各大学历年入学试题集精选编译而成。

本册的特点是：

1．选材。基本上根据我国中学数学教学大纲的精神进行精选。

2．内容。大部分题目为国内少见，形式多样，有填充、选择、计算、证明等类题目。

3．编排。每类内容分如下四部分：

（1）要点与说明（重要定义、定理、命题或编译说明）；

（2）例题（题意分析、解（证）、解题关键，注意事项）；

（3）试题（解答集中在书末）；

（4）提示（对较难的题目给予恰到好处的提示）。

这样编排的目的是希望尽可能有利于培养分析问题和解决问题的能力。

本书不但广大的中学生、知识青年适用，而且也是中学数学教师的一本教学参考书；对于师范院校数学系的师生也有一定的参考价值。

在编译过程中，承蒙吴汉明副教授详尽地审阅并提出了许多宝贵的修改意见。此外，侯德富同志曾给予很大帮助，蔡永樵同志为本书绘制了全部插图，并负责部分校对工作。在此，向他们表示谢忱。

由于水平所限，不当之处，欢迎指正。

编译者

一九八一年十月

目 录

试　题

一、平　面　几　何

（一）三角形的全等关系

〔要点与说明〕

平面几何中有关的公理、定义、定理内容已见于国内教材，困难的是如何运用这些基本知识来证题。下面通过例题扼要介绍解各类问题的基本方法。

〔例〕

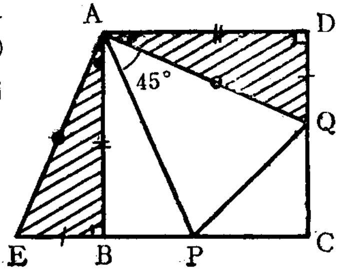
1．　在正方形ABCD的边BC和CD上分别取点P和Q，且$\angle PAQ=45°$．求证

$$BP+DQ=PQ$$

分析：

将$\triangle AQD$绕A点顺时针旋转90°．

证明：



在CB的延长线上取点E，使

$$BE=DQ \qquad \cdots\cdots ①$$

连结AE．在$\triangle ABE$和$\triangle ADQ$中

$AB=AD$，$BE=DQ$

$\angle ABE=\angle ADQ=90°$

$\therefore \triangle ABE\cong\triangle ADQ$

$\therefore\quad AE=AQ$ ……②

$\angle EAB=\angle QAD$ ……③

在$\triangle AEP$和$\triangle AQP$中

由②式，$AE=AQ$；又AP是公共边

$\angle EAP=\angle EAB+\angle BAP$

由③式，$\angle EAP=\angle QAD+\angle BAP=\angle BAD-\angle PAQ=90^\circ-45^\circ=45^\circ$

$\therefore\angle EAP=\angle QAP$

$\therefore\triangle AEP\cong\triangle AQP$

$\therefore EP=PQ$ ……④

因为$EP=BP+BE$，将①式代入得

$EP=BP+DQ$ ……⑤

由⑤和④得 $BP+DQ=PQ$。

关键：

将三角形AQD绕A旋转90°，移到$\triangle AEB$便可以看出$BP+DQ=PQ$。将二条线段的和变为一条线段是证明的关键。

〔试题〕

2. 同一平面上给定的两个三角形$\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$，试证明：在平行移动、旋转和对称移动中分别最多只须使用一次，就能够将$\triangle ABC$移到$\triangle A'B'C'$的位置。

3. 取正方形ABCD的CD上的点E，使$AE=BC+CE$；F为CD边的中点，连结AF。试证明$\angle BAE=2\angle FAD$。

4. 在正三角形ABC内任取一点P，过P分别作AB、BC和CA的平行线与BC、CA和AB相交于点L、M和N。求证$PL+PM+PN=a$，其中a是正三角形ABC的边长。

5．在平行四边形ABCD中，取AD、BC的中点分别为M和N；设BM和DN与对角线的交点分别为P和Q．求证$AP=PQ=QC$。

6．在△ABC中，通过顶点A的适当的直线可以将它分成两个相似的三角形。问△ABC应是怎样的三角形。

7．设平面上一点P_0，不通过P_0的三条不同的直线为l_1，l_2和l_3，关于l_1与P_0对称的点为P_1，关于l_2与P_1对称的点为P_2，关于l_3与P_2对称的点为P_3。求证：如果P_3与P_0重合，则直线l_1、l_2和l_3相交于一点，或者互相平行。

〔提示〕

3．在DC的延长线上取点G，使$CG=BC$。

5．利用三角形重心的性质和中位线定理。

6．三角形的一个外角大于任何一个和它不相邻的内角。

7．分l_1与l_2相交和l_1与l_2平行两种情况加以考虑。

（二）三角形边的大小关系

〔例〕

8．设P是△ABC内任意一点，BP和CP的延长线与边AC和AB分别交于D和E。求证

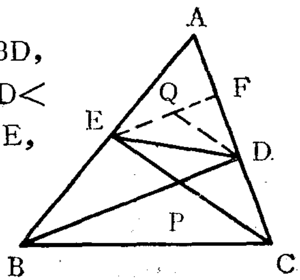
$$PD+PE<AD+AE。$$

分析：

将$PD+PE$移到关于ED边的A点一侧。虽然将$PD+PE$关于直线ED作对称移动时，P的对称点有可能在三角形外

面，但是若关于ED的中点作对称移动，P的对称点就必然在△AED的内部。

证明：



作平行四边形EPDQ，由EQ∥BD，DQ∥CE，有∠AEQ＝∠ABD＜∠AED，∠ADQ＝∠ACE＜∠ADE，因而点Q在△AED内。

设EQ与AC的交点为F，

在△AEF中

$AE+AF>EQ+QF$ ……①

在△FQD中 $QF+FD>QD$ ……②

①＋②得 $AE+AD>EQ+QD$

又因为$EQ=PD$，$QD=PE$，所以

$AE+AD>PD+PE$.

关键：

证明不等式，经常依赖于图形的移动，这时可以很好地使用："若P是△ABC内任一点，则有$AB+AC>PB+PC$"这个结论。

〔试题〕

9. ABCD和PBCQ是以BC为公共边的两个凸四边形，顶点P、Q在四边形ABCD的内部，试证明：

（1） $\angle BAD+\angle ADC<\angle BPQ+\angle PQC$.

（2） $AB+AD+DC>BP+PQ+QC$

10. 设正三角形ABC的边长为a，在这个三角形的内部或者边上取一点P；设α、β、γ分别为P至顶点A、B和C的距离；

（1） 指出使$\alpha \leqslant \gamma$、$\beta \leqslant \gamma$成立的点P的范围。

（2） 对于△ABC内部或其边上的所有可能的点P，求使下述命题成立的K的最小值：

在$\alpha+\beta$、$\beta+\gamma$和$\gamma+\alpha$中至少存在一个不大于K。

11. △ABC的顶角A、B、C的对边的长分别为a、b、c，证明下述不等式：

$$60^\circ \leqslant \frac{aA+bB+cC}{a+b+c} < 90^\circ.$$

〔提示〕

9.（1） 四边形的内角和为$4\times\frac{\pi}{2}$；（2） 多边形的任一边比其余各边的和小。

10. 在（2）中利用（1）的结果。

11. $A+B+C=180^\circ$，利用三角形两边的和比另一边大。

（三）三角形角的平分线的性质

〔要点与说明〕

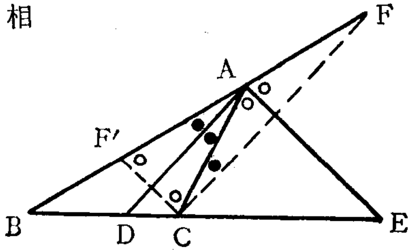
下述命题指出了三角形的角的平分线的重要性质：

设△ABC的角A的平分线与BC边相交于D，∠A的外角平分线与BC的延长线相交于E；则有：

（1） $\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}$

（2） $\frac{AB}{AC}=\frac{BE}{EC}$

并且逆命题也成立。



〔例〕

12. 设△ABC的∠B和∠C的平分线与边AC、AB分别交于D和E，且BE＝CD；求证AB＝AC。

分析：

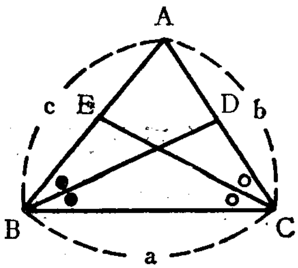
根据上述命题，用这个三角形三边的长表示BE和CD的长。

证明：

令BC＝a，CA＝b，AB＝c，因为CE为∠C的平分线，所以由上述命题有$\frac{AC}{BC}=\frac{AE}{BE}$，利用比例的性质有

$\frac{AC+BC}{BC}=\frac{AE+BE}{BE}=\frac{AB}{BE}$，于是有$\frac{b+a}{a}=\frac{c}{BE}$，即

$$BE=\frac{ac}{a+b}$$



同理有

$$CD=\frac{ab}{a+c}$$

由已知条件BE＝CD可得

$$\frac{ac}{a+b}=\frac{ab}{a+c}$$

整理得

$$c(a+c)-b(a+b)=0$$

分解因式得

$$(c-b)(a+b+c)=0$$

因为$a+b+c>0$，所以$b=c$，即AB＝AC。

关键：

能用三角形的边长a、b、c表示的线段，都用a、

b、c表示。

〔试题〕

13. 在四边形ABCD中，求证：如果∠A和∠C的平分线在对角线BD上相交，则∠B和∠D的平分线在对角线AC上相交。

14. 已知△ABC中，AB>AC；BC的中点为M，∠A的平分线与BC相交于D；从点C引AD的垂线与AD、AM分别交于P和Q。求证QD∥AC。

15. 设梯形ABCD的两底AD和BC的长分别为a和b。通过对角线的交点O、平行于底的直线与AB、DC分别相交于E和F。

（1） 求证OE＝OF。

（2） 计算EF的长。

（3） 求证$\frac{1}{AD}+\frac{1}{BC}=\frac{2}{EF}$。

〔提示〕

14. 设CP的延长线与AB的交点为C′，利用AC′＝AC

C′B∥PM，2PM＝C′B，有$\frac{MQ}{QA}=\frac{MD}{DC}$。

15.（1）利用△AOD∽△COB，用a、b表示OE和OF。

（四）三角形的面积比

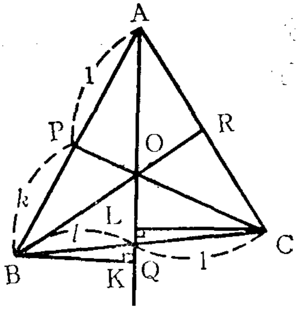
〔例〕

16. 取△ABC的AB边的内分点（AP：PB＝1：k）P，BC边的内分点（BQ：QC＝l：1）为Q；设AQ与CP的交点为O，BO的延长线与AC的交点为R：

（1） 试用k与l表示面积比$\frac{\triangle AOC}{\triangle ABC}$。

（2） 试用k与l表示面积比$\frac{\triangle AOR}{\triangle ABC}$。

分析：



利用$\frac{\triangle AOB}{\triangle AOC}=\frac{BQ}{QC}$，

$\frac{\triangle AOC}{\triangle BOC}=\frac{AP}{PB}$。

解：

（1） 设从B、C引AO的垂线，垂足分别为K和L。

$\angle BQK=\angle CQL$，$\angle BKQ=\angle CLQ=90°$

$\therefore \triangle BKQ \backsim \triangle CLQ$

$\therefore BK:CL=BQ:QC$

因此，$\frac{\triangle AOB}{\triangle AOC}=\frac{BK}{CL}=\frac{BQ}{QC}=\frac{l}{1}$

$\therefore \triangle AOB=l\triangle AOC$

同理$\frac{\triangle BOC}{\triangle AOC}=\frac{BP}{PA}=\frac{k}{1}$

$\therefore \triangle BOC=k\triangle AOC$

$$\therefore \frac{\triangle AOC}{\triangle ABC}=\frac{\triangle AOC}{\triangle AOB+\triangle BOC+\triangle AOC}=\frac{1}{l+k+1}$$

（2） $\because \frac{\triangle AOB}{\triangle AOC}=\frac{l}{1}$， $\frac{\triangle AOC}{\triangle BOC}=\frac{1}{k}$，

$$\frac{\triangle BOC}{\triangle AOB}=\frac{RC}{AR}$$

$$\therefore \frac{l}{k}\cdot\frac{RC}{AR}=\frac{\triangle AOB}{\triangle AOC}\cdot\frac{\triangle AOC}{\triangle BOC}\cdot\frac{\triangle BOC}{\triangle AOB}=1$$

因而$\frac{RC}{AR}=\frac{k}{l}$， $\frac{AC}{AR}=\frac{l+k}{l}$

$$\frac{\triangle AOR}{\triangle AOC}=\frac{AR}{AC}=\frac{l}{l+k},$$

由（1）的结果$\frac{\triangle AOC}{\triangle ABC}=\frac{1}{l+k+1}$

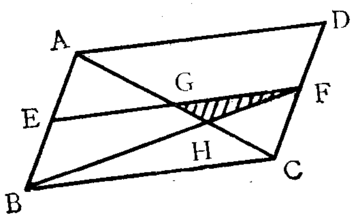
得$\frac{\triangle AOR}{\triangle ABC}=\frac{\triangle AOR}{\triangle AOC}\cdot\frac{\triangle AOC}{\triangle ABC}=\frac{l}{(l+k)(l+k+1)}$

关键：

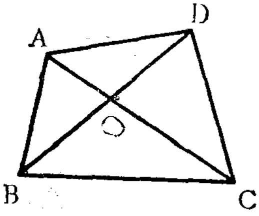
等底（等高）的两个三角形的面积比等于高（底边）的比。

〔试题〕

17. 设平行四边形ABCD的面积为a，AB和CD的中点分别为E和F；AC与EF、BF的交点分别为G和H。求△FGH的面积。



18. 设凸四边形ABCD的对角线AC与BD的交点为O，△AOB和△COD的面积分别为定值9和25。求这个四边形的面积的最小值。



19. 证明四边形ABCD为平行四边形的充要条件是：对于形内任意一点P有

$$\triangle PAB+\triangle PCD=\frac{1}{2}(\text{四边形}ABCD)$$

20. 从△ABC的各顶点到对边的直线AD、BE和CF相交于一点O时，求证

$$\frac{DO}{AD}+\frac{EO}{BE}+\frac{FO}{CF}=1$$

21. 在凸四边形ABCD的边AB、BC、CD和DA上分别取点P、Q、R和S，且有

$$\frac{AP}{PB}=\frac{BQ}{QC}=\frac{CR}{RD}=\frac{DS}{SA}=\frac{m}{n}$$

试求四边形PQRS与四边形ABCD的面积比。

22. 在△ABC的边AB、AC上分别取点D和E，使DE与BC平行且将△ABC的面积二等分；又设边AC的中点为M，DE与BM的交点为N。

（1） 求$\frac{AE}{AC}$。

（2） 设BC长为a，从顶点A到边BC的垂线的长为h，试用a和h表示四边形ADNM的面积。

〔提示〕

21．求△APS＋△CQR，△BPQ＋△DRS与四边形

ABCD的面积比。

22.（1）相似形的面积比等于相似比的平方。

（2）四边形ADNM＝△ABM－△BND。

（五）圆周角

〔例〕

23. 设△ABC的外接圆的$\overset{\frown}{AB}$的中点为M，$\overset{\frown}{AC}$的中点为N，MN与AB和AC分别交于P和Q，求证：

（1） △APQ是等腰三角形；

（2） 当△APQ是正三角形时，有BC＝MN。

分析：

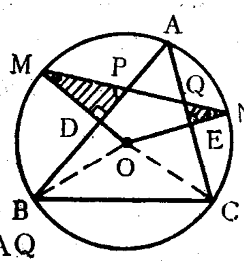
（1） 设外接圆的圆心（外心）为O，若连结OM和ON，OM和ON分别与AB和AC相交于D和E，则△MDP与△NEQ相似。

（2） 在同圆或等圆中，相等（或互为补角）的圆周角所对的弦也相等。

证明：

（1） 设外心为O，直线OM和ON与AB和AC分别交于D和E，则D和E分别是AB和AC的中点。在△MDP和△NEQ中

$$\angle MDP = \angle NEQ = 90^\circ$$



又因为OM＝ON，

$\angle DMP = \angle ENQ$

$\therefore \angle MPD = \angle NQE$

$\therefore \angle APQ = \angle AQP$　　$\therefore AP = AQ$

（2） 当$\angle B$和$\angle C$是锐角时，在四边形ADOE中，因为$\angle D=\angle E=90°$，$\angle A+\angle MON=2\times 90°$

又因为$\angle A=60°$，所以$\angle MON=120°$

因此$\overset{\frown}{MAN}$所对的圆周角为60°，于是弦BC和弦MN相等。$\therefore BC=MN$

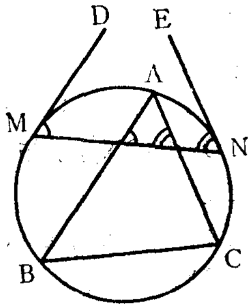
当$\angle B$或者$\angle C$是钝角时，因为同样地可以证明$\angle A+\angle MON=2\times 90°$，所以也有$BC=MN$。

另证：

过点M和N向A点的一侧分别作外接圆的切线MD和NE，因为M和N别分是弧的中点，所以

$DM\parallel AB$，$EN\parallel AC$

由此也能证明（1）。



关键：

在关于圆的证明题中，圆的弧、弦和圆周角的性质、圆的切线的性质和圆与四边形的性质起着重要的作用。

〔试题〕

24. 已知正三角形ABC的外接圆上的劣弧$\overset{\frown}{BC}$上的任意一点P，求证$PA=PB+PC$。

25. $\triangle ABC$为锐角三角形，从BC边上任意一点P作另两边的垂线，分别与AB、AC相交于M和N，试确定当$MN\parallel BC$时，P点的位置。

26. P为三角形内任意一点，求证：在以各边为直径的三个圆中，至少有两个圆包含点P。