

中小学数学教学论著译丛

# 数学教与学研究手册

[美] D.A. 格劳斯 主编

上海教育出版社



# 数学教与学研究手册

〔美〕D.A. 格劳斯 主编

中小学数学教学论著译丛

陈昌平 王继延 陈美廉  
赵小平 毛力熊 张远增  
陆 林 译

上海教育出版社

**Handbook of Research on  
Mathematics Teaching and Learning**

Edited by Douglas A. Grouws

Copyright © 1992 by National Council of Teachers of Mathematics  
Macmillan Publishing Company

中小学数学教学论著译丛

**数学教与学研究手册**

[美] D. A. 格劳斯 主编

陈昌平 E继延 陈美廉

赵小平 毛力熊 张远增

陆 林 译

上海教育出版社出版发行

(上海永福路 123 号)

(邮政编码: 200031)

各地 新华书店经销 上海市印刷十二厂印刷

开本 850×1156 1/32 印张 23.25 插页 4 字数 573,000

1999 年 4 月第 1 版 1999 年 4 月第 1 次印刷

印数 1—2150 本

ISBN 7-5320-6147-7/G·6302 定价: (软精) 27.00 元

## 原书主编为中译本写的序

我们关于数学的教与学的研究知识,在过去的二十多年间,有了实质性的进展。由于研究的增加,我们现在对于任课教师在培养学生对重要思想和概念的学习中所起的重要作用,有了较深入的认识。对于学生怎样掌握基本的思想和技能,并会在学校里、在个人生活中和在工作中把它们拿来应用,这样的学习过程,我们也已经有了较好的理解。

《数学教与学研究手册》一书中各章的作者,都是他们工作领域里的专家。他们对我们的研究知识作了令人钦佩的综合处理,使得它们能为将来的研究指出方向,并成为在各级教育中如何对学生施行数学教育这问题进行决策的一种基础。作为《手册》的主编,我对本书中的许多章由英文翻译成为中文,感到特别的高兴。这样,就会使更多的学者、教师和学生能从各章的作者关于数学教育研究的见解中得到好处。

最后,我要对使这翻译成为可能的所有中国同事们表示感谢。我特别要感谢华东师范大学的陈昌平教授,是他的不懈努力,使这项翻译工作得以开始和臻于完成。

道格拉斯·阿·格劳斯

于衣阿华州,衣阿华市

# 前言

在过去的二十年间关于数学教学的研究蓬勃地发展了起来。现在已经存在着一个公认的研究团体,它不仅是在数学的领域内进行运作,而且在工作的所有方面也考虑到数学领域的性质,其中包括了研究问题的形成,研讨方式的选定,工具的设计,数据的收集,结果的解释,以及对其涵义的建议。诚然,不是所有归类为数学教育研究的课题都给予所涉及的数学以同样的注意,而且也不是每个课题对上面所提到的研讨的各个方面给予同样的对待,然而,在这个方向已有足够多的进展来规定数学教育的研究是一个研究领域,以及认定哪些进行这些课题的人们是数学教育研究的团体。因而,这本手册的诞生就成为完全合适的。手册的主要目标是把过去的研究综合起来并使之重新概念化,提出对此领域进步最有益的研究范围,并在适当的地方,提供研究对课堂实践的影响。

## 读者

有大量的学者认为他们的研究兴趣是数学教育。他们的丰饶的研究成果需要有论坛来分享各种想法和研究的成果,以便使这个领域能在集体的智慧和已有的成果的基础上向前发展,不致由于信息不灵或多余的研究而造成浪费。本手册的主要读者为数学

教育研究人员和在数学教育中作学术工作的人员。这一个群体包括了学院和大学教员、研究生、研究和发展中心的研究人员,以及在数学学科内进行和应用科研的联邦、州和地方机构的工作人员。本书作者们的原意是从过去的工作中,提供对进行研究有益的观点和有关的信息。手册也应该成为研究生讨论班的一本有用的教科书。

各章的作者并不是专门为了课程建设者、教职工培训者或教师而写,但是本手册应该对这三类人员都是有用的,因为是他们对学校的数学教育的课程和讲授制订政策和作出决策。许多研究人员都认为各种水平的数学教师都会和科研有关,因为它对领域内的积累有益处,因为教师所具有的敏锐的直觉和经验,也因为所涉及的反映和所获得的经验将都会改进教学。我并没有期望本书会使许多教师转到这个方向上来,然而,我希望阅读本手册可以激发一些教师在他们的课堂内进行研究,本手册能成为他们的一个有用的工具。

## 范 围

这本手册的设计是使其成为在数学教育内的研究和研究成果的一个全面的报道。虽说本书的范围是广泛的,但是它肯定会对某些方面注意得更多些。这样的方面会随着数学教育研究的进展而变得更为明显。各章之间的覆盖面会有一些重叠。这种重叠有助于更集中地注意到当前研究的前沿中的想法和问题,提供对某一问题多个作者的各种观点,以及阐明在本领域内科研的相互关系。手册中的一些章节强调学习数学的问题,而另一些则强调其教学的方面。有趣的是大多数作者对两种观点都作了一定程度的阐述(多数是在没有编辑许多诱导的情况下做的)。过去,这两个方面往往确定了两个不同的科学探讨的学科。由于在教和学之间

的重要的关系,对这两种功能的兼有的关注是重要的。

## 结 构

在手册的许多章节中考虑了教学与学习,但是在形成手册的结构中也运用了其他自然地分成章节的方法。本手册共有 29 章,分为五个部分。第一部分“总论”,由 4 章构成,它包含有数学教育的研究历史;历来对数学学科的性质分析以及它又曾如何影响了数学教育的研究;在数学教育中的学术观点,包括了研究方法的演进以及理论的作用;以及在数学教育中最为关键的问题之一——在学和教的方面中理解的性质。第二部分,“数学教学”,它的各章顾及到数学课堂文化,教学上的常规做法以及它们的效果,教师的信念和概念,教师的学识,小组教学,职业特性和数学教学,以及成为一名数学教师的过程——从职前教师教育直到教师在任职后的成长。第三部分,“从讲授中学习”,它的组成各章是关系到那些曾是相当多研究活动焦点的重要的数学领域。这些章节涉及到加法结构、乘法结构、有理数、数学中的问题求解和言之有理、估算和数字的意识、代数、几何和空间推理、概率和统计以及高一级的数学思想包括函数、极限、无限大和证明。尽管本部分的作者着重于学习方面的问题,反映了在这些领域内过去的许多研究的性质,他们还是周到地考虑到将教的问题作为他们讨论的一个重要部分。第四部分,“热点问题”,包括了教、学和内容问题,也处理了研究和今日在此领域中的一些最重要和最普遍的问题:技术、校外的数学学习、情感、性别、人种和种族,以及评估。最后的一部分,“展望”,提供了关于三个有趣的和重要的领域中有远识的观点。有一章探讨了数学成就的跨国研究以及它们的涵义。另一章考察了从国际的观点来看数学教育的研究,注意到它们的共同点和不同点。最后一章提出了一个关于我们目前状态,所面临的问题以

及关于我们应该怎样前进的一些想法的哲学的看法。

## 手册的形成

本手册是 NCTM(全美数学教师理事会)的一个项目。麦克米伦的执行编辑 L. 恰尔顿曾建议,编写关于数学的教和学的综合手册将对这个领域是一本有价值的书籍。NCTM 的主席 J. 多塞热情地认可了这个想法,并把它提到理事会上以取得同意。到 1986 年后期,他们同意了这个想法,其后不久他们就让我来作编辑。我接受了这个任务,因为我相信是需要这样一本书,也因为它提供了一个机会去推动数学教育的研究。我预见到编辑的工作是大量的,不过从未感到失望。我首先的任务是召集一个编委来协助提出手册的方向和结构,并且帮我物色作者。编委的成员有 T. P. 卡彭特,威斯康星大学;J. 多塞,伊利诺州立大学;J. 希伯脱,特拉华大学;C. 基兰,魁北克大学(蒙特利尔);J. 基尔帕特里克,乔治亚大学;D. B. 麦克芬德,圣地亚哥州立大学。他们都是数学教育方面的著名学者,我很高兴他们各人虽有许多其他工作,却都毫不犹豫地接受了这个任务。由于编委的协助,我们认定了各章的题目和可能的作者。我们想邀请的作者是在他们的专长领域内的优秀的、活跃的和有成就的研究人员。我们很高兴,几乎每位我们约请的可能作者(除了一位以外)都接受了邀请,并完成了他们的职责。要计算出完成手册所必需的漫长的形成时间只是简单的数学。每一章是由 2 位外部的专家来审稿,他们提供的反馈是批评和评论,编辑又复审了每一章,在许多情况下编委的一位成员也这样做。

由于每位作者的认真负责,使得手册和它的每一章的价值都得到了提高。他们仔细地 and 综合地回顾他(或她)那领域内的研究文献,并把它重新理性化以增强理解,并为将来的更丰富的研究提供基础。对我来说值得注意的是作者们对其他领域工作的重要性

的敏感程度,诸如认知心理学、哲学、社会学以及其他的方面,如科学教育、阅读和写作。他们对数学教育中许多思想的历史根源以及变得流行起来的正在发展中的方法,提供了一个所需要的展望以及感兴趣的元素。这些见识以及其他的许多见识都为本书的质量作出了贡献。

## 致 谢(节译)

写成一本手册需要有许多人的孜孜不倦的帮助,对本手册确实也是如此。作者们的工作和工作作风的品质是完成一本有价值的手册的最重要的因素。本书的 40 位作者都高质量地并尽了最大的努力去如期完成各自的工作,我对他们中每一位都深表感谢。编辑小组始终为我提供所需的学术方面的指导以及详尽的帮助,我为此表示感激。审稿人在每一章的形成上都起了很大的作用,他们慷慨地给予时间以及专业上的评价,我感谢他们所起的极其重要的作用。

最后,我还要感谢,从我的妻子 Carol 处得到的理解和支持,特别是当事情遇到了困难和进行得缓慢的时候。我也要谢谢我们的儿子,David 和 Michael,他们时常问到:“爸,手册进行得怎样了?”这种提醒有时是为了推动,有时也是为了鼓励,但是总归是为了帮助。

主 编

道格拉斯·阿·格劳斯

哥伦比亚,密苏里

# 目 录

原书主编为中译本写的序

## 前言

|                                      |     |
|--------------------------------------|-----|
| 一、一份数学教育研究的历史·····                   | 1   |
| 二、数学的性质;其任务及影响·····                  | 79  |
| 三、关于学术和研究方法的观点·····                  | 97  |
| 四、具有理解的教和学·····                      | 131 |
| 五、数学教学实践及其效果·····                    | 195 |
| 六、教师的知识及其影响·····                     | 219 |
| 七、成为一名数学教师·····                      | 260 |
| 八、学会数学地思维;数学中的问题解决、超认知<br>和数学意识····· | 334 |
| 九、学校代数的学习和教学·····                    | 422 |
| 十、几何和空间推理·····                       | 482 |
| 十一、概率统计的研究;反思与展望·····                | 577 |
| 十二、朝着高等数学思维的转变;函数,极限,无限<br>和论证·····  | 640 |
| 十三、数学教育研究的一些国际观点·····                | 676 |
| 十四、关于数学教育的现状和发展方向的思考·····            | 705 |
| 选译后记·····                            | 730 |
| 附:原书目录·····                          | 732 |

# 一、一份数学教育研究的历史

Jeremy Kilpatrick \*

数学教育研究的历史是数学教育领域历史的一个组成部分。数学教育领域是在过去的两百年间发展起来的,在那期间,数学家和教育家把他们的注意力转到了以下的问题:在学校里,应该教和学哪些数学?是怎样教的和怎样学的?从一开始,数学教育研究的走向就受着教育研究这个范围更广的活动场所中的各种力量所支配,而教育研究在大约一个世纪前就放弃了哲学的思辨,而倾向于用更为科学的方法。但是,数学教育研究和数学教育本身一样,曾为自己的被认可而奋斗着。它企图提出自己的问题和形成解决这些问题的自己独有的方法;它企图为自己进行界说,并造就一群可以把自己称为数学教育研究工作者的核心人物。

在过去的二十年间,这个自行界说的任务大体上得到了完成。有了国际范围内的研究工作者团体的存在,它搞集会,出版杂志和业务通讯,在学科之内和学科之间都开展了研究工作及其评论以促进协作,企图在有研究团体的成员参与的各种数学教育组织的讨论会上,保持着一种活跃的研究意识。对于把形式、方向和内容给予了数学教育研究领域的一些人和事作一番回顾,这将是合适的。

---

\* 作者基尔帕特里克(J. Kilpatrick)是乔治亚大学数学教育教授,又是国际数学教育委员会(ICMI)的副主席。

任何回顾都会因为难于判断什么才算得上是本领域的研究工作这个问题而被搞得含混不清。在先前的数学教育研究工作中,有些项目在今天看来可算是一些范例,但研究者本人和他们同时代的人却可以有着不同的看法,把那些项目看作譬如说是心理调查,或是历史论文,或是教育实践的概括研究等等。反过来,像数学教科书的编写活动,在今天大多数人的眼里都不认为是研究工作了,但是,我们的数学教育的先辈们却可把它当作是本领域研究工作的集中体现。我们不知道在数学教育这个领域的形成过程中,人们究竟把什么看作是研究;那时的研究工作者可以并不用“数学教育研究”这个字眼去称呼他们的工作的,因此,我们在检阅过去的工作时,尽量要做到兼容并蓄。

研究这个词有一个有用的广泛定义,那就是“学科性调查”。“调查”一词意味着工作的目的在于要回答某一特定的问题;而不是自为的空洞思辨或学究式的钻研。“学科性”一词则不仅意味着研究工作要受到诸如心理学、历史学、哲学或人类学等学科的概念与方法的指导,而且也意味着它可以被公开显示出来,使得调查的线索可以被检查和核验。学科性调查不需要在“要以经验检验过的假设为基础”的意义下是“科学的”,但它和任何优良的科学工作一样,应该有学术性、公开性、甘心情愿地经受评论与可能的反驳。这样说来,数学教育研究就是对数学的教和学的学术性调查。

数学教育研究的目的是多方面的。如果我们把这样的研究看作和自然科学所遵循的“经验-分析”的传统相类似,那么我们就要采纳科学的传统目的,那就是:去说明、去预测或去控制。倘若我们把数学教育研究看作更像人类学家的所为——去对某一种文化作解释性的理解——那样,那么我们所企图的就是去理解:数学的教和学对于那些参与这个活动的人们说来,它的意义究竟何在。如果我们采用批判社会学的处理方法,并从事于“行动研究”以帮助教师和学生,使他们在自己的工作中能获得更大的自由和自主,

那么我们所做的研究就是为了改进实践,并使参与者投入到改进工作中去。在过去的大约十年间,数学教育研究的一场运动使它抛弃了经验-分析的传统,而走向(尽管是显得犹豫不决也罢)采用解释的和评论的方法。虽然方法上的“经验-分析”传统在本世纪的大部分时间里支配了数学教育研究的工作,但是,那种“解释、预测、控制”的科学精神使得以下的企图,从未显得如此高涨,即:去理解,而且特别地,去改进数学的教和学。然而,虽说有着上述企图,但所谓理解和改进,通常都并不采用参与者的观点,或从教学的来龙去脉中去看问题;数学教育研究所处理的,主要地却是研究者自己所理解的教与学的问题。他们之所以要从事研究工作,是因为他们知道实践有待改进,并对如何改进有着自己的看法;他们企图去做应用性的研究而不是纯粹性的研究。

当然,理解与改进这个高尚的目的会掩盖从事研究工作的另一些原因。人们知道,有过一些教育部长曾委托别人去做一些数学教育的研究工作,其唯一目的是要对由于某些原因而已经作出的或将要作出的决定,去论证其合理性。此外,谁也不能否认,在某些国家里,不少的数学教育工作者之所以做研究工作,其目的是要在高等院校里获取职位和升等升级,否则他们是不会去做这种工作的。做研究工作的动机通常是复杂的,它远不是非营利性的。

对在本世纪里积聚起来的规模宏大的数学教育研究工作者队伍,其个人动机或政治动机的多样性,是不易描述的。然而,从关于研究工作做了些什么、它该如何做、以及它对实践有着什么样的重要性等事项的论战中,我们可以看到,一个领域在进行着自我界说中。换言之,无论一个研究工作者在从事一定研究时具有何种私自的目的,他的研究都可能有助于明确:什么是数学教育研究。

### 在大学里的一席之地

和数学教育一样,数学教育研究首先发生在大学里。19世纪

初,在普鲁士新教派的大学里,对高等教育发起了一场改革运动,它终于蔓延到了别的国家,并引起了现代科学学科的分化和专业化。改革带来了以下的希望:大学教师不应只搞教学,而且也要搞科研。在欧洲,教育开始被当作一门单独的大学学科去被研究,但其进展是缓慢的。教育学的第一个讲座教授职位是于1779年在哈列(Halle)大学里创立的,但到了1910年,在德国的大学里担任教育学教学工作的教师不过13人。教育学的新教授多数来自哲学与历史学。在瑞典,乌普萨拉(Uppsala)大学早在1804年就由一位哲学教授讲授了教育学的课程,但直至1910年该大学才设立了教育学讲座教授的职位。在大不列颠,第一批教育学讲座教授职位之一是于1876年在爱丁堡(Edinburgh)大学设立的,命名为“教育理论、历史与实践”教授。在美国,虽然纽约大学(在1832年)、布朗大学(从1850年到1855年)以及密执安大学(于1860年)开始间歇地开设了教育学课,但一直到1873年才在衣阿华大学设立了第一个教育学终身教授的职位;在美国直到1890年,教育学讲座教授的职位还不多于十二个。

贯串于整个19世纪,各个大学都培养了中学的数学教师,但是在教师培训中,数学教学法课的教学充其量只是孤立地占了一小部分。在德国,19世纪初,为培养大学生将来去教完全中学而开设了教学法讨论班;这些讨论班教导学生去做独创性的数学研究工作;只是到了19世纪末,由于企图把教学法建设成为专门从事于学校知识研究的课程,以区别于一般的教育学课,德国的大学才开始接受数学教学实习的训练。克莱茵(Felix Klein)是把方法课程引入大学教育中去的首领人物之一,他不仅在几所大学里建立了这样的课程,而且是指导了第一个数学教育博士学位,这个学位的获得者是1911年哥廷根大学的施马克(Rudolf Schimmack)。

在别的国家里,那些准备将来去教数学的大学生学习数学课程,结合着零星地听些有关教室管理或职业道德的课。例如,在法

国,巴黎高等师范大学,自拿破仑于 1810 年建立起至第二次世界大战止,几乎连续不变,它对未来高中数学教师的训练,其课程主要在数学方面。(法国对于缺乏受过良好训练的教师的问题,其主要对策在于编写教科书,使它成为控制教学的一种机制。)在这些国家里,小学教师是由一些分散的教育机构培养的,这些机构或称为学院,或称为学校,或称为讲习班,或称为师范学校,它们是中等教育机构而不是高等教育院校。又例如,在日本,它采纳了美国的师范学校的模式,在 1908 年前后,日本办了 75 所师范学校(师范一辞来自法文字“Normal”,意为规范或法则——教未来的教师学一些教学的法则)。与此同时,在美国兴起了一场运动,开始把师范学校发展成为教师学院,这场运动在 1920 年以后,加快了速度。许多国家由于开始建立了国民教育的制度,它们发现需要大量的接受过职业教育的合格教师。过去那种专业课的特殊训练,对于培养重点学校——如德国的完全中学(Gymnasium)、法国的高中(Lycée)、英国的公立学校——的师资也许是合适的,现在对于要培养骨干教师以配备到新建的中等学校里去,那种做法显然是不够的了。此外,对质量更高的小学教师的需要也使得许多国家把原先培养小学教师的学校从中等教育的品格提高到高等教育的品格。

19 世纪末,在一些国家的大学里,为了满足对更多的有良好训练的教师的需求而开始扩大了它们的教师教育纲要时,数学教育作为一个学术领域就逐渐地发展了起来。在 1912 年前后,国际数学教育委员会的一份报告报导说,在美国、大不列颠、德国和比利时,大学里开设了数学教育课(以补充数学课程)。在某些国家里,建立了新的培养师资的高等教育机构(例如 20 年代在德国建立的师范学校(pädagogische Hochschulen)),在其中,强调的重点放在怎样教的实践培养上面。在这些机构中,研究工作并不发达。在另外的一些地方(例如在美国,以及其后在德国、英国和日本),

某些培养小学或中学教师的专门学校,被吸收进大学或被扩充为大学。一个早期的例子,且其后为世界各地广泛摹仿的例子是纽约教师训练学院,它成立于 1887 年,其后在 1890 年被吸收进哥伦比亚大学,成为它的教师学院。费尔(Henri Fehr)在阅读了该学院 1904—1905 的一览表后,说该学院不是一所职业学校,即不是要尽快地培养一些去教“数学 ABC”的教师,而是要造就未来的数学教师,除了给他们以职业上的实践指示外,同时也给他们以一种卓越的一般数学文化教育,使他们获得一种去从事专门研究的机会;也向他们介绍他们学科的历史发展知识。

逐渐地,或迟或早,在不同的国家里,数学教育终于被承认为一门大学的学科。从事于数学教育的大学教师不仅要教书,而且要做研究工作的这种要求,引导着他们中的许多人开展了数学教育的研究工作。

### 来自一些学科的影响

两门学科对数学教育研究有过根本性的影响。第一门是数学。数学家对他们学科的教与学的研究兴趣有着虽说是零星的、但是长期的历史。纯粹数学家和应用数学家之间关于对这门学科的高等研究要有怎样的准备才算合适的争论,不仅间发性地引出了修改中小学的和高等院校的课程的尝试,而且有时也引到对修改范围的研究,和对学生对那些修改作出何种反映进行调查。由于对低一级学校的训练不足、高等课程选修人数的下降、中小学数学课程变质的潜在可能性以及国家地位的受威胁等问题的关注,不时地推动着数学家们去考察中小学的所作所为,和考虑它们可以怎样地改进。关于数学是怎样地被创造出来的这个的好奇心,也不时地引导数学家们对他们自己的思考过程进行回顾,并企图把那种思考过程教给别人。一些数学家在观察了他们的儿辈或孙辈的数学思维结果之后,受到鼓舞去对那种思维作出详细的分

析,或对它们的改进订出计划。虽然上述这些数学教育的偶然性工作并不都是站得住脚,但部分地是由于那些数学家在社会上的地位,它们通常都很受重视。

当数学教育在大学里发展起来的时候,它造成一种吸引一些原先兴趣是在数学上的、以及一些甚至自视为数学家的人们的趋势。这些数学教育工作者开展了历史的和哲学的研究、调查,并终于开展了一些经验主义类型的研究工作。他们的工作以及数学家们的工作,提出了许多的问题,它们仍为今天的研究工作者所研究着。

影响数学教育研究的第二门主要的学科是心理学。根据舒布林(Schubring)的研究,数学教育发展的先决条件之一是按年龄分班的学校的出现,它使教师能把一个班级当作一个群体来处理,并开始考察认知发展的模式。接近20世纪之交,在德国的一些心理研究所和在美国的一些心理学系开始进行了有关教育的经验主义的研究。心理学成了中小学的“驾驭科学”,从而成为师范学校课程的核心部分。心理学作为一门科学的学科,它是在大学里发生和发展起来的,它给教育院校与系科的教授们以一种科学,可藉以提高他们在院校里的地位,也给他们提供了一组方法,使他们在要求他们去开展的那些研究工作中可以采用。另一方面,心理学内部的人力过剩的压力也推动着研究工作者走向教育研究。从教育心理学的初期起,数学就是用来研究学习的一种流行的载体,这也许是由于看到了它在中小学课程中的重要地位;它的不受学派影响的相对独立性;它作为学校课目所具有的集中的而又有层次性的结构;它的抽象性和随意性;以及它在学习任务中所能提供的复杂性与困难性的范围;等等。数学教育工作者对心理学的研究工作通常都抱有一种保留的态度,这是由于他们看到心理学的研究对大学的数学课程毫不涉及或甚至于无知的缘故,但是他们对心理学的思想和方法,却是从不迟疑地加以随意借用的。