高等學校教學用書

數學製圖實習材料

М·Д·索洛耶夫著

高等教育出版社

高等學校教學用書

數學製圖實習材料

M·I·索洛耶夫著
周承恭　昂寶珍譯

高等教育出版社

本書係根據蘇聯測繪書籍出版社（Издательство геодезической и картографической литературы）1952年出版的榮譽科學家、技術科学博士索洛耶夫教授（М. Д. Соловьев）著“數學製圖實習材料”（Практическое пособие по математической картографии）譯出，原書經蘇聯高等教育部審定爲高等測量學校教學參考書。

本書主要內容爲：製圖投影原理，計算實施概要及有關製圖投影上常用的一些公式，計算程序和圖上測定等。

本書由周承恭、昂寶珍同志合譯，寧篤義、朱新美同志校訂。

數學製圖實習材料

М. Д. 索洛耶夫著

周承恭　昂寶珍譯

高等教育出版社出版
北京琉璃廠一七〇號
（北京市書刊出版業營業許可證出字第〇五四號）

京華印書局印刷　新華書店總經售

書號379（課351）　開本850×1168 1/32　印張6 3/4　字數156,000
一九五五年九月北京第一版
一九五六年五月北京第三次印刷
印數：2,001—3,500　定價：(8) ¥ 0.80

目　錄

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

序 言

在莫斯科測繪工程學院裏，數學製圖實習課在數學製圖學的研究過程中有着重大的意義，我曾爲此寫過專門的材料，於1935 年和 1938 年出版，其內容包括一些理論性的計算、投影計算表、實際作業計算規定和圖上測量各個問題的研討。

目前有必要對這些材料作一番修改並再版，本書“數學製圖實習材料”就是這樣結合數學製圖學領域內的最新成就，以及莫斯科測繪工程學院教學大綱的要求重新修改而成的。

本材料的重點如舊，但在程序上和內容上有所更動，並進一步擴充與深入。修改後的本書共分六章：“緒論”，“旋轉橢圓體面在球面上的描寫”，“由地理坐標系(經度 λ，緯度 φ)推算球面極坐標系(方位角 a，天頂距 z)”，“製圖投影計算”，“圖上測定問題”，“補充資料”。

第一章是新寫的，其中論及數學製圖諸問題、計算作業知識，及橢圓體面和球面等角，等面積和等距離描寫於平面上的基本原理。

第二、三章相當於 1938 年出版的第一、二章，其中增添並充實了一些有關製圖用表的資料

第四章相當於 1938 年參考材料的第三章，內容比後者更加擴展和深入。此章新添如下幾節：M. Д. 索洛耶夫教授所擬製之透視-圓柱投影之計算及多重描寫透視投影之計算；球面投影作圖法及改正多圓錐投影和高斯投影公式；H. A. 烏爾馬耶夫教授所擬製之新圓柱投影和 B. B. 卡夫拉依斯基教授所擬製之任意偽圓柱橢

圓投影。

第五、六章相當於 1938 年參考材料的第四、五章，亦新添了兩節：投影的選擇及依經緯線網確定地圖投影。

本書文字經過修改，計算表也經過重新編製，且其中絕大多數的表皆係按對數計算和自然數値計算列出。本書所引用之計算表，規格詳細，基本上可供教學之用；而因爲它們主要是供初學計算者之用，所以對有經驗的計算員來說，不免會感到過於一般化。

修改供實習課應用的"數學製圖實習材料"時，我們認爲這些實習課的目的首先在於深入理解本課程的理論，而後進行計算工作方面的練習；同時我們估計到本書將會增長學生們獨立作業的能力。

第一章專門有一節簡明地介紹了數學製圖作業問題，莫斯科測繪工程學院數學製圖教研室助教 Л. А. 瓦赫拉曼耶娃參加了此節的編寫工作。

第一章　緒論

§ 1. 數學製圖學及其任務。地球橢圓體及其原素，以及與其有關的用於數學製圖學中的公式

數學製圖學這一學科的定義已在專門的教程中敍述過了（例見 1946 年出版之 M.Д. 索洛耶夫教授著“製圖投影”教程一書），本書僅就數學製圖學之若干問題作一般的闡述。

根據數學製圖學的現代發展情況，應當研究下列幾個問題：

1. 研究製圖投影的分類法，其間之相互關係與發展，以及合理的應用於實踐上；

2. 改進現有投影的方法並探求適應於現代製圖（作業）任務的投影；

3. 研究圖上各種測量的方式與方法；

4. 研究製圖投影應用於大地測量，同時注意測量計算時所採用之平面直角坐標的投影基礎，球面幾何——用於圖解法解題方面，及航行——航海與航空（此處，製圖網是用於測定船艦位置的）中的方法；

5. 研究並解決編繪地圖時（如：地圖配置、圖廓計算、圖上描繪輔助線、準備投影計算結果，以便作業中利用等），所產生的數學性的問題（計算上及幾何上的問題）。

數學製圖學與數學、測量學、地圖編繪學等有着緊密的聯繫；而在某些特種問題上又與天文、航海及航空接近起來。

在解決以上所列舉的問題方面，蘇聯數學製圖學是以辯證唯物的原則作爲基礎的，並且在研究中還遵循着這樣一個方針：創造新的，同時必須注意分析和顧及舊的，十分精細地、全面地研究現代的，但也要洞察未來的。

現代科學上把製圖投影的產生歸之於紀元前六世紀至五世紀。初期的投影主要是建立在幾何學原理上，也就是建立在初期的數學——幾何學原理上，而且也是由於當時實際生活的需要而產生的。

此後，製圖投影的發展與人民生活——人民的經濟、政治、科學和文化生活的普遍發展有了密切的聯繫；而數學、天文學、地理學、航海學、測量學等、對製圖投影這門科學的發展，亦曾有過很大的影響。

我國許多著名的學者(Л.歐拉、П.Л.契比雪夫、Н.Я.辛格爾、Д.А.哥拉文、В.В.維特科夫斯基、Ф.Н.克拉索夫斯基……等)以及外國的學者(墨卡托、拉格朗日、蘭勃脫、高斯、底索……等)都曾從事於製圖投影的研究和創製工作

數學製圖學在我國得到特別顯著的發展是在偉大的十月社會主義革命之後，十月社會主義革命給我國科學的發展創造了新的有利條件和廣泛的可能性。В.И.列寧在1919年發佈的關於組織高等測繪總局，以進行大規模地、全國性地繪製我國領土工作的這一歷史性的指令，一般對蘇聯製圖學，其中對數學製圖學的發展，有着很重要的意義。今天在蘇聯，製圖事業已經廣泛發展起來；解決了並正在解決關於編製有價値的地圖和輿圖集之複雜任務；地圖和輿圖集是以高度的科學水平來進行編繪的，同時在編圖時，對數學基礎——數學製圖學的問題亦予以應有的注意。

編製地圖及輿圖集這一工作的進展，鼓舞着很多蘇聯的學者們來解決數學製圖學方面的許多複雜而重要的問題。很多蘇聯專家(Ф.Н.克拉索夫斯基、В.В.卡夫拉依斯基、М.Д.索洛耶夫、Н.А.烏爾馬耶夫、Н.М.伏爾考夫、Ф.А.司達羅欽、Г.А.吉茲布格等)研究了並正在研究着數學製圖學的問題。專門的科學研究所——中央大地、航測、製圖科學研究所，國家機構的一些專門試驗室以及各大學的某些教研室都在進行着數學製圖問題的研究。

當編製地圖時，就需要將地球自然表面，即實地表面——此表面從幾何的觀點來看是一複雜及不規則的曲面——轉化到數學面上，也就是轉化到有規則形狀的同時近似於自然表面的一個曲面上來實施。

實用上，一般將橢圓體短軸假定與地球旋轉軸相合之旋轉橢圓體面(此曲面亦稱橢圓體面)作爲地球數學面。橢圓體之大小可根據長半軸 a、短半軸 b、扁率 α、偏心率 e 來確定。這些量的數值是據專門的天文——大地測量工作而推求出來的。在製圖實習的某些個別情況下，可將地球數學面視爲一定半徑 R 的球面。

編製地圖應將旋轉橢圓體面或球面描寫於平面上；欲解答這一問題，就須求諸製圖投影，即求諸旋轉橢圓體面或球面在平面上的描寫，且這種描寫是以數學法則爲基礎的，因而，描寫的解析式即爲橢圓體面或球面坐標與平面坐標的函數關係。

這樣，若橢圓體面或球面採用地理坐標系——緯度 φ 和經度 λ，而平面則採取直角坐標系——x 坐標和 y 坐標，於是描寫的解析式就可寫成如下一般形式之二方程式：

$$x=f_1(\varphi,\lambda),\quad y=f_2(\varphi,\lambda),$$

式中 f_1 及 f_2 是連續及有限的函數，至少在坐標 φ 和 λ 的某些已知值的範圍內是如此。

上面曾經指出：旋轉橢圓體的大小可由半軸 a, b，扁率 α 及偏心率 e 各量來決定；現在我們就將這些量的某些關係式列舉如下：

$$\left.\begin{aligned} &\text{橢圓體扁率：}\quad \alpha=\frac{a-b}{a} \\ &\text{第一偏心率：}\quad e^2=\frac{a^2-b^2}{a^2} \\ &\text{第二偏心率：}\quad e'^2=\frac{a^2-b^2}{b^2} \end{aligned}\right\}. \qquad (1)$$

根據上述關係式有

$$\left.\begin{aligned} &e'^2=\frac{e^2}{1-e^2} \\ &b=a(1-\alpha) \\ &b^2=a^2(1-e^2) \\ &\text{及近似式} \\ &\alpha\approx\frac{e^2}{2} \end{aligned}\right\}. \qquad (2)$$

現將實用上所遇到的 a, b 和 α 的數值援引如下表

創製者	年	a（公尺）	b（公尺）	α
克拉索夫斯基……………	1946	6 378 245	6 356 863	1:298.3
海福特……………………	1910	6 378 388	6 356 912	1:297.0
貝塞爾……………………	1841	6 377 397	6 356 079	1:299.2
克拉克……………………	1866	6 378 206	6 356 584	1:295.0
克拉克……………………	1880	6 378 249	6 356 515	1:293.5

按照蘇聯部長會議的決定，蘇聯測繪工作採用了Ф. Н. 克拉索夫斯基橢圓體的大小。

將解數學製圖學問題和計算製圖投影時，常用的與旋轉橢圓體面有關的一些公式列舉如下：

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

子午圈曲率半徑：$M=\dfrac{a(1-e^2)}{(1-e^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}$

卯酉圈曲率半徑：$N=\dfrac{a}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}$

平行圈曲率半徑：$r=N\cos\varphi$

平均曲率半徑：$R=\sqrt{MN}$

由赤道至緯度爲 φ 的平行圈間之子午線弧長：

$$S_m=a(1-e^2)\left\{\frac{A}{\rho^\circ}\varphi^\circ-\frac{B}{2}\sin 2\varphi+\right.$$
$$\left.+\frac{C}{4}\sin 4\varphi-\frac{D}{6}\sin 6\varphi+\cdots\cdots\right\},$$

式中
$$A=1+\frac{3}{4}e^2+\frac{45}{64}e^4+\frac{175}{256}e^6+\cdots\cdots$$
$$B=\frac{3}{4}e^2+\frac{15}{16}e^4+\frac{525}{512}e^6+\cdots\cdots$$
$$C=\frac{15}{64}e^4+\frac{105}{256}e^6+\cdots\cdots$$
$$D=\frac{35}{512}e^6+\cdots\cdots$$

經度 λ_1, λ_2 的子午線間的平行圈弧長：

$$Sp=\frac{r}{\rho}(\lambda_2-\lambda_1) \qquad (3)$$

經度 λ_1, λ_2 的子午線和緯度 φ_1, φ_2 的平行圈所包圍的梯形面積：

$$T=2b^2\frac{(\lambda_2-\lambda_1)^\circ}{\rho^\circ}\left\{A\sin\frac{\Delta\varphi}{2}\cos\varphi_m-B\sin\frac{3\Delta\varphi}{2}\right.$$
$$\cdot\cos 3\varphi_m+C\sin\frac{5\Delta\varphi}{2}\cos 5\varphi_m-D\sin\frac{7\Delta\varphi}{2}\cos 7\varphi_m$$
$$\left.+\cdots\cdots\right\},$$

式中 $A=1+\frac{1}{2}e^2+\frac{3}{8}e^4+\frac{15}{16}e^6+\cdots\cdots$

$$B=\frac{1}{6}e^2+\frac{3}{16}e^4+\frac{3}{16}e^6+\cdots\cdots$$

$$C=\frac{3}{80}e^4+\frac{1}{16}e^6+\cdots\cdots$$

$$D=\frac{1}{112}e^6+\cdots\cdots$$

$$\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1, \varphi_m=\frac{1}{2}(\varphi_1+\varphi_2).$$

整個旋轉橢圓體面的面積:

$$\sum=4\pi b^2\left\{1+\frac{2}{3}e^2+\frac{3}{5}e^4+\frac{5}{7}e^6+\cdots\cdots\right\}$$

諸曲率半徑 M、N、r 和 R 的數值，子午線和平行圈的弧長以及梯形面積大小，如1) $\Delta\varphi=4^\circ$, $\Delta\lambda=6^\circ$, 2)$\Delta\varphi=20'$, $\Delta\lambda=30'$，其中 $\Delta\varphi$ 和 $\Delta\lambda$ 爲梯形的子午線和平行圈所限定的經差與緯差，載於由 M. Д. 索洛耶夫教授領導並參加下以及有H. M. 伏爾考夫教授、科學技術候補博士 T. Д. 沙瑪諾伏參加所編製成的"製圖用表"中(於 1945 年由中央大地、航測、製圖科學研究所出版)，此表係按Ф. H. 克拉索夫斯基橢圓體諸原素編成。

§ 2. 數學製圖學計算實施概要

在數學製圖學中，計算是一項極爲重要的步驟，當研究投影以及在具體的實際工作中要求得投影時，計算都是不可缺少的，這種計算應以一定方式並按照研究和具體的實際工作所提出的要求來進行；他們的組織及實施皆應追求一個目的：卽化費最少的精力和工具，能在最短的時間內，以程序適宜的方式得到所需要的結果，且具有足够的，而不是多餘的精度。

本節就來簡略地敍述一下關於計算方面某些一般性的實用知識。

數學製圖學的計算，多半是爲了取得具體製圖工作所需的投影，因此，本節所談到的主要也就是這類性質的計算。

投影計算之最終目的是要求出一定疏密度(事先規定)的地理坐標系(即經緯線網)坐標線網交點的直角坐標，並得出說明投影變形——長度比例尺，面積比例尺及角度變形的數値。

在目的顯明的系統所列出之計算程序與逐漸擴展的計算步驟，即計算表，這樣的方式在計算中有着很重要的意義。

本書內摘有許多投影的計算詳表。

必須檢查投影計算；爲此，計算就需有二人，也即需有倆個計算者各自獨立地進行。按變化了的公式，或同一公式，一次按自然數値進行，另一次則用對數表計算，這樣來檢查計算都是較爲適宜的。

此外，依據投影公式的性質，亦可在計算過程中檢查之，例如：利用兩次獨立計算正圓錐投影常數的方法；根據所求値的第一階差分和第二階差分的變化；根據預知的一定點上之變形(比例尺及角度的變形)等。

計算時用三角函數自然數値表、對數表及特種製圖用表。

現在，我們就來簡單地敍述一下幾種比較常用的表。

1. 三角函數自然數値表：

(1)蘇聯國家技術理論出版社在1932年及蘇聯內務人民委員部國家測繪總局在1937年所再版的И. 別捷爾斯“六位三角函數表”。

此表的主要部分——表II裏，包含六個三角函數的數値：六位小數的正弦、餘弦、正切、餘切、正割及餘割，這些小數的第一階差分以及相應的比例部分。引數値由0到90°每隔10″表示。

爲了使表中數值的第一階差分盡可能的小，同時避免在進行內插時採用第二階差分，在表 1 中，更載有每隔一弧秒表示的，由 $0°0'$ 到 $1°20'$ 的餘切及餘割諸值。

(2) 1932 年國家測繪總局出版的 A. C. 費洛連科及 E. Ф. 白林柯夫編的"用於計算機的六位三角函數自然數值表"。

(3)四位及五位三角函數眞數值表，這類表有很多種，最著名的是蘇聯在 1938 年翻印利用的 Ф. Г. 高斯"五位三角函數自然數值表"。

2. 對數表

(1) Г. 文格的七位對數表及三角函數表，它在蘇聯已不止一次地再版過，最近一版爲 1949 年測繪出版社所再版。此表中之主要表有：在表 1 中——由 1 至 100009 諸數的常用對數的七位假數，同時，由 1000 開始，還附有比例部分的表；表 II 中——由0到$5°$每隔 $1''$ 表示的諸小角之正弦和正切之七位對數；表 III 中——諸角的正弦、餘弦、正切、餘切之七位對數，其第一階差分及相應比例部分的表。

(2) 1938 年蘇聯內務人民委員部國家測繪總局出版的 K. 布列米凱爾的"六位對數表及三角函數表"。

(3)"五位對數表及三角函數表"，此表由許多作者編輯 (E. 潑瓦斯基，C. 格拉澤拉伯等)並已多次再版，最近一版爲測繪出版社於 1949 年所再版。這些表的內容包括：(1)由 1 至 10009 諸數的常用對數之五位假數與相應比例部分的補充表，(2)每隔 $1'$表示的正弦、餘弦、正切和餘切的五位對數，其第一階差分以及相應比例部分之表。

3. 製圖用表

(1)在 M. Д. 索洛耶夫教授領導並參加下，以及 H. M. 伏爾考夫教授、科學技術候補博士 T. Д. 沙瑪諾伏參加所擬製的，由科學

技術候補博士 Г. А. 吉茲布格編輯，中央大地、航測製圖科學研究所 1945 年出版的“製圖用表”。

此表由六部分構成，包括：

第一部分——“卯酉圈和子午圈的曲率半徑，平均曲率半徑、平行圈半徑及這些數值之對數”(表 1)；

第二部分——“由赤道至緯度 φ 平行圈間之子午線弧長，緯度 1° 的子午線弧長，經度 1° 的平行圈弧長，切線長和切線長之對數”(表 2)；

第三部分——“球面緯度，經度 1° 的平行圈弧長，地球橢圓面等角、等面積、等距離 (沿子午線) 描寫於球面上的平行圈半徑”(表 5、6、7)；

第四部分——“横(赤道的)系的極球面坐標”(表 8)；

第五部分——“經線爲橢圓及正弦曲線的等面積僞圓柱投影和經緯線爲圓的任意投影 (編繪小比例尺圖時，通常所採用的投影)的直角坐標(x,y)表”；

第六部分爲“補充資料”——“地球橢圓體諸原素之數值”(表 12)，“作爲起始子午線的諸子午線之經度”(表 13)，“某些長度間的關係”(表 14)，“關於某些外國基本地圖比例尺之知識”(表 15)。“數學數值及其對數”(表 16)，“360° 度制與 400° 度制的正反換算”(表 17)，“化度爲弧度”(表 18)，“内插法”(表 19)。

此製圖用表係根據蘇聯克拉索夫斯基橢圓體諸原素編成，表之前五部分的精度皆符合於製圖實習上所提出的要求。

(2)“高斯-克呂格坐標表”由 А. М. 維羅夫茨教授領導，根據克拉索夫斯基橢圓體諸原素編成，由測繪出版社於1948年出版。

(3)“直角坐標變換表”爲 А. М. 維羅夫茨教授及 Б. Н. 拉賓諾維其副教授所編製，仍依據克拉索夫斯基橢圓體諸原素所算得；1950 年由測繪出版社出版。

關於製圖用表，在本書以後各節中，將加以補充說明。

H. H. 瑪吐謝維其教授的“大地和天文測量工作中數學計算的方式和方法”一文內在A部分“計算實習中之技術問題”載有三角函數自然數值表及對數表的詳細分析，此文刊載於“測量學”(H. H. 斯捷潘諾夫編輯 1949 年出版)第 IX 卷之附錄中。

H. H. 瑪吐謝維其教授的論文對數學製圖學的計算工作亦有實際的益處，因此，我們將文中一些說明及資料援引於此。

1. 關於三角函數自然數值表：

1)“談到三角函數自然數表時，必需指出，表內小數位數字不能充分表明三角函數自然數值之特性，正確的該說是有效數字”。

“……只有對於對數表用小數位之數字才能充分確定表的特性，而對於自然數值不論自然數的那一位都只能說是有效數字”。

2)間隔爲 10″ 及 1′ 的七位和五位表中之三角函數的表差：

七位表		五位表	
$\Delta_7\sin x=485\cos x$	第七位單位	$\Delta_5\sin x=29\cos x$	第五位單位
$\Delta_7\cos x=-485\sin x$		$\Delta_5\cos x=-29\sin x$	
$\Delta_7\operatorname{tg} x=485\sec^2 x$		$\Delta_5\operatorname{tg} x=29\sec^2 x$	
$\Delta_7\operatorname{ctg} x=-485\operatorname{cosec}^2 x$		$\Delta_5\operatorname{ctg} x=-29\operatorname{cosec}^2 x$	
$\Delta_7\sec x=485\operatorname{tg} x\sec x$		$\Delta_5\sec x=29\operatorname{tg} x\sec x$	
$\Delta_7\operatorname{cosec} x=-485\operatorname{ctg} x\operatorname{cosec} x$		$\Delta_5\operatorname{cosec} x=-29\operatorname{ctg} x\operatorname{cosec} x$	

(x 爲角度數值)

3)當函數本身有誤差(等於表的最後一位小數)時，按三角函數自然數值表所得角度的誤差爲

	七位表	五位表
按：$\sin\cdots$	$\Delta x=0''.021\sec x$；	$\Delta x=0'.034\sec x$
按：$\cos\cdots$	$\Delta x=-0''.021\operatorname{cosec} x$；	$\Delta x=-0'.034\operatorname{cosec} x$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com