

最新世界名著

線性系統導論

陳啓宗原著

楊維楨譯述

國家科學委員會補助

國立編譯館出版
正中書局印行

最新世界名著

線性系統導論

陳啓宗 原著

楊維楨 譯述

江苏工业学院图书馆
藏書章

國家科學委員會補助

國立編譯館出版
正中書局印行



版權所有 翻印必究

中華民國六十五年二月臺初版

最新
世界名著 線性系統導論

Introduction to Linear System Theory

全一冊 基本定價 平四元九角
精六元

(外埠酌加運費滙費)

原 著 者	陳 啓	宗
譯 述 者	楊 維	楨
譯權所有人	國 立 編 譯	館
補助機關	國 家 科 學 委 員 會	
發 行 人	黎 元	譽
發 行 印 刷	正 中 書	局

(臺灣臺北市衡陽路二十號)

暫遷臺北市泰安街一巷三號

海外總經銷 集 成 圖 書 公 司

(香港九龍油麻地北海街七號)

海 風 書 店

(日本東京都千代田區神田神保町一丁目五六番地)

東 海 書 店

(日本京都市左京區田中門前町九八番地)

新聞局出版事業登記證 局版臺業字第〇一九九號 (6898)

分類號碼 310.26 裕(1000)

目 錄

序 言	1
譯 序	1
符號一覽表	1
第一章 緒論	1
1-1 系統之研究	1
1-2 本書之範圍	3
1-3 各章之說明	4
第二章 線性空間與線性算子	9
2-1 前言	9
2-2 定義於場之線性空間	10
2-3 線性獨立, 基及表示法	16
2-4 線性算子及其表示法	25
2-5 線性代數方程式之系統	35
2-6 特徵向量, 廣義特徵向量及線性算子之 約旦 形式表示法	43
2-7 方陣之函數	60
2-8 範數及內積	76
2-9 總結	80
問題	81
第三章 系統之數學描述	87

2 線性系統導論

3-1	前言	87
3-2	輸入—輸出描述法	89
3-3	狀態變數描述	104
3-4	範例	114
3-5	輸入輸出描述和狀態變數描述之比較	127
*3-6	複合系統之數學描述	131
*3-7	離散時間系統	138
3-8	結論	142
	問題	143
第四章	線性動態方程式和衝量響應矩陣	153
4-1	緒論	153
4-2	動態方程式之解	154
	* 表示可以刪掉而不損及連貫性。	
4-3	等效動態方程式	169
4-4	衝量響應矩陣及動態方程式	180
4-5	結論	190
	問題	191
第五章	線性動態方程式之可控制度及可觀測度	199
5-1	緒論	199
5-2	時間函數之線性獨立	201
5-3	線性動態方程式之可控制度	209
5-4	線性動態方程式之可觀測度	226
*5-5	Jordan 形式動態方程式之可控制度及可觀測度	236
5-6	線性非時變動態方程式之典型分解	245
*5-7	輸出可控制度和輸出函數可控制度	256
5-8	結論	260

問題	261
第六章 有理轉接函數矩陣之不可簡實現	267
6-1 緒論	267
6-2 特徵多項式與常態有理矩陣之次數	269
6-3 純量有理轉接函數之不可簡實現	273
*6-4 常態有理轉接函數矩陣之不可簡實現	290
6-5 一常態有理轉接函數矩陣之不可簡 Jordan 形式實現	297
6-6 結論	313
問題	315
第七章 典型形式，狀態回授及狀態估計器	321
7-1 緒論	321
7-2 典型形式動態方程式	322
7-3 狀態回授	335
7-4 狀態估計器	349
7-5 回授系統之設計：一個例子	366
*7-6 狀態回授之退耦合	369
7-7 結論	377
問題	378
第八章 線性系統之穩定度	383
8-1 緒論	383
8-2 依輸入—輸出描述表示之穩定度準則	384
8-3 Routh-Hurwitz 準則及 Lienard-Chipart 準則	398
8-4 線性動態方程式之穩定度	406
*8-5 Routh-Hurwitz 準則之一證明	420
8-6 結論	430
問題	431

第九章 線性、非時變合成系統	439
9-1 緒論	439
9-2 合成系統之轉接函數描述	440
*9-3 合成系統之可控制度及可觀測度	447
9-4 線性非時變回授系統之穩定度	455
9-5 極配置補償器之設計	474
9-6 結論	490
問題	491
附錄 A 一實變數之解析函數	495
附錄 B 最小能量控制	496
附錄 C 引進抽樣後之可控制度	499
附錄 D 赫米遜 <i>Hermitian</i> 形式	506
附錄 E 關於矩陣方程式 $AM+MB=N$	512
參考文獻	517
索引	527
10	
11	
12	
13	
14	
15	
16	
17	
18	
19	
20	
21	
22	
23	
24	
25	
26	
27	
28	
29	
30	
31	
32	
33	
34	
35	
36	
37	
38	
39	
40	
41	
42	
43	
44	
45	
46	
47	
48	
49	
50	
51	
52	
53	
54	
55	
56	
57	
58	
59	
60	
61	
62	
63	
64	
65	
66	
67	
68	
69	
70	
71	
72	
73	
74	
75	
76	
77	
78	
79	
80	
81	
82	
83	
84	
85	
86	
87	
88	
89	
90	
91	
92	
93	
94	
95	
96	
97	
98	
99	
100	

第一章 緒 論

1-1. 系統之研究

物理系統 (*physical system*, 即實體系統) 之研究與設計通常由四個步驟構成:

1. 建立模型 (*modeling*)。
2. 對此模型予以數學描述 (*mathematical description*)。
3. 分析 (*Analysis*)。
4. 設計 (*Design*)。

第一個步驟, 模型製作, 乃是尋找一和實際的物理系統之特性相似但研究起來較為容易的模型。所謂物理系統為現實世界中存在的事物, 其詳細的特性吾人時常不得而知。然而, 我們卻能運用各種測試信號而從所測得的數據來決定其特性。若欲依解析手段研究此事物, 則必須從所測得之特性決定與此物理系統相似之一模型; 此種決定模

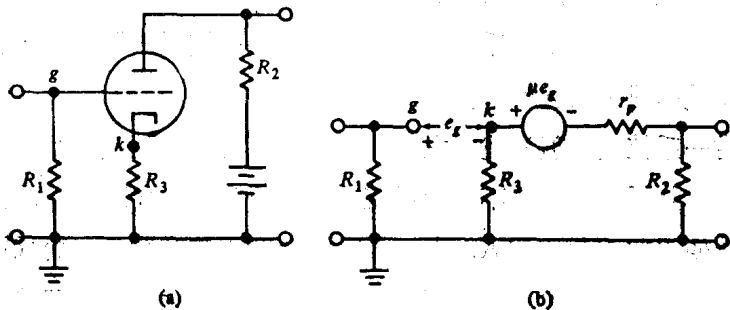


圖 1-1. 一放大器 (a) 電路 (b) 模型。

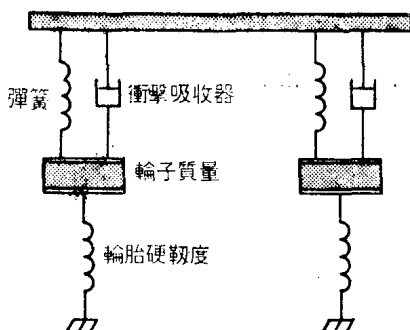


圖 1-2. 一汽車懸重系統之模型。

型的過程即稱為模型建立（或製作）。工程師們皆知一模型與物理系統之區別，例如在電機工程方面，如圖 1-1(a) 之一放大器電路可用圖 1-1(b) 之模型來替代。在機械工程方面，汽車懸重系統亦可用圖 1-2 之模型表示。由於設計的成功與否，完全取決於所選的模型是否適當，所以建立模型是一個很重要的課題。

一物理系統可有許多不同的模型，視其待解決之問題或操作範圍而異。例如一電子放大器在低頻與高頻下就有不同的模型。太空船在研究其軌跡時可視為一質點，但在實際演習時卻須視為一剛體。為了發展一物理系統的適當模型，對於此實體系統以及其操作範圍之透澈瞭解乃是最起碼的要求。在本書中吾人將物理系統之模型泛稱系統 (system)，亦即一物理系統為現實世界中之一裝置或裝置之集合；而系統便是物理系統之模型。

當一系統（模型）建立之後，下一個研究步驟就是尋找數學方程式來描述此系統。對於不同之系統我們使用不同之物理定律，如對電氣系統使用克希荷夫 (Kirchhoff) 電壓和電流定律，或對機械系統使用牛頓定律等來建立起方程式。這些描述系統之方程式可用很多形式，它們可以為線性方程式，非線性方程式、積分方程、差值方程、微分方程或其他方程式。由於待求之問題的不同，在描述同一系統的

時候某一形式之方程式可能比另一形式之方程式爲佳。要言之，一系統可有許多不同的數學方程式描述法，正如一物理系統可有許多不同的模型一樣。

一系統之數學方程式一旦建立後，下一個研究步驟便是從事定性或定量的分析。在定量分析裏我們感興趣的是此系統對某一輸入及初始條件之確切響應爲何；這一部分的分析可藉數位或類比計算機而輕易達成。在定性分析方面我們關心的是此系統之一般性質，如穩定度 (*stability*)、可控制度 (*controllability*) 和可觀測度 (*Observability*)；因爲從這些研究中可發展出設計的各種技巧，所以這一部分的分析頗屬重要。

若系統之響應不十分理想，則該系統必須加以改進，或求最佳化。在某些場合中系統之響應可藉系統中一些參數 (*parameter*) 之調整來改進它，在另一些場合中則必須導用補償器 (*compensators*)。請記住，所有設計是對物理系統之模型實施的，但如模型被適當地選擇，則物理系統之性能亦對應地藉導進所需之調整或補償器而必可改進。

1-2. 本書之範圍

如上節所述，系統之研究可分四個部份：模型建立、數學描述、分析和設計。在本書中我們僅討論數學描述之建立和對系統之分析。模型製作問題將不被包含，而設計問題也只提述一點，內容之這種選擇是基於如下理由：實體系統之模型之發展需要每一專門分野及若干儀器之知識，例如要發展電晶體之模型不僅要有量子物理之知識而且也需要實驗室裏的實驗技術。建立汽車懸重系統則需實際的測試與測量，並不能單靠鉛筆和紙張得到結論。因此本書主要討論系統之數學

方程式的分析。關於設計方面，我們僅討論直接可由分析導出的一些技術。雖然最佳控制理論發展出來的設計技術未被討論，但本書仍將提供此方面研究之必要學術（背景）。

用於描述系統之數學方程式可區分為線性方程式與非線性方程式兩類。本書僅討論線性方程式，其理由如下：(1)大多數物理系統在其通常操作範圍內皆可用線性方程式所能描述之系統去模型化。(2)線性方程式之理論完整而且整理良好。(3)此理論乃是研究非線性方程式的基礎。

在網路和控制系統之研究方面有兩個基本而且最重要的線性方程式：

$$y(t) = \int_{t_0}^t G(t, z) u(z) dz \quad (1-1)$$

$$\text{及} \quad \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) \quad (1-2a)$$

$$y(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}(t) \quad (1-2b)$$

方程式 (1-1) 描述系統輸出與輸入之關係，稱為此系統之輸入—輸出描述 (*input-output description*) 或外界描述 (*external description*)，此轉接函數 (*transfer function*) 為此描述之特殊情形。兩方程式之集合 (1-2) 稱作動態方程式 (*dynamical equation*)，如它被用以描述系統則稱為系統之動態方程描述 (*dynamical-equation description*) 或狀態—變數描述 (*state-variable description*)。在本書中這兩方程式將從很通常的形式作展開。它們將被徹底地檢查，它們間的關係將被建立，而與它們有關的各種不同的觀察和技巧將被介紹。

1-3 各章之說明

在本節中我們將每一章之內容作一簡單介紹。

第二章中我們複習線性代數中一些觀念和結果，此章之目的在使讀者能運用相似變換 (*similarity transformation*)，變換一矩陣成為約旦典型形式 (*Jordan canonical form*) 以及計算矩陣之函數。這些技巧在線性系統之分析與設計中佔有不可或缺的很重要的地位。

在第三章，我們將有系統地討論線性系統之輸入-輸出描述及狀態-變數描述 (*state-variable description of linear systems*)。此兩種描述乃由直線性 (*linearity*)，張弛性 (*relaxedness*)，因果關係 (*causality*) 和非時變 (*time-invariance*) 等觀念發展而來，我們將以實例來證明此系統之描述如何能成立，複合系統 (*composite system*) 之數學描述及離散時間 (*discrete-time*) 方程式亦將在此章中予以介紹。

在第四章我們研究線性動態方程式之求解，我們亦將指出對於同一系統施以不同之分析常導致不同之動態-方程描述；對於輸入-輸出描述和狀態-變數描述間之關係亦將予以建立。

我們將在第五章介紹可控制性與可觀測性之觀念 (*concepts of controllability & observability*) 介紹這些觀念之重要性可由下面之例子看出：考慮如圖 1-3 所示之網路，其轉接函數 (*transfer function*) 皆為 1。在圖 1-3(b) 所示之網路，其轉接函數是毫無疑問的 (為 1)，但是我們要問圖 1-3(a) 中之電容器為什麼在轉接函數中不發生任何作用呢？爲了回答此問題，我們就必須有可控制性與可觀測性之觀念，此兩觀念在最佳控制理論、穩定度研究以及信號之預測或濾波中亦相當重要。有關動態方程式可控制性及可觀測性之各種充分以及必要條件將在本章中予以導出。

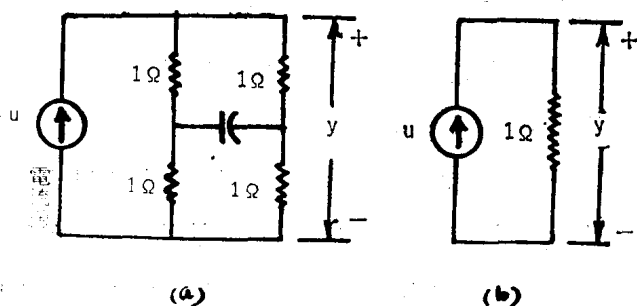


圖 1-3. 是有關一轉接函數值 1，之兩個不同網路。

在第六章中我們研討有理轉接矩陣 (*rational transfer function matrix*) 之「不可簡實現」(*irreducible realizations*)，問題乃在於如何找出具有有理轉接函數之可控制與可觀測線性，非時間函數之動態方程式。由於它提供了在類比或數位計算機中模擬系統之方法，故其解甚為重要。它也提供了用作業放大器 (*operational-amplifier*) 電路合成 (*synthesize*) 有理矩陣 (*rational matrix*) 之方法。

可控制性及可觀測性觀念之實際隱含意義，將在第七章研討，我們將證明在可控制性或，及可觀測性之假設下含有何種結果，若干設計上的技巧亦將在本章中作一介紹。

在第八章中我們研究線性系統之定性特性，係從穩定度之討論開始，因它是系統設計中首要課題，乃最重要因素，我們也介紹有限輸入，有界輸出之穩定度，李雅譜諾夫 (*Lyapunov*) 想法之穩定度，漸近穩定度及總體穩定度等之觀念。它們的特性及關係也加學習。

最後一章討論與線性，非時度複合系統相關之各種問題，其中一項是討論到轉接函數之極 - 零點消去法 (*pole-zero cancellation*) 的涵義 (*implication*)。舉例言之，如圖 1-4 所示兩轉接函數 $1/(s-1)$ 、 $(s-1)/(s+1)$ 之三種不同連接方式，我們將證明圖 1-4(b) 可由其

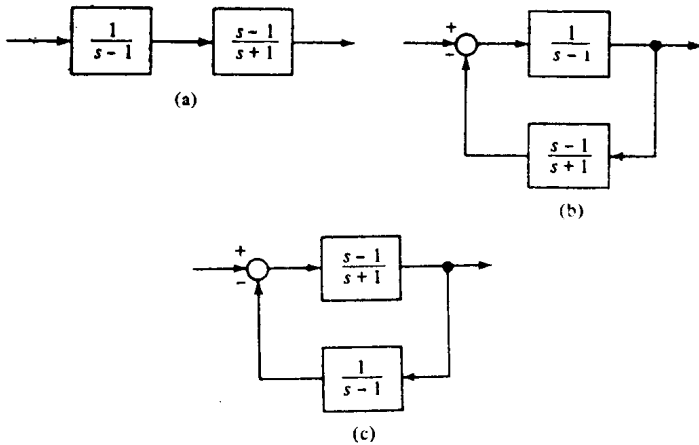


圖 1-4 $\frac{1}{(s-1)}$ 和 $(s-1)/(s+1)$ 之三種不同的接法。

複合轉接函數來研討，而圖 1-4(a)，及 (c) 則不可。同時，我們也將研究單變數與多變數回授系統之穩定度。最後則討論利用代數法而設計回授系統。

第二章 線性空間與線性算子 (operator)

2-1 前 言

在本章中，我們將複習在展開線性系統理論上較重要的一些觀念及其結果，我們慎選討論題材並僅介紹後頭會用到的部份。本章的目的在使讀者了解相似變換 (*similarity transformation*)，正方矩陣之 *ordan* 形表示法，並計算矩陣之函數，特別是矩陣之指數函數。(參考 2-9 節摘要)。

在 2-2 節中我們介紹場及線性空間之觀念 (*concept of field & linear space over a field*)，本書中提到之場有實數之場，複數之場及有理函數之場等。在 2-3 節中介紹基的觀念 (*concept of basis*) 以期在線性空間中向量有一表示法，同一向量的不同表示法間之關係也被討論。在 2-4 節，我們研究線性算子 (*linear operator*) 及其表示法，並引入相似變換的觀念。在 2-5 節中則研究線性代數方程式組之解。其秩 (*rank*) 及零維 (*nullity*) 之觀念在此節中甚重要。在 2-6 節我們介紹將特徵向量 (*eigenvectors*) 及廣義特徵向量 (*generalized eigenvectors*) 作為基向量 (*basisvectors*) 時每一方陣皆有一 *Jordan* 形表示法。在 2-7 節我們學習正方矩陣之函數，將介紹最低多次項式 (*minimal polynomial*) 及凱萊—哈密爾敦定理 (*Cayley-Hamilton theorem*)。最後一節中會討論內積 (*inner product*) 及範數 (*norm*) 之觀念。

我們假設讀者已具備矩陣理論之一些基本知識，如求行列式、矩陣之加、乘及倒數等。設 A, B, C, D 爲 $n \times m, m \times r, l \times n$ ，及 $r \times p$ 之常數矩陣， a^i 爲矩陣 A 之第 i 行， b^j 爲矩陣 B 之第 j 列，則

$$AB = [a^1, a^2, \dots, a^m] \begin{bmatrix} b^1 \\ \vdots \\ b^m \end{bmatrix} = a^1 b^1 + a^2 b^2 + \dots + a^m b^m \quad (2-1)$$

$$CA = C[a^1, a^2, \dots, a^m] = [Ca^1, Ca^2, \dots, Ca^m] \quad (2-2)$$

$$BD = \begin{bmatrix} b^1 \\ \vdots \\ b^m \end{bmatrix} D = \begin{bmatrix} b^1 D \\ \vdots \\ b^m D \end{bmatrix} \quad (2-3)$$

以上等式極易證明，注意 $a^i b^i$ 爲 $n \times r$ 矩陣，其爲 $n \times 1$ 矩陣 a^i 及 $1 \times r$ 矩陣 b^i 之乘積。上述內容可在參考文獻 [5], [38], [43]—[45], [77], [86] 及 [116]*⁽²⁾ 內找出，我們強調向量與其表示法之差異〔參看方程式 (2-12) 後定義 2-7〕後即可進入一算子之矩陣表示法及相似變換之觀念。

* (2) 大括弧之數目乃指書後參考文獻之編號。

2-2 定義於場之線性空間 (Linear space over a field)

研究數學時我們必須先規定構成研究之重心的對象之集合，有這種對象或單元之集團叫做集合 (set) 或集。例如在算術中我們研究實數的集合。在布林代數 (Boolean Algebra) 則研究集 $\{0, 1\}$ 它祇包含兩個元素，其他各種集合之例子有複數集合，正整數集合，低於 5 次之多項式集合， 2×2 實數常數矩陣集合等。在本節中當我們討論對象之集合時，該集合可爲剛提及的集合中之一個或讀者願意規定的任意其他集合。