



数据加载失败，请稍后重试！

上海市高中课本

SHU

XUE

数学

立体几何

上海教育出版社

上海市高中课本

数 学

立 体 几 何

上海市中小学教材编写组编

上海教育出版社出版

(上海永福路 123 号)

上海新华书店发行 上海市印刷六厂印刷

开本 787×1092 1/32 印张 7.25 字数 160,000

1980 年 12 月第 1 版

1981 年 12 月第 2 版 1981 年 12 月第 2 次印刷

印数 24,301—89,950 本

统一书号: K7150·2404 定价: 0.43 元

(限国内发行)

说 明

上海市高中数学课本，是根据全日制十年制中学数学教学大纲的精神和要求，在上海市中学理科班数学教材基础上，按《代数与初等函数》、《立体几何》、《平面解析几何》、《微积分初步》分科编写的，由以苏步青教授为主任委员，郑启明、姚晶为副主任委员的上海市中学数学教材审稿委员会审定。本册教材《立体几何》供本市三年制高中一年级第二学期、高中二年级第一学期选用。

参加本册教材审稿的还有张元书、李承福、崇安俊等同志，在编写、修订过程中，部分大专院校和中学数学教师也提出了许多宝贵的意见，在此表示衷心的感谢。参加本册教材编写、修订的有周玉刚、李俊明、汪天忠、余致甫、夏明德、张福生、陈肇曾、韩希塘、陈嘉驹、姜宝坤等同志。

本书虽然经过修订，但限于水平，教材中还会有不少问题，欢迎广大师生批评指正。

上海市中小学教材编写组

一九八一年七月

目 录

第一章	直线和平面	1
一	平面	1
二	空间两条直线	12
三	空间线面平行关系	24
四	空间线面垂直关系	37
五	三面角和多面角	73
第二章	多面体和旋转体	89
一	棱柱和圆柱	91
二	棱锥和圆锥	119
三	棱台和圆台	147
四	球	176
五	正多面体和欧拉公式	198
六	三视图	207

第一章 直线和平面

我们经常遇到一些图形，如黑板上画的三角形、四边形、圆；教室里的桌子、书、粉笔等物体的形状。分析这些图形上点的特点，我们可以看到，象黑板上的三角形、四边形、圆，如果把黑板面看作平面的话，那末这些图形上的点都在同一个平面内，这种图形叫做**平面图形**。象桌子、书、粉笔，单从它们的几何形状来观察，这些图形上的点不全在同一个平面内，这种图形叫做**空间图形**，或叫做**立体图形**。平面图形是由同一平面内的点、线组成的。空间图形是由空间的点、线、面组成的。

在初中平面几何中，我们学习了平面图形的性质和应用。在本册立体几何中，我们将学习空间图形的性质、画法、有关计算和应用。

本章主要学习空间直线与直线、直线与平面、平面与平面等各种位置关系和它们的性质。

一 平 面

1.1 平面和它的表示法

我们常见的桌面、黑板面、镜面以及平静的水面等，都给我们以平面的形象。几何中所说的平面，是指在空间无限伸展着的。

当我们从适当角度和距离观察桌面或黑板面时，感到它们很象平行四边形，因此，通常用平行四边形来表示平面[图

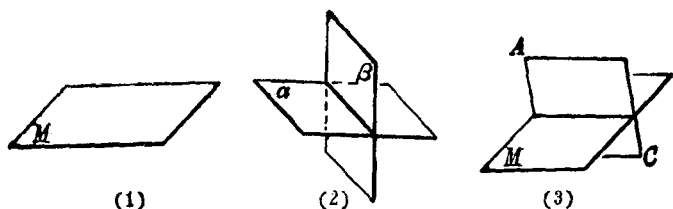


图 1.1

1.1(1)], 在画一个水平放置的平面时,通常把平行四边形的锐角画成 45° , 把横边画成水平方向,且等于邻边的两倍。如果一个平面的一部分被另一个平面遮住时,被遮住的线段可以画成虚线,也可以不画。这样,看起来立体感就强些[图1.1(2)、(3)]。

一个平面常用一个大写字母来表示,如平面 M [图 1.1(1)],或者用一个小写希腊字母来表示,如平面 α [图 1.1(2)],也可以用表示平面的平行四边形两个相对顶点的字母来表示,如平面 AC [图 1.1(3)]。它们分别记作 $\square_M$ 、 $\square_\alpha$ 、 $\square_{AC}$ 。

点、直线和平面的关系,可以用集合的符号来表示,例如:

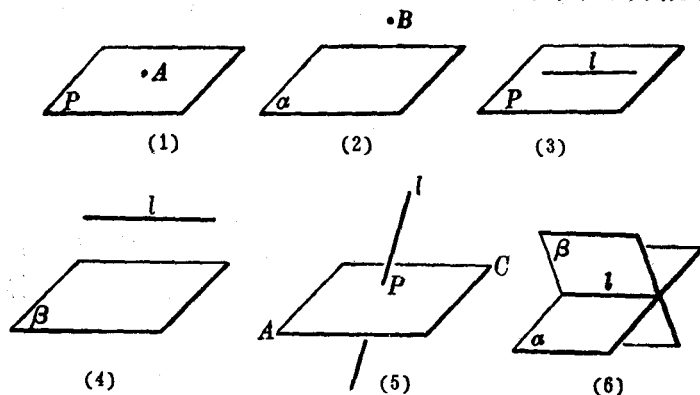


图 1.2

点 A 在平面 P 内, 记作 $A \in \square_P$ [图 1.2(1)];

点 B 在平面 α 外, 记作 $B \notin \square_\alpha$ [图 1.2(2)];

直线 l 在平面 P 内, 记作 $l \subset \square_P$ 或 $\square_P \supset l$ [图 1.2(3)],
也可记作 $l \cap \square_P = l$;

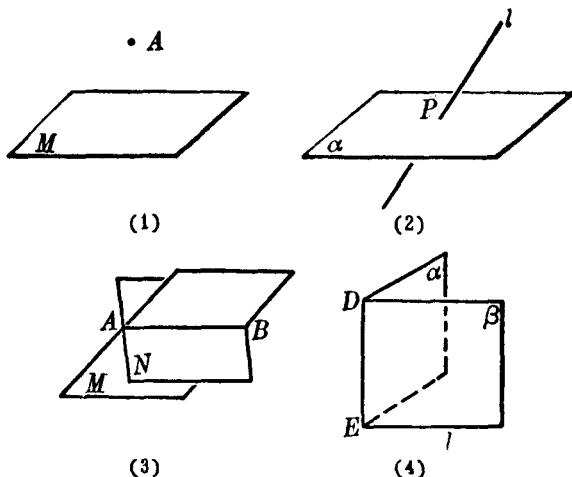
直线 l 与平面 β 没有交点, 记作 $l \cap \square_\beta = \phi$ [图 1.2(4)];

直线 l 与平面 AC 交于一点 P , 记作 $l \cap \square_{AO} = P$ [图 1.2(5)];

平面 α 与 β 相交于 l , 记作 $\square_\alpha \cap \square_\beta = l$ [图 1.2(6)].

练习 1.1

1. 什么叫做空间图形? 什么叫做平面图形?
2. 用集合符号表示图中点、直线、平面之间的关系。



(第2题)

3. 说出下列符号所表示的关系, 并画草图表示之:

(1) $A \in \square_\alpha$;

- (2) $C, D \in \square_M, CD \subset \square_M$;
 (3) $AB \subset \square_\beta, AC \cap \square_\beta = A$;
 (4) $l \cap \square_M = P, BC \cap \square_P = \phi$.

1.2 在平面内表示空间形体

空间的几何形体，一般都有长、宽和高，但我们用图来表示它们，通常画在平面上。那末怎样画才能使画出的图形有立体感呢？如图 1.3 所表示的火柴盒、圆罐、台子都没有立体感，而如果改画成图 1.4 所示的形状，就有立体感了，象这种图叫做直观图。

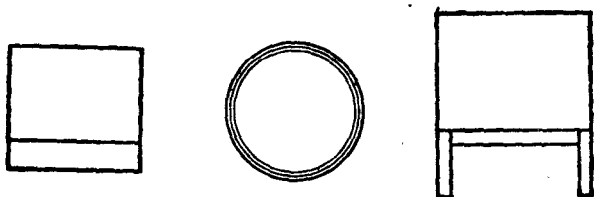


图 1.3

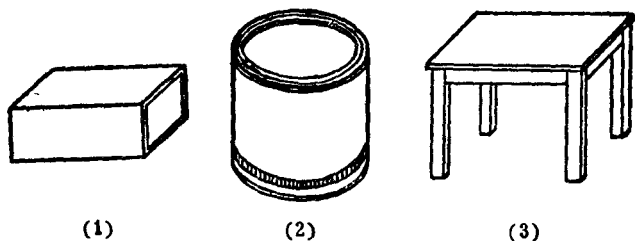


图 1.4

画直观图，首先要画出水平位置的平面图形。下面举例说明一种直观图的画法。

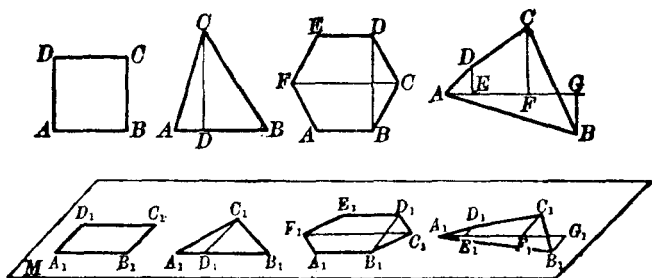


图 1.5

在水平放置的平面内画正方形、三角形、正六边形、任意多边形的方法如图 1.5 所示。

画上述直观图的一般规则是：

选择图形的水平方向线段(也可以根据图形位置作一条)；凡水平方向的线段仍画成水平方向，其长度不变；凡与水平方向线段垂直的线段画成与水平方向成 45° (或 135°) 的线段，其长度折半。

对于圆的直观图也可按上面画法进行，具体画法如图 1.6 所示。

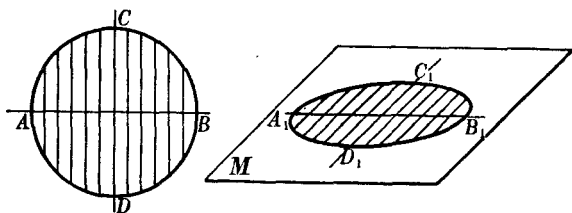


图 1.6

在掌握了水平放置的平面图形的画法后，我们就容易掌握空间形体直观图的画法。如画图 1.4(1) 所示的长方体的

直观图,只要在水平放置的平面图形的四个顶点作水平方向线段的垂线,并分别截取长为长方体的高的线段,得到四个端点,依次连结这些点,擦去不必要的线段(或字母),用实线表示可见轮廓线,用虚线表示被遮住的轮廓线,就得到长方体的直观图(图 1.7)。

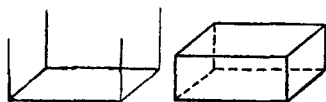
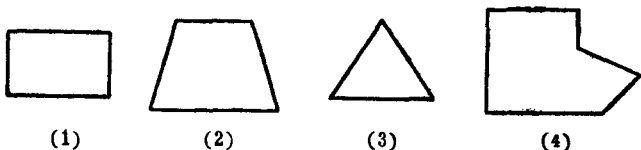


图 1.7

为了简明起见,在图中省略了它的底面所在的水平平面。

练习 1.2

1. 画出下列平面图形在水平位置时的直观图:



(第 1 题)

2. 画出半径为 2 cm 的圆在水平位置时的直观图。

3. 分别画出长、宽、高为 3 cm、4 cm、5 cm 的长方体的直观图和棱长为 4 cm 的正方体的直观图。

1.3 平面的基本性质

人们经过长期的实践,观察、分析、总结出平面的一些基本性质,我们把它们作为公理,作为进一步推理的基础。

公理 1 如果一条直线上的两点在一个平面内,那末这条直线上所有的点都在这个平面内。

这时我们说直线在平面内,或者说平面经过直线。例如,用一把直尺边缘上的任意两点放在平的桌面上,可以看到直

尺边缘紧贴在桌面上。

公理 2 如果两个平面有一个公共点，那末它们相交于经过这点的一条直线。

这时我们说这两个平面相交，这条直线叫做这两个平面的交线。

公理 3 经过不在同一直线上的三点，有且只有一个平面。

有时，公理 3 可以说成“不共线三点确定一个平面”，也就是过三点可以画并且只可以画一个平面。例如，平板仪的撑脚架做成三脚架形状，就是应用这一公理的例子(图 1.8)。

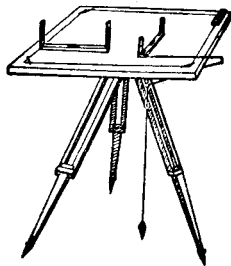


图 1.8

A, B, C 三点所确定的一个平面，可以记作 $\square_{ABO}$ 。

由平面的三条公理，可以得到确定一个平面的三条推论。

推论 1 经过一条直线和这条直线外的一点，有且只有一个平面。

推论 2 经过两条相交直线，有且只有一个平面。

推论 3 经过两条平行直线，有且只有一个平面。

现对推论 1 作如下证明，其余推论均由学生自己证明。

已知：直线 l 及点 $A \notin l$ 。

求证：经过 l 及点 A 有且只有一个平面。

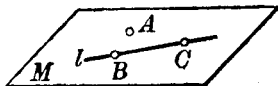


图 1.9

证明 在 l 上任取 B, C 两点(图 1.9)， $\because A \notin l$ ，

$\therefore A, B, C$ 不共线，经过 A, B, C 三点可以确定

一个平面, 设为 $\square_M$ (公理 3).

又 $\because B, C \in \square_M, \therefore l \subset \square_M$ (公理 1).

$\therefore$ 经过 l 和 A 可以有一个平面.

在 l 上任取另外两点 B', C' , $\because l \subset \square_M$,

$\therefore B', C' \in \square_M$,

经过不共线三点 A, B', C' 确定的一个平面和平面 M 重合.

所以经过 l 和点 A 有且只有一个平面.

例 证明两两相交且不共点的三条直线必在同一平面内.

已知: $AB \cap BC = B, AC \cap BC = C, AB \cap AC = A$ (图 1.10).

求证: AB, BC, AC 共面.

证明 $\because AB \cap AC = A$,

$\therefore$ 经过 AB, AC

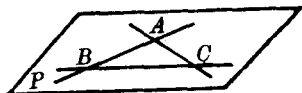


图 1.10

可以确定一个平面, 设为 $\square_P$ (平面公理推论 2).

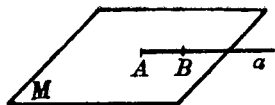
$\because B \in AB, C \in AC$,

$\therefore B, C \in \square_P, BC \subset \square_P$ (公理 1).

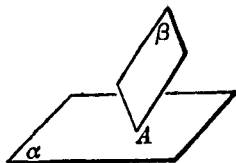
$\therefore AB, BC, AC$ 共面.

练习 1.3

1. 如图所示, (1) 直线 a 上有两点 A, B 在平面 M 内, 说直线 a 不全在平面 M 内; (2) 说平面 α 与平面 β 只有一个公共点 A , 这样说法对吗? 为什么?
2. 把一张纸折一下, 为什么折痕是直线?
3. 为什么独轮车要安上两只撑脚? 而有的自行车后轮旁只安装一只撑脚?



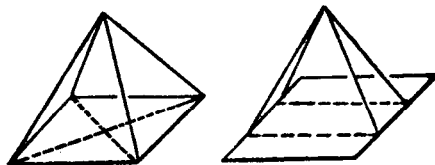
(1)



(2)

(第1题)

4. 三点确定一个平面的说法对吗?为什么?
5. 如图,在一块平板下面放交叉的两条绳子,或者平行的两条绳子就可以把平板提起来,为什么?



(第5题)

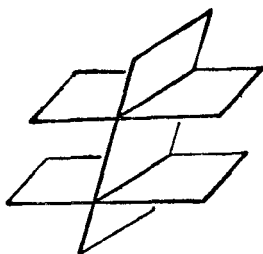
6. 一条直线能否确定一个平面?任意一点和一条直线呢?
7. 过一点的三条直线,能确定几个平面?
8. 画两个相交的平面以及交于同一直线的三个平面。

习 题 一*

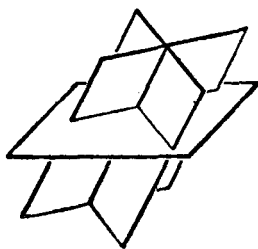
1. 平面有无界限? 通常把平面画成什么形状?
2. 根据下列符号所表示的关系画出图形:
 - (1) $l \subset \square_{\alpha}$;
 - (2) $B \notin \square_{\alpha}, B \in l$, 且 $l \cap \square_{\alpha} = A$;
 - (3) $AB \cap CD = M$, 且 $AB, CD \subset \square_{\alpha}$;
 - (4) $\square_{\alpha} \cap \square_{\beta} = l$.

* 横线以下的习题,供学有余力的学生选用.下同。

3. 先画出下图,再用虚线表示被平面遮住的线段,并用字母表示各平面。



(1)

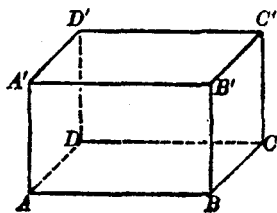


(2)

(第3题)

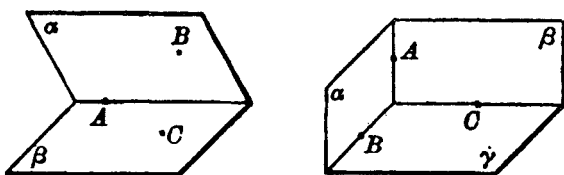
4. 画出下列平面图形在水平位置时的直观图:
- (1) 边长分别为 3 cm、4 cm、5 cm 的三角形;
 - (2) 边长为 2 cm 的正六边形;
 - (3) 相邻两边分别为 2 cm、3 cm, 夹角为 60° 的平行四边形;
 - (4) 半径为 3 cm 的圆的内接正五边形。
5. 画出底面半径为 2 cm, 高为 2 cm 的圆柱直观图。
6. 根据长方体的直观图, 分别画出下列符号所表示的关系的图形:

- (1) $\square_{A'D} \cap \square_{A'B} = A'A$;
 - (2) $\square_{A'O'} \cap \square_{B'C} = B'C'$;
 - (3) $\square_{A'O'} \cap \square_{A'B} = A'B'$;
 - (4) $\square_{D'O'} \cap \square_{AO} = DC$;
 - (5) $\square_{A'D} \cap \square_{D'O'} \cap \square_{DB} = D$;
 - (6) $\square_{A'D} \cap \square_{AO} = AD$,
- 且 $\square_{AO} \cap \square_{B'O'} = BC$.



(第6题)

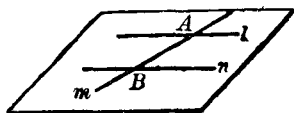
7. 两个不重合的平面，如果有两个公共点 A, B ，那末其他的公共点一定在直线 AB 上，为什么？
8. 画出过图中 A, B, C 三点的平面和其他平面的交线。



(第8题)

9. 一个点能否确定一个平面？两个点呢？怎样的三点才能确定一个平面？不在一个平面内的四点可确定几个平面？
10. 三角形是否一定是平面图形，为什么？
11. 一点和一条直线在怎样的位置时能确定一个平面？在怎样的位置时不能确定一个平面？
12. 求证：经过两条相交直线，有且只有一个平面。
13. 怎样用两条细绳来检查椅子四个脚底是否在同一个平面内，为什么？
14. 三条直线两两平行，但不在一个平面内，一共可确定几个平面？

15. 已知： $l \parallel n$, $l \cap m = A$,
 $m \cap n = B$.



求证： l, m, n 共面。

(第15题)

16. 四边形是否一定是平面图形，哪些四边形是平面图形，为什么？
17. 空间三条直线，如果其中一条直线和其他两条直线都相交，那末这三条直线能确定几个平面？

18. 一直线和这直线外不在同一直线上的三点，可以确定几个平面。
19. 证明两两相交(即每两条都相交)而不通过同一点的四条直线在同一平面内。

二 空间两条直线

1.4 空间两条直线的位置关系

我们知道，在同一平面内两条不重合的直线，不相交就平行，只有这两种情况，那末空间的两条直线有怎样的位置关系呢？

观察图 1.11，我们可以看到，墙面与天花板的交线 AB 和墙面与地板的交线 DF 平行；两墙面交线 AD 和墙面与地板交线 DE 相交；而天花板上的 AB 与

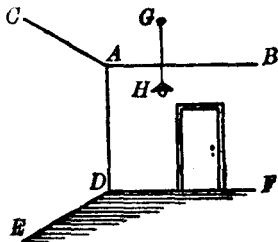


图 1.11

地板上的 DE 则既不相交又不平行，它们是不在同一个平面内的两条直线，这是在平面几何中没有遇到过的两直线的一种位置关系。

我们把这种不在同一平面内的两条直线叫做**异面直线**。

因此，空间的两条不重合的直线的位置关系有：

- | | |
|---------------------------|------------|
| (1) 相交直线——只有一个公共点， | } 在同一个平面内。 |
| (2) 平行直线——没有公共点， | |
| (3) 异面直线——没有公共点，不在同一个平面内。 | |

画异面直线时，为了显示出它们不在同一平面内的特点，要把两条直线画在不同的平面内，而且不相交也不平行（图 1.12）。