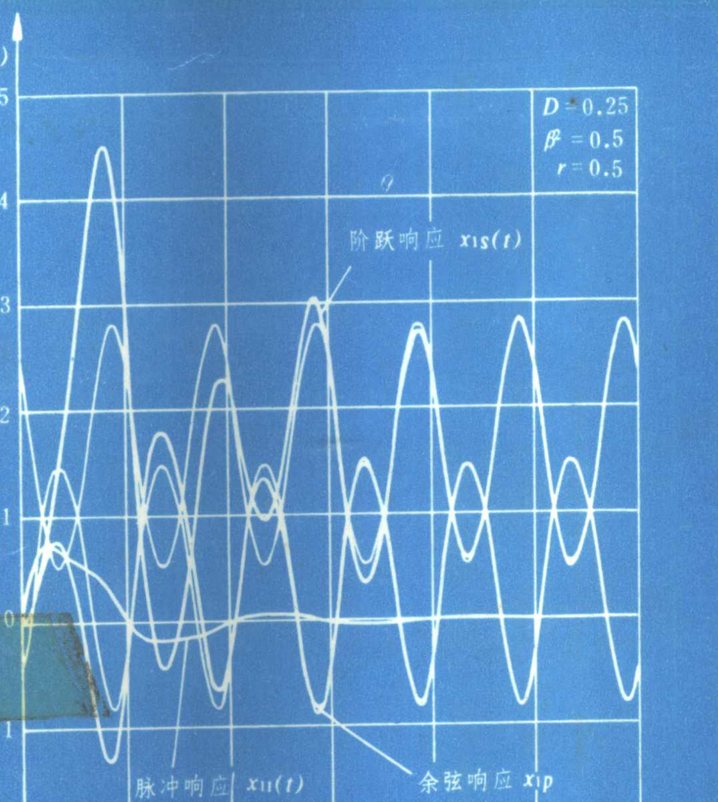
线性振动

——多自由度振动系统的理论分析方法——

（德）P·C·米勒　W·O·席伦　著

曾子平　向豪英　等译



天津大学出版社

线 性 振 动

——多自由度振动系统的理论分析方法——

P·C·米勒　　W·O·席伦　著

曾子平　向豪英　徐燕申
黄　田　王殿举　田素珍　陈志荣　译

曾子平　校

天津大学出版社

内 容 提 要

本书运用状态变量法，系统地论述了多自由度振动的现代分析方法及其在工程中的应用。全书共分四篇十四章，包括线性时不变和时变系统的建模、稳定性分析和适用于计算机的求解方法。涉及自由振动、强迫振动、随机振动和参数振动，以及有关的数学基础知识。各章附有工程问题的分析实例。

本书对理论概念的阐述清晰严谨，内容新颖、系统，并附有一定的习题以便读者进一步理解和掌握有关的理论内容。

本书可作为高等院校理工科高年级学生和研究生振动理论课的教学参考书；也可供高等学校教师和从事力学、机械、航空、航天、船舶、土木等振动分析的科技人员参考。

线 性 振 动

—多自由度振动系统的理论分析方法—

P.C.米勒 W.O.席伦 著

曾子平 向豪英 徐燕申 黄 田 王殿举 田素珍 陈志荣 译

曾子平 校

*

天津大学出版社出版

（天津大学内）

河北省永清县印刷厂印刷

新华书店天津发行所发行

*

开本：850×1168毫米 1/32 印张：10 3/8 字数：270千字

1989年9月第一版 1989年9月第一次印刷

印数：1—2000

ISBN 7-5618-0102-5

O.9

定价：2.05元

译 者 序

本书是美国著名力学家 L.米罗维奇教授主编的“力学—动力系统”丛书中的一本，由联邦德国Bergische大学米勒（P.C.Müller）教授和Stuttgart大学力学研究所席伦（W.O.Schiehlen）教授合著。书中采用状态变量法系统地论述多自由度机械系统线性振动的现代分析方法。这种分析方法不仅适用于线性时不变系统，而且可以使得时变系统和非线性系统的问题易于得到解决。同时，由于该方法采用矩阵为基本数学工具，将状态方程归纳成统一的格式，所以特别适合于应用数字计算机进行数值分析和求解。

书中对理论概念的阐述清晰严谨，内容新颖、系统，而且注重实际应用。各章所附的结合工程问题的实际例子，前后呼应，有助于读者对内容的理解和逐步深入。本书不仅是一本理工科有关专业研究生和高年级学生学习振动分析好的教学参考书，而且也是高等学校教师和对振动分析有兴趣的科学工作者与工程技术人员的一本有益的参考书。

本书全部插图由孙昭文同志描绘。翻译过程中得到了天津大学机械系机械动态性能研究室和天津大学出版社同志们的支持，在此表示衷心的感谢。

由于译者水平所限，译文难免有不妥和错误之处，恳请读者赐教。

译者 1989.1.10

前　　言

在过去十年中，振动分析方面的发展特点是要求提高分析的精度和日益增长地使用电子计算机。如今，对技术系统较为精确的建模可改善分析的精度。因此，单自由度系统的例子通常是无法接受的，可是在以往却把它作为机械工程振动分析的一个模型。通常，车辆和机械必须作为多自由度系统，例如多体系统，有限元系统或连续体来建模。多自由度系统的数学描述导出相应方程的矩阵表达式。这样就可以方便地使用电子计算机，即用模拟计算机，特别是用数字机加以分析。对计算要求的不断增长和计算机设备的增加之间存在着相互的促进作用。

本书讲述使用计算机求解的多自由度技术系统的线性振动分析。

第一篇首先对振动系统进行分类。其主要的分类特征是基于微分方程的类型，与时间有关的系数和激励过程的属性。其次，通过机械系统的有关实例说明如何建立运动方程以及如何转换这些方程为状态方程。最后，建立振动系统分析的基础，并可方便地用计算机求解。

第二篇讨论时不变振动系统。由状态方程的一般解导出了基本矩阵和特征值问题。振动系统的定性特性是由其稳定性和有界性描述的。自由振动用固有振型表征。由周期函数激励的振动可以表现为共振、拟共振或者吸振。后两种现象只有在多自由度系统中才可能发生。最后，随机振动是用协方差分析和谱密度分析研究的。

第三篇专门论述时变振动系统。对周期时变系统，求一般解和稳定性分析可简化为有界区间的积分和修正特征值问题。参数激励振动的激励周期常常不同于响应的周期，只有在强迫振动情况的特定条件下，才是周期振动。参数激励的随机振动是采用协

方差分析研究的。还包括涉及一般时变振动系统的一些讨论。

第四篇即最后一篇在假定读者对矩阵计算已经熟悉的前提下，给出了超出矩阵计算的必备数学知识。首先阐明了在稳定性分析中重要的基本概念，可控性和可观测性。随后讨论了在前面的章节中起重要作用线性矩阵方程。最后，叙述了求解线性方程，特征值问题和积分的数值方法。

本书具有教科书的特点，读者从中可以得到有关振动的基本理论知识。在许多情况下，还介绍了范围宽广的内容，以省去读者参阅更多的专门文献。若读者能做完附在每节后的有关练习，那么他们的知识定将会得到深化。多种选择题将便于读者检测自己的进步。由于给定的答案中总有一个是正确的，就不再另外给出这些问题的答案了。

P·C·米勒　　W·O·席伦

目　　录

第一篇　振动系统的数学描述

振动的理论分析是基于对所考虑的技术系统确切的数学描述。通过数学描述可导出一个或多个微分方程。方程的结构揭示了振动系统某些特定的特征。第一节着重于振动现象的分类及对本书的内容进行概述。第二及第三节通过机械振动系统的应用实例说明建立运动方程和状态方程的方法。

第一章　振动的分类

振动是以时变的，不同程度的周期过程为特征的。电子振荡器的正弦振动，单摆的周期摆动，或起因于阵风的建筑物的随机振动，是振动系统典型的例子。有限的时间持续过程也包括在振动的概念中，由于不可避免的能量耗散，自由振动实际上将是衰减的。而在脉冲力作用下的强阻尼系统，其振动将是短暂的。这几个例子说明，有必要对不同的振动现象加以整理，即需要在振动系统的大范围内加以分类。这样的分类也将有助于对本书内容作清晰的论述。

人们在文献中会发现有许多用于振动分类的特征，其中最重要的特征如下：

自由度数；

工程应用；

微分方程的类型；

微分方程的系数；

激振机理；

振动运动；

能量平衡。

自由度数等于所需最少的独立坐标数，这些坐标可对振动系统时间特性进行完全的描述。这种系统通常是作为一个理想模型（数学模型）给定的，它包含着技术问题的全部基本特性。根据仅仅是一个自由度还是多自由度，人们称为单自由度系统还是多自由度系统。这些系统称为是单自由度（dof）系统或是多自由度（dof）系统。如果自由度数是无限的，则此系统称为连续的或连续体。对于连续体，独立坐标是时间和空间两者的函数。单摆是典型的单自由度系统，如图1.1所示。其特性可用角位移$\alpha(t)$作为时间的函数进行完全的描述。图1.2所示的低通滤波器是多自由度系统的实例，它的时间特性可由电流$i_1(t)$，$i_2(t)$，$i_3(t)$来描述。图 1.3 的均匀弹性杆是一个连续振动系统。它的位移$w(x,t)$是空间和时间的函数，所以它有无限多的自由度。

振动系统的阶次 n 是严格地与自由度数 f 有关的。阶次完全取决于振动系统时间特性所需状态变量的最小数。阶次也等于初始条件数，因此，有下列关系式

$$1\leqslant f\leqslant n \tag{1.1}$$

单摆，是单自由度系统，可作为阶次 $n=2$ 的振动系统的一个例子，需要用它的初始位移$\alpha(t_0)=\alpha_0$和初始速度$\dot{\alpha}(t_0)=\dot{\alpha}_0$完全确定它的时间特性。对于一般机械系统*，得到 $n=2f$。

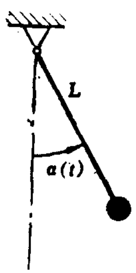


图1.1 作为单自由度系统例子的单摆

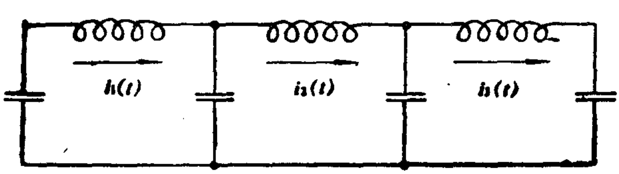


图1.2 作为多自由度系统例子的低通滤波器

* 一个一般机械系统是这样给定的，即假定仅有完整约束，且力仅与位移和速度有关。参看2.3节。

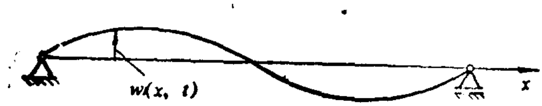


图1.3 作为连续振动系统例子的均匀弹性杆

在工程应用中，人们往往区分为电气和机械系统。高通和低通滤波器，振荡电路，回旋器以及主动滤波器，这些是重要的电气振动系统。属于机械振动系统的有弹性链，弹性结构，各种形式的交通工具，回转仪，主动可控系统等。许多电气系统可用机械系统表示，反之亦然。所以区分为电气系统和机械系统是无关紧要的。图1.4画示了一些典型的元件表示两种不同的方式之间的相似关系。由于应用领域中这种分类在方法学上有意义，因此，在工程力学中，当研究弹性结构，并仅仅考虑质量和弹簧力时，人们才称它为结构振动。当所研究的是车辆振动时，就要把阻尼力考虑进去。回转系统振动时要受陀螺力的影响，而对控制系统来说，所有上述提到的力都可能出现。

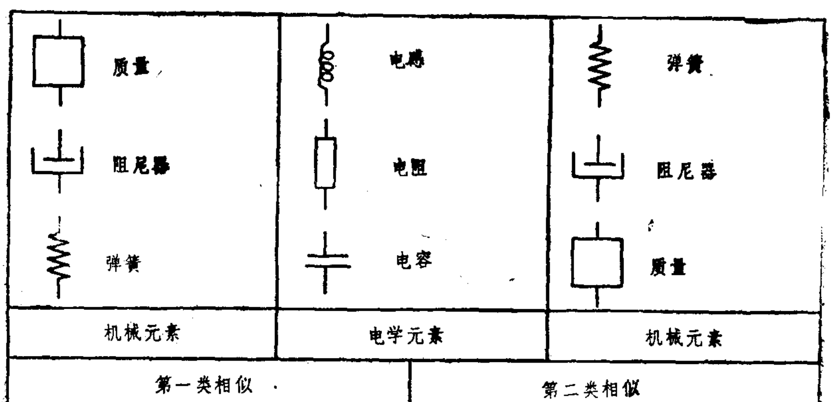


图1.4 机—电相似

振动系统的微分方程可以是线性的，或是非线性的，齐次的，或非齐次的。根据这一点，称为线性或非线性振动。大多数大位移的振动是非线性的，对于那些小位移的振动，可对方程进行线性化。因此，可以简化为只对线性振动情况进行讨论。如图1.1所示作大位移振动的单摆，是由如下微分方程所描述的非线性系统：

$$\ddot{\alpha}(t)+\frac{g}{L}\sin\alpha(t)=0。\tag{1.2}$$

反之，对于小位移，可将它看作线性系统，用下式

$$\ddot{\alpha}(t)+\frac{g}{L}\alpha(t)=0,\ \alpha(t)\ll 1.\tag{1.3}$$

加以描述，式中g表示重力常数，L为摆的长度。对于具有齐次微分方程的振动系统，并不采用这一典型的名称。它们是根据激振过程的特性分类的。当微分方程是非齐次的，把这种振动说成是强迫的。因此，对单摆来说，它受到扰动函数$h(t)$的作用，有

$$\ddot{\alpha}(t)+\frac{g}{L}\sin\alpha(t)=h(t).\tag{1.4}$$

所以振动是强迫的和非线性的。

振动系统的微分方程可以带有时变或时不变的系数。因此，系统称为时变或时不变的。机械振动中的时不变系数是当笛卡尔坐标之间的约束是定常的，并且作用力系数是时不变的。反之，时变系数是由非定常约束或时变力系数引起的。自由或自激振动由带时不变系数的齐次微分方程来描述。而参数激励是与带时变系数的齐次微分方程有关的。图1.5所示悬挂点运动的单摆是一个具有如下微分方程的时变振动系统：

$$\ddot{\alpha}(t)+\left(\frac{g}{L}-\frac{\Omega^2}{L}\cos\Omega t\right)\alpha(t)=0,\ \alpha(t)\ll 1,\tag{1.5}$$

因此，对微小振幅来说，可得到线性化的参数激励振动。

下列振动分类是由马格纽斯（Magnus），按照振动发生的机制而提出的。振动分为自由、自激、参数激励和强迫振动。不能获得能量的振动系统称为自由振动。自由振动系统可进而分为阻尼的或无阻尼的振动。自由振动常称为固有振动，总可导出带有时不变系数的齐次微分方程。这些方程通常是线性的，或可线性化的。因此，一个自由的，无阻尼的线性振动系统具有一个独立坐标$y(t)$，它的微分方程为

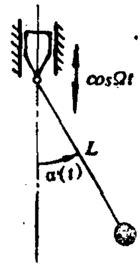


图1.5　具有悬挂点移动的单摆

$$\ddot{y}(t)+\omega^2 y(t)=0. \tag{1.6}$$

式中ω表示系统的固有频率。一个与振动同步输入能量的系统叫做自激振动系统。自激振动也是由具有时不变系数的齐次微分方程所决定的。但这些方程总是非线性的。虽然一个欠阻尼振动在起振时振幅微小，但随时间增长，可使系统变为非线性的。下面的微分方程是非线性自激振动系统的典型型式

$$\ddot{y}(t)+f(y(t),\ \dot{y}(t))=0. \tag{1.7}$$

假如供给系统的能量使其系数随时间而变化，且具有周期特性，那么这种系统称为参数激励系统。这样的系统可以是阻尼的，无阻尼的或欠阻尼的振动系统，它由线性齐次微分方程描述，其系数是与时间有关的，即由

$$\ddot{y}(t)+p(t)\dot{y}(t)+q(t)y(t)=0. \tag{1.8}$$

表示。此外，非线性参数激励振动也是大家所熟知的。如果一个振动系统从外部能源取得能量，称为外激励的。在这种情况下，微分方程内出现一个非齐次扰动项。对一个线性单自由度系统，可得到带时不变系数的下述微分方程式：

$$\ddot{y}(t)+\omega^2 y(t)=h(t). \tag{1.9}$$

脉冲函数，阶跃函数，正弦或谐波激励函数都是重要的扰动函数$h(t)$。如果一个振动系统受一随机过程的外部激励，则所得到

的振动也是一个随机过程，称为随机振动。相应地，一个非线性系统同样也可以受外部扰动所激励。

自由和自激振动是典型的自治振动系统，因为其频率仅与系统的特性有关，而与任何外部与时间有关的因素无关。参数激振和强迫振动仅仅出现在非自治系统中，其特点是在系数中存在外激励或在微分方程中由一扰动项组成。

振动运动是研究有关系统中与时间有关的各种状态变量。如果依赖于时间的因变量可用正弦或余弦函数描述，则此振动称为**正弦的**。如图1.6所示，一正弦振动总可用一个方程表示成下面的形式

$$x(t) = a\cos(\omega t + \psi_0) = \mathrm{Re}\{\underline{a}e^{i\omega t}\}. \tag{1.10}$$

式中 a 是振幅，ω 是固有频率，$T = 2\pi/\omega$ 为周期，而 ψ_0 是振动的初始相位角。复数量

$$\underline{a} = ae^{i\psi_0} \tag{1.11}$$

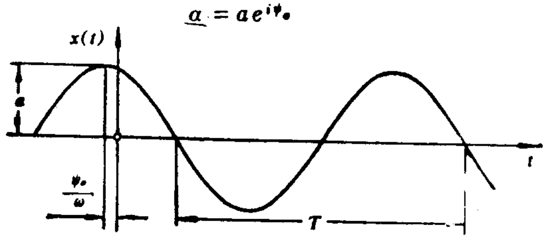


图1.6　正弦振动

叫做复振幅或正弦振动向量，参见图1.7。单自由度系统的线性无阻尼固有振动是正弦振动的一个例子。如果正弦振动的振幅和初相角随时间呈缓慢变化，这种振动称为拟正弦振动。图1.8中所示的小阻尼线性固有振动就是拟正弦振动。任何依赖于时间呈周期特性的

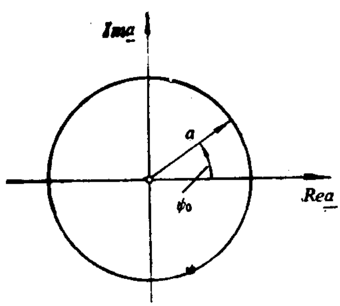


图1.7 用复平面表示的正弦振动向量

过程称为周期振动系统，如图1.9所示。系统的周期T取决于相应基波频率$\omega = 2\pi/T$。每一个周期的振动可用余弦振动所组成的富利叶级数表示：

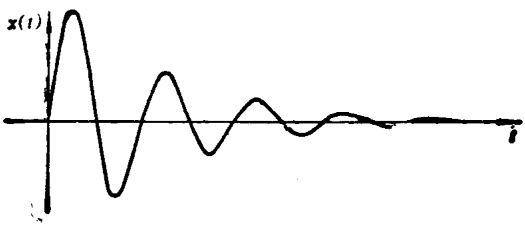


图1.8 拟正弦振动

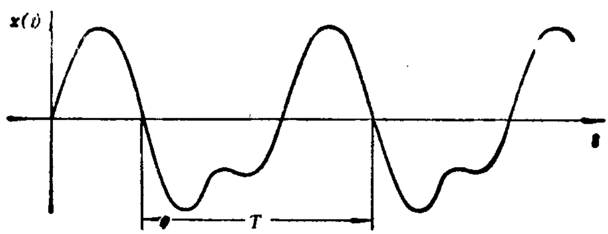


图1.9 周期振动

$$x(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega t + \psi_{0k}). \tag{1.12}$$

反之，一周期振动可分解为具有频率$k\omega$的余弦振动，可用下式来表示振幅和相角

$$a_k e^{i\psi_0 k} = \frac{2}{T}\int_0^T x(t) e^{-ik\omega t} dt, \quad k = 0(1)_\infty{}^*. \tag{1.13}$$

举例来说，自激振动常常是周期的。

* $K=0(1)_\infty$表示$k=0$，1，2…∞。以后类同——译者注