

5511
744
T. 2

公路桥梁设计电算

下

(桥梁上部结构)

陆 楸 王春富 冯国明 编

人 民 交 通 出 版 社

公路桥梁设计电算

下

(桥梁上部结构)

陆 楸 王春富 冯国明 编

人民交通出版社

内 容 提 要

本书系统地叙述了《钢筋混凝土、预应力混凝土简支梁(板)桥通用程序》及《综合计算程序》的功能、编制原理、程序框图及使用说明,并附有输入数据填写示例和通用源程序文本。1980年,交通部公路局曾组织全国有关单位对上述两程序进行了技术鉴定,并已应用于生产实践,收到了显著效果。

本套书原拟分为上、中、下三册出版,现将中下两册合为一册,定为下册。

本书可供桥梁设计人员、科研部门的技术人员在实际工作中使用,亦可供有关院校师生参考。

公路桥梁设计电算

下

(桥梁上部结构)

陆 楸 王春富 冯国明 编

人民交通出版社出版
新华书店北京发行所发行
各地新华书店经售
人民交通出版社印刷厂印

开本: 787×1092 $\frac{1}{16}$ 印张: 16.25 字数: 323千

1983年6月 第1版

1983年6月 第1版 第1次印刷

印数: 0001—3,050册 定价: 2.50元

前 言

本书为《公路桥梁设计电算》的下册。书中系统地介绍了“正交钢筋混凝土、预应力混凝土简支梁（板）公路桥通用程序”及“公路桥梁综合计算程序”的功能、编制原理、程序框图及使用说明，并附有输入数据填写示例。可供桥梁设计、科研部门的技术人员在实际工作中使用，亦可供有关院校在教学工作中参考。

桥梁结构，由于其型式多样，工作条件及荷载条件都比较复杂，因此在设计工作中，计算分析工作非常繁重。过去，没有电子计算机时，为了减轻计算工作，通常只能采用一些近似的分析方法。对于一些复杂的结构体系，由于计算难度大，以致人力无法进行，一些创见不能付诸实践。另外，由于计算工作量大，一般不能充分探讨方案的合理性。这种情况，严重地影响了桥梁设计质量的提高和桥梁结构的发展。有了电子计算机，桥梁设计发生了根本的变化。实践证明，广泛而有效地使用电子计算机，是桥梁设计计算现代化的根本出路。它不仅能提高设计计算的速度和精度，能够在限定的时间内进行多种方案的比较以选择最优方案；而且还能够承担人力无法进行的复杂计算，为研究新的桥梁型式和新的施工工艺创造条件。

在桥梁设计工作中，上部构造的设计与计算占有相当大的比重，因此，首先实现桥梁上部构造的电子计算机分析是当务之急。本书介绍的两个桥梁电算程序，由于具有功能大、通用性强、自动化程度较高等特点，因此，可使常用桥型的上部结构的计算工作大部分由电子计算机来完成。

正交钢筋混凝土及预应力混凝土简支梁（板）桥通用程序，适用于目前公路上常用的各种类型的预应力混凝土和钢筋混凝土简支梁、板桥。主梁截面可为整体预制或现浇与预制组合的T形梁、箱形梁、空心板或实体板。横向联结可为有横隔梁、无横隔梁及铰结等情况。预应力工艺可为先张法或后张法。主梁根数、桥面净空、荷载及材料等级均可任意选择。程序理论严密，采用有限条法进行空间计算，动态规划法进行车辆荷载加载。输入信息少，计算时间短，易于为使用者所掌握。对于每座桥梁，只需输入少量有关跨径、净空、荷载、截面型式及材料等级等初始数据，计算机即能一次完成各项计算，达到绘制施工图的要求。因此，本程序是目前国内功能较全、自动化程度较高的简支梁（板）桥通用计算程序。

公路桥梁综合计算程序，适用于任意的可作为平面杆系处理的桥梁结构体系，包括常用的大跨径连续梁、连续拱、桁架梁、桁架拱、T构、斜拉桥以及弹性地基上的闭合框架等。程序能逐阶段形成结构体系，自动完成施工阶段静力体系的转换。对于大跨径桥梁目前常用的各种施工工艺，例如悬臂施工、推顶法施工、临时支架组装、缆索吊装等，程序均能从体系形成至使用阶段连续地进行综合分析。各部构件的截面可为任意形状，并可分阶段形成。结构可由预应力混凝土、钢筋混凝土、混凝土、钢或砖石构件组成，结构的构件可采用不同的材料类型和等级。程序考虑了各种可能的荷载形式，其中包括任意集中载和分布载，以及混凝土收缩徐变、温度变化、强迫位移等附加力作用。活载最不利内力（或位移）采用动态规划法在影响线上加载求得。程序最终给出任意指定截面在各受力阶段的最不利内力和

应力组合以及指定节点的位移，对于钢筋混凝土构件，则按照非线性应力迭加进行截面配筋及裂缝验算。本程序的特点是功能大、通用性强、自动化程度高，并且充分考虑了程序在实际设计工作中的实用性。

程序编制所依据的规范为：1974年交通部颁发的《公路桥涵设计规范》，1978年交通部颁发的《公路预应力混凝土桥梁设计规范》。并参照了1975年铁道部颁发的《铁路工程技术规范》有关桥涵部分。

本书所介绍的两个程序，自1978年交付使用以来，已广泛应用于生产实践，完成了数十座各种新桥型的大桥以及数百座中、小桥梁的计算分析工作。节省了大量人力和物力，与手算比较，一般提高效率几十倍。尤为重要的是，利用电算可对设计方案进行反复试算调整，可进行多种设计方案比较，从而提高了设计质量。在三年的使用过程中，也对程序进行了更广泛的考核。实际计算表明，程序在理论上是可靠的，计算结果正确，计算速度也是令人满意的，达到了预期的设计效果。1980年交通部公路局组织全国各有关单位，对两个程序进行了正式技术鉴定，认为这两个程序在国内同类程序中属于先进水平者，可交付使用。

当然，由于程序规模较大，涉及问题较多，程序中某些非常用部分考核也不够充分，加上编制者水平所限，在程序中难免存在一些缺点乃至错误，尚望使用者批评指正。

参加正交钢筋混凝土、预应力混凝土简支梁（板）公路桥通用程序编制的单位为：交通部公路规划设计院、北京建筑工程学院、交通部第二公路勘察设计院、同济大学、上海市市政工程研究所、北京市政设计院和重庆交通学院。参加公路桥梁综合计算程序编制的单位为：交通部公路规划设计院、北京市政设计院和北京市计算中心。

由于篇幅所限，本书中只提供了简支梁通用程序的源程序文本，需要公路桥梁综合计算程序的源程序者，可向编制单位索取。

《公路桥梁设计电算》一书由陆楸负责主编，本册第一篇由冯国明编写，第二篇由王春富编写。在编写过程中曾得到许多同志的大力协助，谨在此表示谢意。

目 录

前 言	1
-----	---

第一篇 正交钢筋混凝土、预应力混凝土 简支梁(板)公路桥通用程序

第一章 计算原理	1
§1-1 概述	1
§1-2 荷载横向分配影响线计算的刚接梁板法	2
§1-3 荷载横向分配影响线计算的有限条法	7
§1-4 荷载横向分配系数计算的动态规划法	18
§1-5 横梁弯矩计算	21
§1-6 钢筋混凝土主梁设计计算	22
§1-7 预应力混凝土主梁设计计算	25
第二章 程序功能及框图	29
§2-1 程序功能	29
§2-2 程序分块	30
§2-3 标识符说明	30
§2-4 程序框图	42
第三章 程序使用说明	64
§3-1 输入数据和信息	64
§3-2 输出计算结果	73
第四章 计算示例	76
§4-1 装配式钢筋混凝土 T形梁桥	76
§4-2 钢筋混凝土铰接空心板梁桥	78
§4-3 后张法预应力混凝土 T形梁桥	79
§4-4 先张法预应力混凝土组合箱梁桥	81
第五章 源程序	84

第二篇 公路桥梁综合计算程序

第一章 计算原理	138
§1-1 概述	138
§1-2 基本计算图式	139

§1-3	结构体系形成过程中计算图式的生成	145
§1-4	混凝土收缩、徐变引起的结构内力重分布	146
§1-5	计算活载最不利内力的动态规划法	148
§1-6	预应力效应的分析	157
§1-7	钢筋混凝土构件截面应力非线性迭加的计算	161
§1-8	非线性分布的温度应力计算	163
§1-9	斜拉索张拉力的确定	166
第二章	程序功能及框图	168
§2-1	程序功能	168
§2-2	标识符说明	170
§2-3	程序总框图	180
第三章	程序使用说明	199
§3-1	拟定计算图式的注意事项	199
§3-2	输入数据和信息	200
§3-3	计算结果的输出格式	216
§3-4	上机算题注意事项	222
第四章	计算示例	225
§4-1	悬臂拼装预应力混凝土连续梁桥	225
§4-2	推顶法施工预应力混凝土连续梁桥	238
§4-3	钢筋混凝土闭合框架式立交桥	248
参考资料		254

第一篇 正交钢筋混凝土、预应力混凝土 筒支梁(板)公路桥通用程序

第一章 计算原理

§1-1 概 述

钢筋混凝土或预应力混凝土筒支梁、板桥构造简单,施工方便,为中、小跨径桥梁的最常用形式之一。筒支梁、板桥的力学分析和结构设计又属于最基本的内容。因此筒支梁、板桥的设计计算在桥梁上部构造设计计算中有着重要的地位。

进行筒支梁、板桥的设计通常总是先根据使用要求(通航净空、桥面标高、桥面净空、荷载等级等)以及当时当地的具体条件(材料、工艺、吊装能力等),参考已建成的同类桥梁和一些经验数据拟定上部构造纵横截面布置(包括主梁横截面形式、主梁间距、主梁高度、主梁横截面沿跨长的变化、横隔梁的布置等)和各部分的尺寸,然后根据作用在桥梁上的荷载,进行结构内力分析,求得各部份(主梁、横梁、桥面板)的最不利内力组合。进而按照钢筋混凝土或预应力混凝土设计原理估算钢筋或预应力钢束,并进行各控制截面的强度、抗裂性和刚度验算,以检验预先拟定的截面尺寸和配筋是否符合要求。如果验算不能满足这些要求(结构安全度不足)或者验算结果安全度过大(材料浪费),则进行必要的修正,并重新计算。

限于本书的性质,这里只能重点介绍本程序中采用的几个比较重要的原理、方法和有关公式。上述设计计算步骤中的其他内容以及以下各节中涉及的一些数学、力学基本概念,请读者参考有关规范及大专院校的有关教材。

本程序吸取了国内外近期研究成果,采用刚接梁(板)法及有限条法进行荷载横向分布计算。前者适用于主梁间距不大的T型梁、铰接梁(板)等桥型。后者则属于比较完善的梁桥空间计算方法,是有限单元法与经典的三角级数解法的结合,适用于主梁间距较大,特别是箱型梁的情况。这两种方法在设计实践中已得到广泛应用,效果良好。有关物理模型和计算原理将在§1-2和§1-3中详述。

在按上述横向分布计算方法求得横向分配影响线后,便可根据设计荷载标准在影响线上加载求得相应的横向分配系数。考虑到横向各影响线正负区相间的任意性,本程序采用严格的动态规划法加载求横向分配系数,详见§1-4。

求得横向分配系数后,乘以单梁的内力计算结果(按材料力学方法),便可得到各控制截面的设计内力。据此,可按有关规范规定〔1〕〔2〕〔3〕进行钢筋混凝土或预应力混凝土的配筋和各项验算。一些主要公式和本程序所采用方法的特点将在§1-6至§1-7中予以必要的说明。

§1-2 荷载横向分配影响线计算的刚接梁板法

1-2-1 基本体系与赘余力列阵

将简支梁、板式上部构造，沿桥跨划分为若干个梁条单元（见图1-1-1a）。当有中横隔梁（其抗弯惯矩为 I_{x0} ，间距为 d ）时，可将其比拟成单位长度（一米）抗弯惯矩为 $I_x = I_{x0}/d$ 的等厚度板。

在竖向荷载作用下，梁条单元接缝处将产生竖向剪力 $q(y)$ 、纵向剪力 $t(y)$ 、法向力 $s(y)$ 和横向弯矩 $m(y)$ （见图1-1-1b）。其中， $t(y)$ 和 $s(y)$ 系桥面板中平面（板厚中央平面）上的内力。它们对竖向荷载的横向分布作用甚微。为了简化计算，仅取梁条间接缝（ i ）的弯矩（ $m_i(y)$ ）和竖向剪力（ $q_i(y)$ ）作为赘余力（见图1-1-1c）。

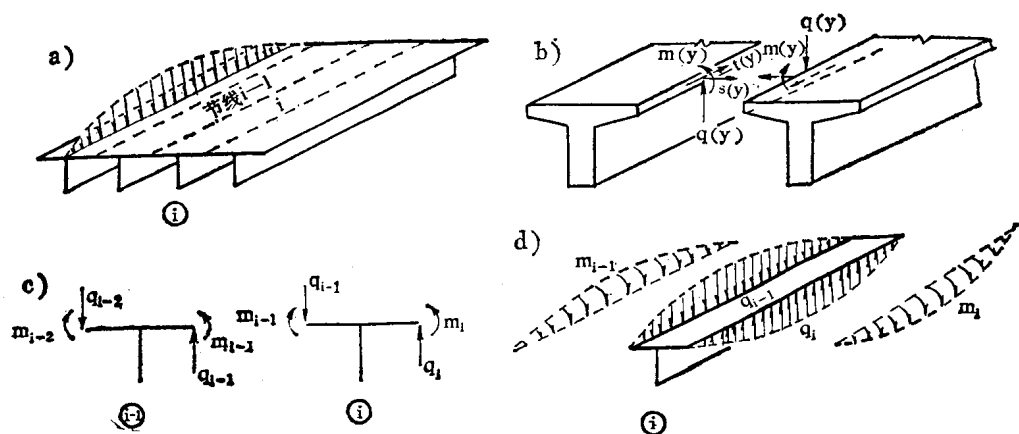


图 1-1-1

显然，上述赘余力均应是沿接缝的分布力，采用三角级数描述时，满足简支的静力和位移边界条件的表达式为

$$\left\{ \begin{aligned} m_i(y) &= \sum_{n=1}^{n_0} m_{in} \sin \frac{n\pi y}{l} \\ q_i(y) &= \sum_{n=1}^{n_0} q_{in} \sin \frac{n\pi y}{l} \end{aligned} \right. \quad (1-1)$$

上式表明，接缝上的赘余力的值，完全由 n 个半波的正弦曲线峰值确定。因此，求解这些赘余力归结为求解其峰值 m_{in} 、 q_{in} ($n=1, 2, \dots, n_0$)。由于三角级数的正交性， n_0 个半波分析可以分别进行，而后迭加。为不失一般性，现讨论其中任意的第 n 个半波的情形，并将其峰值简写成 m_i 、 q_i 。图1-1-1d 中仅以一个峰值表示接缝上的一条分布力的情况。

综上所述，取分离的梁条作为基本体系，而超静定次数，即赘余力总数为 $2(B_0-1)$ ，写成矩阵形式为

$$\{f\} = [m_1 q_1 \dots m_{B_0-1} q_{B_0-1}]^T \quad (1-2)$$

其中， B_0 为主梁总根数。

1-2·2 梁条单元的柔度矩阵

为引出正弦级数分布荷载作用下的梁条单元柔度矩阵的定义，不妨简略回顾一下柔度的物理概念。图1-1-2所示弹簧，拉力 p 使它伸长 δ ，则有下列关系：

$$\delta = d p$$

其中， d 就是单位荷载所引起的在其方向上的位移，称为柔度。类似地，梁条单元的柔度可以定义为由单位峰值的正弦曲线赘余力在赘余力方向上引起的变位峰值。因梁条单元有四个赘余力，故单元柔度矩阵为 4×4 阶的方阵。如用 $[D]^e$ 表示，则有图1-1-3所示的物理意义。



图 1-1-2

列号	1	2	3	4
行号 赘余力的方向 单位峰值赘余力				
1	d_{11}	d_{12}	d_{13}	d_{14}
2	d_{21}	d_{22}	d_{23}	d_{24}
3	d_{31}	d_{32}	d_{33}	d_{34}
4	d_{41}	d_{42}	d_{43}	d_{44}

图 1-1-3

据上述定义， $[D]^e$ 中的每个元素，可由梁的挠曲和扭转微分方程求得它的解析式。今以 d_{22} 为例说明其求法。

由图1-1-3可知 d_{22} 的物理意义是，当 $q_2 = 1$ 时，在其自身方向上产生的位移峰值。由力独立作用原理，可将 $q_2 = 1$ 的作用看作图1-1-4所示三种情况的迭加，即

$$d_{22} = d_{22}^{(1)} + d_{22}^{(2)} + d_{22}^{(3)} \quad (1-3)$$

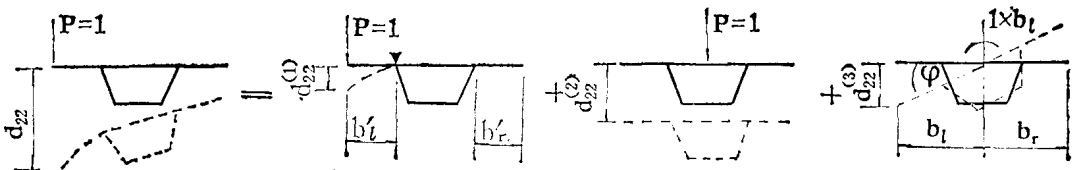


图 1-1-4

在接缝分布力 $p(y) = 1 \times \sin \frac{n\pi y}{l}$ 作用下，悬臂板端的挠度，可近似地写成为

$$w^{(1)}(y) = \frac{b_l'^3}{3E_x I_x} \times 1 \times \sin \frac{n\pi y}{l}$$

可见峰值为:

$$d_{22}^{(1)} = \frac{b_l'^3}{3E_x I_x} \quad (1)$$

由梁的挠曲微分方程:

$$E_y I_y \frac{d^4 w(y)}{dy^4} = p(y) \quad (2)$$

而在梁轴上的分布力:

$$p(y) = 1 \times \sin \frac{n\pi y}{l} \quad (3)$$

将(3)式代入(2)式,并积分四次后得 ($E_y I_y = \text{常数}$):

$$w(y) = \frac{1}{E_y I_y} \cdot \frac{l^4}{n^4 \pi^4} \cdot \sin \frac{n\pi y}{l}$$

可见峰值:

$$d_{22}^{(2)} = \frac{l^4}{E_y I_y n^4 \pi^4} \quad (4)$$

由梁的扭转微分方程:

$$GI_T \frac{d^2 \varphi(y)}{dy^2} = -m_T(y) \quad (5)$$

而分布扭矩:

$$m_T(y) = b_l \cdot \sin \frac{n\pi y}{l} \quad (6)$$

将(6)式代入(5)式,并积分二次后得 ($GI_T = \text{常数}$):

$$\varphi(y) = \frac{b_l}{GI_T} \cdot \frac{l^2}{n^2 \pi^2} \sin \frac{n\pi y}{l}$$

显见由于梁条单元扭转在 q_2 方向上引起的位移峰值为:

$$d_{22}^{(3)} = \frac{b_l l^2}{GI_T n^2 \pi^2} \times b_l \quad (7)$$

将式(1)、(4)和(7)代入式(1-3)得:

$$d_{22} = \frac{b_l'^3}{3E_x I_x} + \frac{l^4}{n^4 \pi^4 E_y I_y} + \frac{b_l^2 l^2}{n^2 \pi^2 GI_T} \quad (1-4)$$

式中: $E_x I_x$ ——横向单位长度的抗弯刚度;

$E_y I_y$ ——主梁的抗弯刚度;

GI_T ——主梁的抗扭刚度;

l ——主梁的计算跨径;

b_l' ——翼板悬臂长度;

b_l ——翼板悬臂端到主梁中心距离。

利用上述一类推导,便可得梁条单元柔度矩阵的全部元素。由于变位互等定理,单元柔度矩阵是对称的。

$$\text{令} \quad \left\{ \begin{array}{l} K_n = \frac{n\pi}{l}, \quad \delta = \frac{1}{E_x I_x} \\ \omega = K_n^4 E_x I_x, \quad \alpha = \frac{1}{K_n^2 G I_T} \end{array} \right.$$

于是，柔度矩阵下三角诸元素可用下式表达，即：

$$\left\{ \begin{array}{l} d_{11} = \delta b_l' + \alpha \\ d_{21} = -\delta \frac{b_l'^2}{2} - \alpha b_l \\ d_{31} = -\alpha \\ d_{41} = -\alpha b_l \\ d_{22} = \delta \frac{b_l'^3}{3} + \alpha b_l^2 + \omega \\ d_{32} = \alpha b_l \\ d_{42} = \alpha b_l b_l - \omega \\ d_{33} = \delta b_l' + \alpha \\ d_{43} = \delta \frac{b_l'^2}{2} + \alpha b_l \\ d_{44} = \delta \frac{b_l'^3}{3} + \alpha b_l^2 + \omega \end{array} \right. \quad (1-5)$$

以上推导，没有采用参考资料〔5〕所引入的计算参数 β 、 γ ，这是因为〔5〕为制表进行手算用的。采用电算可较全面地考虑各主梁的柔度矩阵完全不同的情况，如主梁对称与否（即 $b_r = b_l$ 或 $b_r \neq b_l$ ），边主与中主梁截面形状不同，箱形截面（ $b_r \neq b_l'$ ， $b_l \neq b_l'$ ）以及纵横抗弯弹性模量不同（纵向预应力混凝土，横向为钢筋混凝土）等因素。

1-2-3 梁条单元的载变位列阵

作用在简支梁条任意位置上（距支点为 y_p ）的集中力 P ，展开成正弦级数，并取其第 n 个半波的表达式为：

$$\phi(y) = \frac{2P}{l} \sin \frac{n\pi y_p}{l} \sin \frac{n\pi y}{l} \quad (1-6)$$

故其峰值为：

$$\phi_m = \frac{2P}{l} \sin \frac{n\pi y_p}{l} \quad (1-7)$$

对于沿梁长作用的均布荷载 q ，展开成正弦级数后，其第 n 个半波荷载表达式为：

$$\phi(y) = \frac{4q}{n\pi} \sin \frac{n\pi y}{l} \quad (1-8)$$

故其峰值为：

$$\phi_m = \frac{4q}{n\pi} \quad (1-9)$$

利用梁条单元的柔度矩阵（图1-1-3）及式(1-5)，注意到 ϕ_m 在梁条不同位置 x ，便得到梁条单元载变位列阵 $\{\Delta\}$ ，见图1-1-5。

1-2-4 力法准则方程组

结构力学的力法准则方程组写成矩阵形式为：

$$[D]\{f\} = \{\Delta\} \quad (1-10)$$

式中：[D]——结构的总柔度矩阵，由梁条单元柔度矩阵集合生成；

{Δ}——结构的载变位列阵，同样由梁条单元载变位列阵集合生成；

{f}——所求的赘余力的峰值列阵，见式(1-2)。

利用图1-1-3及1-1-4，

由梁条单元柔度阵及载变位列阵集合生成总柔度矩阵及载变位列阵时，需注意左边梁和右边梁仅单侧有赘余力，故对左边梁(1号梁)只引入第3、4行第3、4列元素，对右边梁(B0号梁)仅引入第1、2行第1、2列元素。

解(1-10)方程组，便可得赘余力峰值列阵，据此便可求得各梁条的分配力。

1-2-5 主梁横向分配影响线及横梁弯矩影响线

桥梁空间计算，在实用上多采用横向分配的近似概念。

所谓横向分配影响线，就是设想桥上的荷载P沿桥宽多少不等地分配于各主梁的相对比例值。注意到梁条主要承受弯矩的特点，由式(1-10)解得各梁条间接缝上的赘余力 $q_i(y)$ ，($i=1,2,\dots,B0-1$)积分两次，便得到由 $q_i(y)$ 产生的弯矩，令其峰值为 m_i ，于是，当 p_m 在*i*时，各梁条分配到的弯矩峰值(见图1-1-6)可由下式确定：

$$m_i = \begin{cases} m_{i-1} - m_i & (\text{当 } i \neq j \text{ 时}) \\ m_{p_m} + m_{i-1} - m_i & (\text{当 } i = j \text{ 时}) \end{cases}$$

式中， m_{p_m} 是 p_m 产生的弯矩峰值。

这样，通过各梁条弯矩峰值的相对比例，就确定了弯矩横向分配影响线。影响线的纵坐标值 $\eta_{i,j}$ 表达式为：

$$\eta_{i,j} = -\frac{m_i}{B_0} \sum_{k=1}^{B_0} m_k \quad (1-11)$$

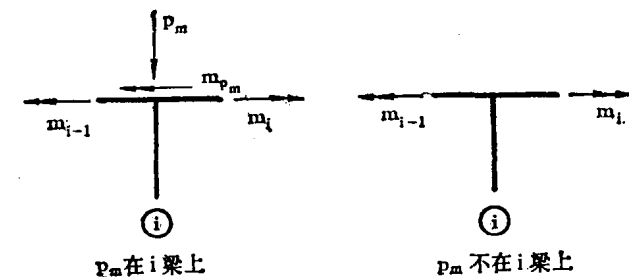


图 1-1-6

现在讨论横梁弯矩影响线，这里是指荷载正弦级数峰值为1时的横梁弯矩峰值影响线。当荷载的峰值为1时，赘余力峰值则应为：

$$\bar{q}_i = \frac{l}{2\sin K_n y_p} \cdot q_i$$

$$\bar{m}_i = \frac{l}{2\sin K_n y_p} \cdot m_i$$

因此，梁 i 至 $i+1$ 之间任一截面的弯矩可由平衡条件写出。

例如如图 1-1-7 所示截面 1-1 的弯矩表达式为：

$$\eta_{m1k} = \begin{cases} \bar{q}_i b_{r1} - 1 \times x + \bar{m}_i, & (P=1 \text{ 在 } 1-2 \text{ 之间}) \\ \bar{q}_i b_{r1} + \bar{m}_i, & (P=1 \text{ 在 } 1-2 \text{ 之外}) \end{cases} \quad (1-12)$$

同理，可写出其它断面弯矩峰值影响线的表达式。

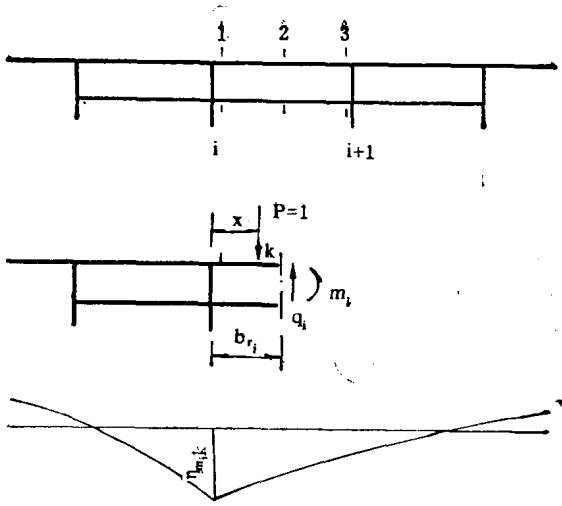


图 1-1-7

§1-3 荷载横向分配影响线计算的有限条法

1-3-1 有限条法简介

梁桥的精确空间计算，原则上可采用薄壳问题的有限元法。但是，实际上因结构离散后，单元过多，刚度矩阵阶数高，带宽大，必须在大容量的电子计算机上才能实现。

这里介绍的有限条法综合了有限元法和级数解析法的优点，在横截面内采用有限元法分析，而沿跨径方向采用三角级数解析分析，所以也叫半分析法。由于三角级数的正交性，实际荷载沿跨径方向展开 n 项三角级数后，各个半波彼此独立。因此，应用有限条法分析，可将一个三维的有限元分析，转化为 n 个彼此独立的二维问题的有限元（沿跨径方向采用 n 项级数而不划分单元）分析，使其刚度矩阵的阶数大为降低。于是，梁桥空间计算在目前常用的国产电子计算机上得以实现。

由于有限条法采用了平面应力和薄板弯曲的板条单元，它属于弹性力学的三维问题分析。因此，目前常用的比拟板法（二维问题）和上述的刚接板法（一维问题），均系其特例。故有限条法被认为是比较精确的方法，但计算时间较刚接板法长些。试算表明，对主梁间距不大的 T 形梁、铰接板等桥型，用有限条法及刚接梁板法分析相差很小。为了简化计算，可采用刚接梁板法；而对主梁间距较大的情况，特别是箱形梁，鉴于刚接梁板法的梁条忽略了主梁横向变形和扭转翘曲，会带来相当大的误差，计算结果偏于不安全，故对箱形梁桥的计算，建议采用有限条法。

1-3-2 有限条法的单元刚度矩阵 $[K]^0$

1. 概述

将薄壁简支梁桥离散为若干个有限大小的板条单元，图 1-1-8 为一片箱形梁的离散情况。

取出其中的任一板条单元 ij 。假定梁桥的端横隔梁在其自身平面的刚度为无穷大，而垂直其平面刚度为零。因此任一板条单元的支承情况也看作二端简支，见图 1-1-9。

在板条中面上作局部座标系 $OXYZ$ （图 1-1-9）。板条上任一法线，在空间问题中应考虑六个位移自由度，即位移列阵为：

$$\{f\} = [u \ v \ w \ \theta_x \ \theta_y \ \theta_z]^T$$

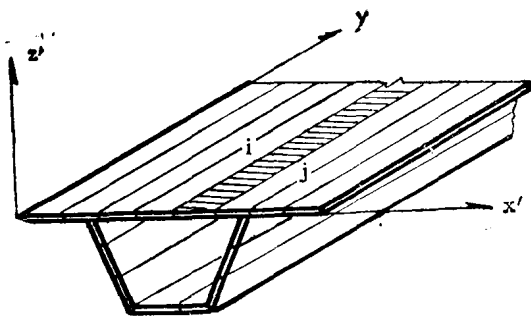


图 1-1-8

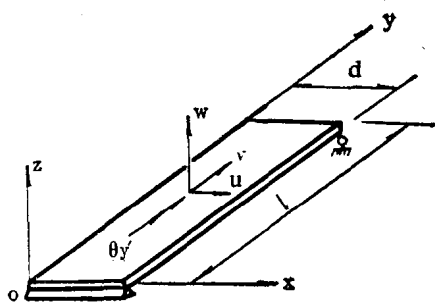


图 1-1-9

从以下分析将见到，由于有限条法位移模式取为：

$$\omega(x, y) = \sum_{n=1}^{n_0} w_n(x) \sin \frac{n\pi y}{l}$$

于是：

$$\theta_x = \frac{\partial \omega(x, y)}{\partial y} = \sum_{n=1}^{n_0} -\frac{n\pi}{l} w_n(x) \cos \frac{n\pi y}{l}$$

它完全由 $w_n(x)$ 所确定。

在局部坐标系中，中面内的转角 $\theta_z = 0$ ，而 θ_y 在坐标转换时没有改变。因此任一法线的转角自由度可只考虑 θ_y ，于是，位移列阵为：

$$\{f\} = [u \ v \ w \ \theta_y]^T \quad (1-13)$$

式中， u 和 v 为平面应力问题的位移自由度，而 w 及 θ_y 则为薄板弯曲问题的位移自由度，即：

$$\{f^p\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}, \quad \{f^b\} = \begin{Bmatrix} w \\ \theta_y \end{Bmatrix} \quad (1-14)$$

因为平面应力与薄板弯曲互不相关，所以板条刚度矩阵可以写成如下的分块形式：

$$[K]^e = \begin{pmatrix} [K_{ii}^p] & & & & \text{对} \\ 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & [K_{ii}^b] & & \text{称} \\ [K_{ji}^p] & 0 & 0 & [K_{ji}^p] & \\ & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & [K_{ji}^b] & 0 & 0 & [K_{jj}^b] \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & \end{pmatrix} \quad (1-15)$$

由 $[K_{ii}^p]$ 、 $[K_{jj}^p]$ 、 $[K_{ji}^p]$ 组成单元的平面应力刚度矩阵 $[K^p]^e$ 。由 $[K_{ii}^b]$ 、 $[K_{jj}^b]$ 、 $[K_{ji}^b]$ 组成单元的薄板弯曲刚度矩阵 $[K^b]^e$ ，即

$$[K^p]^e = \begin{pmatrix} [K_{ii}^p] & [K_{ij}^p] \\ [K_{ji}^p] & [K_{jj}^p] \end{pmatrix}, \quad [K^b]^e = \begin{pmatrix} [K_{ii}^b] & [K_{ij}^b] \\ [K_{ji}^b] & [K_{jj}^b] \end{pmatrix} \quad (1-16)$$

以下分别确定 $[K^p]^e$ 及 $[K^b]^e$ 。

考虑到实际梁桥纵向预应力混凝土，横向为非预应力混凝土材料的正交各向异性，以及预应力空心板桥面板或有中横隔梁时，构造上的正交异性的可能性，故以下推导按正交各向异性板考虑。

2. 板条单元的平面应力刚度矩阵 $[K^p]^e$

平面应力时，板条的简支边界条件给出：

$$y = 0, l \text{ 时}$$

$$u = 0$$

$$\sigma_y = E_2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \mu_x \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0$$

满足上述边界条件的位移模式当取为：

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{n_0} u_n(x) \sin \frac{n\pi y}{l}$$

$$v(x, y) = \sum_{n=1}^{n_0} v_n(x) \cos \frac{n\pi y}{l}$$

由于单元节线 i 、 j 上的位移，将完全由其位移峰值 u_{in} 、 v_{in} 、 u_{jn} 、 v_{jn} 所确定，亦即节线位移自由度仅有 u_{in} 、 v_{in} 、 u_{jn} 、 v_{jn} 四个。因此位移模式 $u_n(x)$ 及 $v_n(x)$ 都只能假定为 x 的一次函数（二个待定系数），即上式写成：

$$\begin{cases} u(x, y) = \sum_{n=1}^{n_0} (\alpha_{1n} + \alpha_{2n}x) \sin \frac{n\pi y}{l} \\ v(x, y) = \sum_{n=1}^{n_0} (\alpha_{3n} + \alpha_{4n}x) \cos \frac{n\pi y}{l} \end{cases}$$

上式中引入边界条件 $x = 0$ 时：

$$\begin{cases} u(0, y) = \sum_{n=1}^{n_0} u_{in} \sin \frac{n\pi y}{l} \\ v(0, y) = \sum_{n=1}^{n_0} v_{in} \cos \frac{n\pi y}{l} \end{cases}$$

$x = d$ 时：

$$\begin{cases} u(d, y) = \sum_{n=1}^{n_0} u_{in} \sin \frac{n\pi y}{l} \\ v(d, y) = \sum_{n=1}^{n_0} v_{in} \cos \frac{n\pi y}{l} \end{cases}$$

于是，四个待定系数 α_{1n} 、 α_{2n} 、 α_{3n} 、 α_{4n} 可由节线 i 、 j 相应于第 n 阶谐波位移的峰值 u_{in} 、 v_{in} 、 u_{jn} 、 v_{jn} 来表示，即：

$$\begin{cases} u(x, y) = \sum_{n=1}^{n_0} \left[\left(1 - \frac{x}{d} \right) u_{in} + \frac{x}{d} u_{jn} \right] \sin \frac{n\pi y}{l} \\ v(x, y) = \sum_{n=1}^{n_0} \left[\left(1 - \frac{x}{d} \right) v_{in} + \frac{x}{d} v_{jn} \right] \cos \frac{n\pi y}{l} \end{cases}$$

由于三角函数的正交性， n 阶谐波的荷载只对应于 n 阶谐波的位移和内力。因此，上述 n_0 项级数可分成 n_0 次进行，最后迭加。故以下讨论可取其中任一项，即第 n 阶谐波的情况：

$$\begin{cases} u_n(x, y) = \left[\left(1 - \frac{x}{d} \right) u_{in} + \frac{x}{d} u_{jn} \right] \sin \frac{n\pi y}{l} \\ v_n(x, y) = \left[\left(1 - \frac{x}{d} \right) v_{in} + \frac{x}{d} v_{jn} \right] \cos \frac{n\pi y}{l} \end{cases} \quad (1-17)$$

将上式代入弹性力学平面应力问题的几何方程，便可得到：

$$\{\varepsilon_n^e\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xn} \\ \varepsilon_{yn} \\ \gamma_{xyn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_n}{\partial x} \\ \frac{\partial v_n}{\partial y} \\ \frac{\partial u_n}{\partial y} + \frac{\partial v_n}{\partial x} \end{Bmatrix} = [B_n^e] \{\delta_n^e\}^e \quad (1-18)$$

其中：

$$\{\delta_n^e\}^e = [u_{in} \ v_{in} \ u_{jn} \ v_{jn}]^T \quad (1-19)$$

为第 n 阶谐波节线位移峰值构成的广义位移列阵。

$[B_n^e]$ 为第 n 阶谐波的平面应力部分相应的广义应变矩阵，可写成：

$$[B_n^e] = [\bar{B}_n^e] \sin \frac{n\pi y}{l} + [\bar{B}_n^e] \cos \frac{n\pi y}{l} \quad (1-20)$$

其中：

$$\begin{cases} [\bar{B}_n^e] = \begin{pmatrix} -\frac{1}{d} & 0 & \frac{1}{d} & 0 \\ 0 & -\left(1 - \frac{x}{d}\right) \frac{n\pi}{l} & 0 & -\frac{x}{d} \frac{n\pi}{l} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ [\bar{B}_n^e] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \left(1 - \frac{x}{d}\right) \frac{n\pi}{l} & -\frac{1}{d} & \frac{x}{d} & \frac{n\pi}{l} \end{pmatrix} \end{cases} \quad (1-21)$$