科學圖書大庫

抽象數學導論

譯者 陳建韓
陳慶輝
校閱 王昌銳

徐氏基金會出版

科學圖書大庫

抽象數學導論

譯者 陳建韓　　校閱 王昌銳
　　　陳慶輝

徐氏基金會出版

美國徐氏基金會科學圖書編譯委員會

科學圖書大庫

監修人　徐銘信　科學圖書編譯委員會主任委員
編輯人　曾迺碩　科學圖書編譯委員會編譯委員

中華民國五十九年七月二十四日初版

抽象數學導論

定價　新台幣三十元　港幣~~五元~~

[illegible] 1.60

譯者　陳建韓　輔仁大學理學士
　　　陳慶輝　國立台灣大學數學系理學士
校閱　王昌銳　台灣省立高雄工業專科學校教授

內政部內版臺業字第1347號登記證

出版者　財團法人臺北市徐氏基金會出版部　臺北郵政信箱第3261號　電話519784號
發行人　財團法人臺北市徐氏基金會出版部　林碧鏗　郵政劃撥帳戶第15795號
印刷者　大興圖書印製有限公司　三重市三和路四段151號　電話979739號

我們的一個目標

文明的進步，因素很多，而科學居其首。科學知識的傳播，是提高工業生產，改善生活環境的主動力，在整個社會長期發展上，乃人類對未來世代的投資。科學宗旨，固在充實人類生活的幸福也。

近三十年來，科學發展速率急增，其成就超越旣往之累積，昔之認爲絕難若幻想者，今多已成事實。際茲太空時代，人類一再親履月球，這偉大的綜合貢獻，出諸各種科學建樹與科學家精誠合作，誠令人有無限興奮！

時代日新又新，如何推動科學教育，有效造就人才，促進科學研究與發展，允爲社會、國家的急要責任，培養人才，起自中學階段，學生對普通科學，如生物、化學、物理、數學，漸作接觸，及至大專院校，便開始專科教育，均仰賴師資與圖書的啓發指導，不斷進行訓練。科學研究與教育的學者，志在將研究成果貢獻於世與啓導後學。旨趣崇高，立德立言，也是立功，至足欽佩。

科學本是互相啓發作用，富有國際合作性質，歷經長久的交互影響與演變，遂產生可喜的意外收穫。

我國國民中學一年級，便以英語作主科之一，然欲其直接閱讀外文圖書，而能深切瞭解，並非數年之間，所可苛求者。因此，從各種文字的科學圖書中，精選最新的基本或實用科學名著，譯成中文，依類順目，及時出版，分別充作大專課本、參考書，中學補充讀物，就業青年進修工具，合之則成宏大科學文庫，悉以精美形式，低廉價格，普遍供應，實深具積極意義。

本基金會爲促進科學發展，過去八年，曾資助大學理工科畢業學生，前往國外深造，贈送一部份學校科學儀器設備，同時選譯出版世界著名科學技術圖書，供給在校學生及社會大衆閱讀，今後當本初衷，繼續邁進，謹祈：

自由中國大專院校教授，研究機構專家、學者；

旅居海外從事教育與研究學人、留學生；

大專院校及研究機構退休教授、專家、學者：

主動地精選最新、最佳外文科學技術名著，從事翻譯，以便青年閱讀，或就多年研究成果，撰著成書，公之於世，助益學者。本基金會樂於運用基金，並藉優良出版系統，善任傳播科學種子之媒介。掬誠奉陳，願學人們，惠然贊助，共襄盛擧，是禱。

徐氏基金會敬啓

原　序

這本小書，是著者在暑假裡，對高等學校的數學教師們講習時隨手編輯而成的。其目的在增進教學者對於代數結構的瞭解，以及使他們經由正統研究各種不同的數學體系，進而洞悉一些抽象代數的基本結論。

將這些講演題材編成教科書，我們的主旨在於使它成爲有條理的推展，增強它的論述精確，以及做爲更具有時間價值的贈禮，如此，除了那些十分明顯的相似證明之外，則由完整與詳細的證明過程，保持本書的高度水準，讀者亦將發現本書的內容是十分具有獨立性的，而且份量也相當的夠，在第一章中討論到集合與函數，做爲紮實而後研習的根基，並介紹一些在本書中使用到的術語與符號，在每章的末尾並附了許多各種程度的習題，用來幫助讀者對這些章節做個通盤的複習。

著者希望本書所包含的材料能夠適合各種不同的教學境況，同時不但對主修數學的人士甚至於對任何預備研習這些題材的學生都有所幫助，事實上，本書的內容已可廣及於唸文史的人士閱讀了。

這本書當然十分適用於做爲近世代數的先修課程；同時對那些必須藉自修以精通這些材料的學生，亦是一本十分適切的參考書。

許多重要的論題儘量地將它們囊括在這本書裡，有些題材的選擇是十分必要的，然而在本書末尾與近世代數相連繫的部分，可隨我們之所好，而將它予以凝縮或刪減，雖然刪減了一些，然而仍可幫助讀者建立出廣濶的基礎來。

目　　錄

第一章

緒論

1－1　集合的代數

在這一章裡我們將建立一些在本書中使用到的符號與術語，同時，也對集合的代數及函數做個扼要的介紹，因此本章裡的題材主要是為了建立一些基礎而編纂的，讀者若已熟知了這些符號與術語，不妨從第二章開始看起。

“集合”(set)這名詞可直覺地將它看做是由具有某些共同特性的物件所聚集而成的一個集體，組成這集體的每一個物件稱為它的元素(element)，通常集合都以英文大寫字母表示，而元素則以英文小寫字母來表示，下列的一些符號表示某些特定的集合：Z 為整數所構成的集合，Q 為有理數所構成的集合，$R^{\#}$ 為實數所構成的集合，同時，Z_+，Q_+ 與 $R^{\#}_+$ 這些符號特別用來表示這些集合中正元素所構成的集合。

假若 x 為集合 A 中的一個元素，則在習慣上以 $x \in A$ 的符號來表示，符號“$\in$”讀做“屬於”，若當 x 不為集合 A 中的元素時，則記做 $x \notin A$。

有兩種方法可用來表示某一特定的集合，其一為將集合中的所有元素均列出來，而以一大括弧將它們籠括在內，例如集合 $\{-1, 0, 1, 2\}$，或當我們能夠尋覓出集合的特性來，而由此可決定出一個物件是否屬於此一集合時，則可僅僅列出其中的一些元素來，而在這些元素之後以三個點來表示某些元素被省略的事實，例如集合 $\{1, 2, 3, 4, \cdots\}$，另一為若 $P(x)$ 表示有關 x 的一種命題，則對於所有的元素使得 $P(x)$ 為真的集合記做

$$\{x \mid P(x)\}$$

例如集合 $\{x \mid x$ 為大於 21 的奇數$\}$，顯然地，某一特定的集合可以兩種不同的方法來表示：

$$\{0, 1\} = \{x \mid x \in Z \text{ 且 } x^2 = x\}$$

雖然在符號上略有不同，然而在習慣上也有以 $\{x \in A \mid P(x)\}$ 來替代

$\{x \mid x \in A$及$P(x)\}$的。

定義 **1-1**. 集合A與集合B稱爲相等，記做$A=B$,若且唯若集合A中的任何元素均爲集合B中的元素，且集合B中的任何元素亦爲集合A中的元素，即若集合A與集合B具有相同的元素時，則$A=B$。

因此集合是依其元素而定的，舉個例子說，

$$\{1,2,3\}=\{3,1,2,2\},$$

因爲上列的每一個集合均僅包含整數1, 2, 與3 。故這兩個集合是相等的，事實上，列於集合中的元素其次序是無關緊要的，而且，元素的重複出現並不表示集合中另外再添加元素。

不包含任何元素的集合稱爲空集合（empty set 或null set),以符號ϕ表示，例如

$$\phi=\{x \in R^{\#} \mid x^2<0\} \quad \text{或} \quad \phi=\{x \mid x \neq x\}$$

任何兩個空集合均相等，在通俗感覺上知其包含著相同的元素（無元素），實際上，僅僅存在著有唯一的空集合，因此，我們可以毫無顧忌地談及“空集合ϕ”

若集合僅僅包含一個元素x，則稱其爲單元集x（singleton x），記做$\{x\}$：

$$\{x\}=\{y \mid y=x\}$$

注意，$\{0\} \neq \phi$,因爲ϕ不包含任何元素，而$\{0\}$包含著有一個元素0。

定義 **1-2**. 若集合A中的任何元素均爲集合B中的元素，則稱集合A爲集合B的子集合（subet)，或稱集合A包含於集合B，記做$A\subseteq B$ “$A\subseteq B$”這種符號表示含有$A=B$的可能性在內，當$A\subseteq B$而$A\neq B$

時，我們記做$A\subset B$，而稱集合A爲集合B 的眞子集合（proper subset)

將所有被討論的集合均視爲某主集合U的子集合，如此一來，便方便多了，而稱此主集合爲全集合（universe)，在不同的論題裡全集合可以不相同，通常在任何討論的論題中，均以固定的一個主集合當做全集合。

由上述一些有關集合的定義，便能輕易地導出下列的結果來。

定理 **1-1**. 若A, B, 與C均爲某全集合U的子集合，則：

(a) $A\subseteq A$, $\phi\subseteq A$, $A\subseteq U$.

(b) $A\subseteq \phi$ 若且唯若 $A=\phi$.

(c) $\{x\} \subseteq A$ 若且唯若 $x \in A$，即 A 中的任何一個元素可決定出 A 的一個子集合。

(d)若 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq C$，則 $A \subseteq C$

(e) $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$ 若且唯若 $A = B$

若一命題其假設不眞，則不論其所推論出的結果爲何，就此命題而言均爲眞確，$\phi \subseteq A$ 的證明便得自這種邏輯原理上，在命題"若 $x \in \phi$ 則 $x \in A$"中，因 $x \in \phi$ 恒不爲眞，故此命題爲眞確。

定理 1-1 中的最後一項表示欲證明兩個集合 A 與 B 的相等，一般均分成兩個部分，一個部分證明若 $x \in A$，則 $x \in B$，另外的一個部分證明若 $x \in B$，則 $x \in A$，有關這類證明方法的例題在以後會出現。

我們現在討論集合相互間組合的一些重要規則，若 A 與 B 均爲某全集合 U 的子集合，則聯集（union），交集（intersection），與差集（difference），的定義如下：

定義 1-3. 集合 A 與集合 B 的聯集爲全集合 U 的子集合，記做 $A \cup B$，定義爲

$$A \cup B = \{ x \mid x \in A \text{或} x \in B \}$$

集合 A 與 B 的交集，爲全集合 U 的子集合， 記做 $A \cap B$，定義爲

$$A \cap B = \{ x \mid x \in A \text{及} x \in B \}$$

集合 A 與 B 的差集［有時稱爲 B 在 A 中的相對餘集合（relative complement of B in A）］爲全集合 U 的子集合，記做 $A - B$，定義爲

$$A - B = \{ x \mid x \in A \text{，但} x \notin B \}$$

在聯集的定義中，這"或"字所代表的意義包含"及"的意味在內，因此"$x \in A$ 或 $x \in B$"此一命題，包含了 x 同時屬於 A 及屬於 B 的情況在內。

這特殊的差集 $U - B$ 稱爲 B 的（絕對）餘集，可簡記做 $-B$，若 A 與 B 爲兩個非空集合，而它們的交集爲空集合，即 $A \cap B = \phi$，則它們稱爲不相交（disjoint），我們舉一個例題來解說這些觀念，

例題 1-1. 設全集合 $U = \{0,1,2,3,4,5,6\}$，$A = \{1,2,4\}$，且 $B = \{2,3,5\}$，則 $A \cup B = \{1,2,3,4,5\}$，$A \cap B = \{2\}$，$A - B = \{1,4\}$，且 $B - A = \{3,5\}$，$-A = \{0,3,5,6\}$，$-B = \{0,1,4,6\}$，注意 $A - B$ 與 $B - A$ 並不相等，而且彼

此不相交

在下列的定理中，列出一些由聯集，交集與餘集等的定義所推展出來的簡單結果，

定理 1-2. 若集合 A, B 與 C 為其全集合 U 的子集合，則：

(a) $A\cup A=A$, $A\cap A=A$;
(b) $A\cup B=B\cup A$, $A\cap B=B\cap A$;
(c) $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$,
$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$;
(d) $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$,
$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$;
(e) $A\cup\phi=A$, $A\cap\phi=\phi$;
(f) $A\cup U=U$, $A\cap U=A$;
(g) $A\cup(-A)=U$, $A\cap(-A)=\phi$,

我們首先要證明等式 (d)，因為它的證明方法為定理 1-1 (e) 證法技巧的範例，假設 $x\in A\cup(B\cap C)$，則 $x\in A$ 或 $x\in B\cap C$，若 $x\in A$，則明顯易知 $x\in A\cup B$，且 $x\in A\cup C$，故 $x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$，在另一方面若 $x\in B\cap C$，則 $x\in B$，由此得 $x\in A\cup B$，且 $x\in C$，由此得 $x\in A\cup C$，由這兩個關係可得

$$x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$$

如此便導出下列的結果

$$A\cup(B\cap C)\subseteq(A\cup B)\cap(A\cup C)$$

反過來說，假設 $x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$，則 $x\in A\cup B$，且 $x\in A\cup C$，因 $x\in A\cup B$，則 $x\in A$ 或 $x\in B$，同時，因 $x\in A\cup C$，則 $x\in A$ 或 $x\in C$，將這些關係整理則得 $x\in A$ 或 $x\in B\cap C$，即 $x\in A\cup(B\cap C)$，這便證明出下列的關係了。

$$(A\cup B)\cap(A\cup C)\subseteq A\cup(B\cap C)$$

由定理 1-1 (e) 得知這兩種內容足以導出相等的關係

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$$

下面這個定理討論集合論中應用在餘集裡的一些運算性質，

定理 **1-3.** 假設集合A與B均爲全集合U的子集合，則

(a) $-(A\cup B)=(-A)\cap(-B)$
(b) $-(A\cap B)=(-A)\cup(-B)$
(c) 若$A\subseteq B$，則$(-B)\subseteq(-A)$
(d) $-(-A)=A$，$-\phi=U$，$-U=\phi$

上述定理中的前二個部分，即爲衆所周知的笛摩根（De Morgan）定理，

集合論的最後一項討論，一半是由於我們的期望，一半也由於它存在的可能性，我們將由兩個集合之間所定義出來的聯集與交集加以推廣，而定義出任意個數的集合之間的聯集與交集來，假設a爲全集合U中的一組非空子集合所構成的族集（Collection），則這任意族集的聯集與交集定義如下：

$$\cup a=\{x\mid x\in A\text{ 對某些集合 }A\in a\}$$
$$\cap a=\{x\mid x\in A\text{ 對每一個集合 }A\in a\},$$

舉個例子來說，若$I_n=\{x\in R^{\#}\mid -1/n\leq x\leq 1/n\}$，$n=1,2,\cdots\cdots$，且$a$爲所有的$I_n$所構成的族集，則

$$\cup a=\{x\in R^{\#}\mid -1\leq x\leq 1\},\quad \cap a=\{0\}$$

習 題

在下列各習題中，集合A,B與C均爲某全集合U的子集合：

1. 試證$A\cap B\subseteq A\cup B$
2. 設$A\subseteq B$，試證
   (a) $A\cap C\subseteq B\cap C$，　　(b) $A\cup C\subseteq B\cup C$，
3. 試證$A-B=A\cap(-B)$，並利用此項結果證明下列各等式
   (a) $A-\phi=A$，$\phi-A=\phi$，$A-A=\phi$

(b) $A-B=A-(A\cap B)=(A\cup B)-B$
(c) $(A-B)\cap(B-A)=\phi$

4. 將下列各式化簡成以 $A,B,A\cup B,A\cap B,A-B$ 等符號中之一來表示，

(a) $A\cap(A\cup B)$，　(b) $A-(A-B)$，　(c) $-[(A\cap B)\cup(-A)]$

5. 試證 $A\cap(B\cup C)=(A\cap B')\cup(A\cap C)$

6. 試證下列各等式

(a) $(A-B)-C=A-(B\cup C)$
(b) $A-(B-C)=(A-B)\cup(A\cap C)$
(c) $A\cup(B-C)=(A\cup B)-(C-A)$
(d) $A\cap(B-C)=(A\cap B)-(A\cap C)$

7. 集合包含的符號可以聯集或交集來表示，明白了這點，試證下列二式：

(a) $A\subseteq B$ 若且唯若 $A\cup B=B$
(b) $A\subseteq B$ 若且唯若 $A\cap B=A$

1－2 函　　數

由集合相等的定義得知 $\{a,b\}=\{b,a\}$，因爲這兩個集合包含著兩個相同的元素 a 與 b，由於元素在集合中的前後次序並不重要，故當我們對這些元素的次序加以區分時，稱它爲有序元素對（ordered pair 或簡稱爲序對），例如將元素 a 置於前，我們寫做 (a,b)。

給有序元素對的符號，下個純集合論的定義，這是一件可能的事。

定義 1-4. 由元素 a 與 b 所構成的有序成對元素，記做 (a,b)，其中 a 爲第一分量（component），b 爲第二分量，定義爲

$$(a,b)=\{\{a,b\},\{a\}\}$$

注意，依此定義，a 與 b 並非 (a,b) 的元素，僅爲其分量而已，事實上，集合 (a,b) 的元素爲 $\{a,b\}$ 與 $\{a\}$ 其中 $\{a,b\}$ 非爲有序元素對，即任何一個元素被選擇置放在前都無關緊要，明白了這層道理，我們便知道在有序元素對中的兩個元素，其位置得依一定的次序置放，並不能隨意加以更

換。

若 $a \neq b$，則集合 $\{\{a,b\},\{a\}\}$ 與集合 $\{\{b,a\},\{b\}\}$ 並不相等，由於它們有不同的元素，因而 $(a,b) \neq (b,a)$，因此，若 a 與 b 相異，則有兩個不同的有序元素對存在，它們的分量是 a 與 b，即 (a,b) 與 (b,a)，因此，分量相同的有序元素對，若僅知其中之一，便可推論出另一個來，我們仍需再强調一下，包含兩個元素 a 與 b 的集合僅有一個，因 $\{a,b\}=\{b,a\}$ 的緣故，由定義 1-4 便可推論出

$$(a,b)=(c,d) \text{ 若且唯若 } a=c,\ b=d$$

定義 1-5. 兩個非空集合 A 與 B 的卡迪遜乘積（Cartesian Product 有時亦稱做笛卡兒乘積）仍爲一個集合，記做 $A \times B$，定義爲

$$A \times B=\{(a,b) \mid a \in A \text{、及 } b \in B\}$$

當我們使用卡迪遜乘積的符號時，要注意其所包含的兩個集合必爲非空集合，有時，甚至於並沒加以明文的規定，我們亦當曉得這點，若集合 A 包含 n 個元素，且集合 B 包含 m 個元素，則集合 $A \times B$ 包含有 nm 個元素，此數得自卡迪遜乘積中的“乘積”

例題1-2. 設　$A=\{-1,0,1\}$ 且 $B=\{0,2\}$，　則

$$A \times B=\{(-1,0),(-1,2),(0,0),(0,2),(1,0),(1,2)\}$$

$$\text{及}\quad B \times A=\{(0,-1),(0,0),(0,1),(2,-1),(2,0),(2,1)\}$$

明顯地 $A \times B \neq B \times A$，一般地說，$A \times B = B \times A$ 若且唯若 $A=B$。

我們爲了避免在傳統上以對應法則的概念來界說函數，今改以有序元素對來定義它。

定義 1-6. 函數 f（Function 或 mapping（寫像））爲有序元素對所構成的集合，其不同的兩個序對不含有相同的第一分量，亦即，若 $(x,y_1) \in f$，且 $(x,y_2) \in f$，則必 $y_1=y_2$

由函數 f 的第一分量所組成的族集，稱爲此函數的定義域（domain），記做 D_f，由第二分量所組成的族集稱爲此函數的值域（range），記做 R_f，以集合的符號表示如下：

$$D_f = \{ x \mid (x, y) \in f \text{，對於某} y \}$$
$$R_f = \{ y \mid (x, y) \in f \text{，對於某} x \}$$

若 f 爲一函數，且 $(x, y) \in f$，則 y 稱爲 f 在 x 的函數值（functional value），或映像（image），記做 $f(x)$，即符號 $f(x)$ 所代表的意義爲當 x 係第一分量時，f 有序元素對中有唯一的第二分量。

例題 1-3. 若函數 f 爲由有限個有序元素對所構成的集合，

$$f = \{(-1, 0), (0, 0), (1, 2), (2, 1)\}$$

則 $D_f = \{-1, 0, 1, 2\}$ $R_f = \{0, 1, 2\}$

且 $f(-1) = 0$ $f(0) = 0$ $f(1) = 2$ 與 $f(2) = 1$

通常我們以一套公式來說明函數的有序元素對，例如，$f = \{(x, x^2+2) \mid x \in R^{\#}\}$，應用函數值的符號，可寫做

$$f(x) = x^2 + 2, \quad x \in R^{\#}$$

定義 1-7. 若 $f \subseteq X \times Y$，即 $D_f \subseteq X$ 且 $R_f \subseteq Y$，則 f 爲由 X 映至（into）Y 的函數，特別當 $D_f = X$ 時，我們使用如下的符號：

$$f : X \to Y$$

當 f 爲由 X 映至 Y 的函數，且 $R_f = Y$ 時，則稱 f 映成（onto）Y，或稱 f 爲映成函數（onto function），亦即 f 映成 Y 若且唯若對於每一個 $y \in Y$，必存在有某 $x \in D_f$，滿足 $(x, y) \in f$，且 $y = f(x)$

因爲函數爲集合的一種，我們便得一個現成的函數相等定義：兩個函數 f 與 g 稱爲相等，若且唯若它們具有相同的元素，如上所述，$f = g$ 若且唯若對於每一個在它們共同定義域中的元素 x，$D_f = D_g$，且 $f(x) = g(x)$

假設 f 與 g 爲兩個特定的函數，則函數 $f+g$，$f-g$，$f \cdot g$，f/g 便由這兩個函數共同的定義域裡的每一個點所定義出來，

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) \qquad \text{此處 } x \in D_f \cap D_g$$
$$(f \cdot g)(x) = f(x)\, g(x)$$

$$(f/g)(x)=f(x)/g(x)$$

此處　$x\in(D_f\cap D_g)-\{x\in D_g\mid g(x)=0\}$.

我們稱 $f+g$ ，$f-g$ ，$f\cdot g$ 與 f/g 爲函數 f 與 g 相互間的和，差，積與商，十分明顯地，僅當加法，減法，乘法，除法在 R_f 與 R_g 中能夠成立時，上述函數之定義方有意義。

例題 1-4. 假設 $f=\{(x,\sqrt{4-x^2})\mid -2\leq x\leq 2\}$ 與 $g=\{(x,2/x)\mid R^{\#}-\{0\}\}$ ，則 $f(x)=\sqrt{4-x^2}$)，$g(x)=2/x$ ，則對於 $x\in D_f\cap D_g=D_f-\{0\}$

$$(f+g)(x)=\sqrt{4-x^2}+\frac{2}{x}$$

$$(f-g)(x)=\sqrt{4-x^2}-\frac{2}{x}$$

$$(f\cdot g)(x)=(\sqrt{4-x^2})(\frac{2}{x})$$

$$(f\quad g)(x)=\frac{\sqrt{4-x^2}}{2/x}=\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2}$$

定義 1-8. 兩個函數 f 與 g 之合成（composition）仍爲一函數，記做 $f\circ g$ ，定義爲

$$f\circ g=\{(x,y)\mid \text{對於某}\ z,(x,z)\in g\ ,\text{及}(z,y)\in f\}$$

若以函數值的符號來表示，則可寫成

$(f\circ g)(x)=f(g(x))$ 此處 $x\in D_g$ 且 $g(x)\in D_f$

在最後的等式裡，說明了在符號 $f\circ g$ 中的次序，g 緊寫在 x 的鄰旁，因爲首先得函數值 $g(x)$，由定義我們可以十分明顯地看出，祇要 $R_g\cap D_f\neq\phi$ ，則 $f\circ g$ 便有意義，同時，$D_{f\circ g}\subseteq D_g$ ，且 $R_{f\circ g}\subseteq R_f$

例題 1-5. 設

$$f = \{(x, \sqrt{x}) \mid x \in R^{\#}, x \geqq 0\}$$

且

$$g = \{(x, 2x+3) \mid x \in R^{\#}\},$$

則 $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = 2x+3$， 且，

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x+3) = \sqrt{2x+3},$$

此處 $D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in R^{\#} \mid 2x+3 \in D_f\}$
$= \{x \mid 2x+3 \geqq 0\}$.

在另一方面

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = 2\sqrt{x}+3,$$

此處 $D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \geqq 0 \mid \sqrt{x} \in R^{\#}\}$
$= \{x \mid x \geqq 0\}$.

由上面的例題，我們可以看出$f \circ g$ 與 $g \circ f$ 不同，事實上$f \circ g = g \circ f$ 發生的機會並不多，但並非全無此種可能性存在。

下述的定理是討論一些有關合成函數運算的基本性質，它的證明當做應用本節中定義的習題。

定理 1-4. 若函數f，g 與 h 對於下列的一些運算皆合於定義，則

(1) $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$

(2) $(f+g) \circ h = (f \circ h) + (g \circ h)$

(3) $(f \cdot g) \circ h = (f \circ h) \cdot (g \circ h)$

證明：在此我們僅證明(3)，其餘部分的證明法與此十分類似，留給讀者當做習題，首先我們討論

$$\begin{aligned} D_{(f \cdot g) \circ h} &= \{x \in D_h \mid h(x) \in D_{f \cdot g}\} \\ &= \{x \in D_h \mid h(x) \in D_f \cap D_g\} \\ &= \{x \in D_h \mid h(x) \in D_f\} \cap \{x \in D_h \mid h(x) \in D_g\} \\ &= D_{f \circ h} \cap D_{g \circ h} = D_{(f \circ h) \cdot (g \circ h)} \end{aligned}$$

如今，對於 $x\in D_{(f\cdot g)\circ h}$，便可得，

$$\begin{aligned}[(f\cdot g)\circ h](x)&=(f\cdot g)(h(x))\\&=f(h(x))\cdot g(h(x))\\&=(f\circ h)(x)\cdot(g\circ h)(x)\\&=[(f\circ h)\cdot(g\circ h)](x)\end{aligned}$$

依函數相等之定義，得證

$$(f\cdot g)\circ h=(f\circ h)\cdot(g\circ h)$$

定義 1-9. 函數 f 稱做一對一（one to one）若且唯若當 $x_1,x_2\in D$，且 $x_1\neq x_2$，則 $f(x_1)\neq f(x_2)$，即在定義域中不同的元素，其函數值則亦不同，

為了證明函數的一對一，通常都以使用定義 1-9 的對偶性來證明比較方便些。即

$$若 f(x_1)=f(x_2),\quad 則\quad x_1=x_2$$

以有序元素對的觀點來討論，則函數 f 為一對一若且唯若沒有任何兩個不相同的函數其有序元素對具有相同的第二分量，若將此函數 f 序對的分量互換，而所得的有序元素對的族集亦為一函數，這項結論顯現出一對一函數的一種十分重要的性質，（譯者註：一對一且映成的函數存在有反函數）

一對一函數 f 的反函數（inverse）為有序元素對所構成的集合，記做 f^{-1}，定義為，

$$f^{-1}=\{(y,x)\mid(x,y)\in f\},$$

函數 f^{-1} 具有如下之性質，

$$(f^{-1}\circ f)(x)=x,\qquad x\in D_f$$
$$(f\circ f^{-1})(y)=y,\qquad y\in D_{f^{-1}}=R_f$$

因此，f^{-1} 可視為合成函數中 f 的反元素。

例題 1-6. 函數 $f=\{(x,3x-2)\mid x\in R^{\#}\}$ 為一對一函數，因由 $3x_1-2$