

靜力学浅说

(增訂本)

周衍柏編著

江苏人民出版社

静力学浅说

(增订本)

周衍柏编著

*

江苏合众刊出版业许可證出○○一號

江苏人民出版社出版

南京湖南路十一号

新华书店江苏分店发行 江苏新华印刷厂印刷

* * *

开本 787×1092 1/32 印张 3 3/8 字数 66,000

一九五七年三月第一版

一九五七年三月南京第二次印刷

印数 3,151—7,550

统一书号： 13100·8

定 价：(8)三角二分

前 言

第一个五年計劃即將提前超額完成，全国人民都以欢欣鼓舞的心情和积极的劳动来促使祖国社会主义工业化早日实现。工业建設是最近几个五年計劃的重点，参加工业建設的工人同志們，热情更加高漲，責任也更重大。

大家都知道，現代大規模的工业生产，必須掌握科学理論，才能胜任愉快，工人同志在生产实践的过程中，对此了解得尤为深刻，因此迫切需要学习科学。科学工作者，有責任負担起这一方面的任务，即組織一定力量，編写一系列由淺入深，并与生产实践相結合的科学理論書籍，供工人同志們学习和参考之用。

力学和工业生产有密切的关系。一切建筑物和机器的設計与制造，都需遵守力学上的規律，而学习电工、热机等类理論，也要先具备一定的力学知識。靜力学是力学的一个分支，而且也是其他力学分支的基础，不但鉄道、公路、桥梁、房屋等的修建要符合靜力学的原理，就是学习动力学、材料力学和流体力学等，也得先通曉靜力学才行。由此可知，靜力学在工程上的作用是很大的。

本書主要是为技术工人編写的，內容力求淺近，說理力求透彻，并尽量和生产实践相結合。为了使讀者能了解各項原

理和公式的运用，差不多每節都附有例題。凡有高中程度的讀者，採用本書自修，想無多大困難。又本書祇供初學之用，所以理論較深的部分（如空間力系）都未列入。讀者如果把本書搞通，並作完一定數量的習題，進一步閱讀較高級的力學書籍，就不致感到脫節。惟編者學識淺薄，生產經驗尤為缺乏，本書缺點自所難免。希望讀者對本書提出意見，以便在再版時修訂。祇要此書能對工人同志們的科學理論學習，有些微的幫助，就是編者的極大欣慰了。

周衍柏 一九五五年十一月

目 录

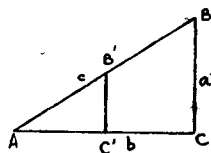
第一章 基本数学知识.....	(1)
1. 三角函数.....	(1)
2. 三角函数表.....	(4)
3. 大于 90° 角的三角函数.....	(7)
4. 正弦和余弦定律.....	(9)
5. 联立方程式.....	(11)
第二章 共点力的合成和平衡.....	(16)
6. 静力学的内容.....	(16)
7. 力.....	(17)
8. 两个共点力的合成.....	(19)
9. 多个共点力的合成.....	(27)
10. 力的分解.....	(31)
11. 用分解法求多个共点力的合力.....	(33)
12. 共点力的平衡.....	(36)
13. 静摩擦.....	(44)
第三章 平行力的合成与平衡.....	(52)
14. 力矩.....	(52)
15. 两个平行力的合成.....	(55)
16. 多个平行力的合成.....	(62)
17. 力偶.....	(64)
18. 平行力的平衡.....	(66)
19. 物体的重心.....	(72)
第四章 共面力的合成与平衡.....	(78)
20. 共面力的合成.....	(78)
21. 共面力的平衡.....	(84)
22. 桁架.....	(90)
附 练习題答案.....	(160)

第一章 基本數學知識

1. 三角函數

在解算靜力學問題的時候，常常要用到一些簡單的數學，現在先在這裏集中地說明一下。

假設有一個直角三角形 ABC (圖 1)， $\angle ACB$ 是直角 (等於 90°)，其餘的兩個角 ($\angle BAC$ 和 $\angle ABC$) 都是銳角 (小於 90°)。為簡單起見，我們以後就叫 $\angle ACB$ 為 C 角， $\angle BAC$ 為 A 角， $\angle ABC$ 為 B 角。



如果令 A 角所對的邊長為 a ， B 角所對的邊長為 b ， C 角所對的邊長為 c ，那末可以看出： $a = BC$ ，是 A 角的對邊，我們就叫它為三角形 ABC 的對邊； $b = AC$ ，是三角形 ABC 的底邊； $c = AB$ ，則是直角三角形 ABC 的斜邊。祇要 A 角有了一定的數值，譬如說是 30° ，那末直角三角形 ABC 的三隻角，就都固定了，因為角 C 總等於 90° ，角 B 和角 A 相加也等於 90° 。不但如此，祇要 A 角有了確定的數值，直角三角形三邊中任何兩邊之比，也就都有了確定的數值。這時它們成比例地增減，要大，大家一齊大，要小，大家一齊小。譬如在圖 1 中，如果

$AB = 2AB'$, 那末必有 $AC = 2AC'$, $BC = 2B'C'$, 即:

$$\frac{BC}{AB} = \frac{B'C'}{AB'} \quad \frac{AC}{AB} = \frac{AC'}{AB'} \quad \frac{BC}{AC} = \frac{B'C'}{AC'}$$

根据上面的说明, 知直角三角形任何两边之比, 与直角三角形本身的大小無關, 祇随 A 角的大小而变。因此称它們为 A 角的“函数”, 即随 A 角变化的意思。

因为三边之間, 兩兩相比, 一共有六个, 即:

$$\frac{a}{c} \quad \frac{b}{c} \quad \frac{a}{b} \quad \frac{b}{a} \quad \frac{c}{b} \quad \frac{c}{a}$$

所以我們通常給每个比值一个專名, 以資識別, 这样就組成了所謂“三角函数”。它們的名称和符号是这样的:

$\frac{a}{c}$ 叫做 A 角的正弦, 以 $\sin A$ 表之, 即:

$$\sin A = \frac{a}{c} = \frac{\text{对边}}{\text{斜边}}$$

$\frac{b}{c}$ 叫做 A 角的餘弦, 以 $\cos A$ 表之, 即:

$$\cos A = \frac{b}{c} = \frac{\text{底边}}{\text{斜边}}$$

$\frac{a}{b}$ 叫做 A 角的正切, 以 $\tan A$ 表之, 即:

$$\tan A = \frac{a}{b} = \frac{\text{对边}}{\text{底边}}$$

$\frac{b}{a}$ 叫做 A 角的餘切, 以 $\cot A$ 表之, 即:

$$\cot A = \frac{b}{a} = \frac{\text{底边}}{\text{对边}}$$

$\frac{c}{b}$ 叫做 A 角的正割, 以 $\sec A$ 表之, 即:

$$\sec A = \frac{c}{b} = \frac{\text{斜边}}{\text{底边}}$$

$\frac{c}{a}$ 叫做 A 角的餘割，以 $\csc A$ 表之，即：

$$\csc A = \frac{c}{a} = \frac{\text{斜边}}{\text{对边}}$$

六个三角函数，是由直角三角形的三个边兩兩相比而組成的，所以它們彼此之間，不是各不相干，而是有一定的關係聯繫着。讓我們來看：

$$\sin A = \frac{a}{c} \quad \csc A = \frac{c}{a}$$

如果

$$\sin A = \frac{1}{2}$$

那末

$$\csc A = \frac{2}{1}$$

故 $\sin A$ 和 $\csc A$ 是互为倒數的，即：

$$\sin A = \frac{1}{\csc A} \quad \csc A = \frac{1}{\sin A}$$

同理，因

$$\cos A = \frac{b}{c} \quad \sec A = \frac{c}{b}$$

所以 $\cos A$ 和 $\sec A$ 也是互为倒數的，即：

$$\cos A = \frac{1}{\sec A} \quad \sec A = \frac{1}{\cos A}$$

同理，因

$$\tan A = \frac{a}{b} \quad \cot A = \frac{b}{a}$$

所以

$$\tan A = \frac{1}{\cot A} \quad \cot A = \frac{1}{\tan A}$$

又

$$\sin A = \frac{a}{c} \quad \cos A = \frac{b}{c} \quad \tan A = \frac{a}{b}$$

如果把 $\tan A = \frac{a}{b}$ 一式右側的分子分母同用 c 除一下（它的數值不變），則得：

$$\tan A = \frac{a}{b} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{\sin A}{\cos A}$$

同理 $\cot A = \frac{\cos A}{\sin A}$

根据幾何学的定理，知直角三角形对边的平方加上底边的平方等於斜边的平方，即：

$$a^2 + b^2 = c^2$$

若用 c^2 除一下等式各項，則得：

$$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1$$

即 $\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$

即 $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$

因为有这么關係，所以六个三角函數中，祇正弦、餘弦和正切比較重要，特別是正弦和餘弦用的時候最多，因为正切也可用正弦和餘弦之比表出。上面所列举的那些關係，虽然都屬於三角学的範圍，但在我們解算靜力学問題的時候，常常要碰到、用到，希望讀者能好好地記住它們。

2. 三角函數表

上節我們已經提到，祇要 A 角確定，直角三角形三个边中任何兩边之比，也都被確定，即六个三角函數的值都被確定。譬如 A 角等於 0° ，那末 a 边必等於零，此時圖 1 中的 AB 和 AC 兩边重合到一塊， BC 縮減得沒有了。故当 $\angle A = 0^\circ$ 時， $a = 0$ ，而 $b = c$ 。因此知：

$$\sin 0^\circ = \frac{a}{c} = \frac{0}{c} = 0$$

$$\cos 0^\circ = \frac{b}{c} = \frac{b}{b} = 1$$

$$\tan 0^\circ = \frac{a}{b} = \frac{0}{b} = 0$$

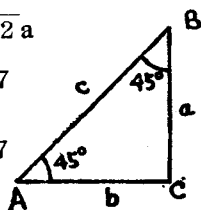
又如A角等於 45° ，那末B角必定也等於 45° ，因為 $\angle A + \angle B = 90^\circ$ ，於是直角三角形ABC是一個等腰三角形(圖2)，因而 $a = b$ 。

因 $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2}a$

故 $\sin 45^\circ = \frac{a}{c} = \frac{a}{\sqrt{2}a} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707$

$$\cos 45^\circ = \frac{b}{c} = \frac{a}{\sqrt{2}a} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707$$

$$\tan 45^\circ = \frac{a}{b} = \frac{a}{a} = 1$$



(圖 2)

至於A角的其他度數，也可先用量角器準確的畫出三角形ABC，使A角等於已知的度數，C角等於 90° ，再用尺量出各邊的長，求出它們的比值。這樣，根據三角函數的定義，六個三角函數的值，都可依次得出(當然，也還有其他方法，此處不深入討論)。關於從 0° 到 90° 的三角函數的值，以前已有人一一算出，並把它們列成一表，叫做“三角函數表”，我們要應用任何一個角度(小於 90°)的三角函數時，祇要在表上一查就行，無需再行計算。這種三角函數表，三角學教科書上大多都有。為便利讀者起見，本書也把準確到小數三位的三角函數表列在下面，以供查用。本表祇列出正弦、餘弦和正切的數值，因為後三種——餘切、正割和餘割，用得較少，而且也就是前三種的倒數，如果需用時可以根據前三種函數來算出的。

三角函数表

角	正弦	餘弦	正切	角	正弦	餘弦	正切
0°	0.000	1.000	0.000	46°	.719	.695	1.036
1°	.018	1.000	.018	47°	.731	.688	1.072
2°	.035	0.999	.035	48°	.743	.669	1.111
3°	.052	.999	.052	49°	.755	.656	1.150
4°	.070	.998	.070	50°	.766	.643	1.192
5°	.087	.996	.088	51°	.777	.629	1.235
6°	.105	.995	.105	52°	.788	.616	1.280
7°	.122	.993	.123	53°	.799	.602	1.327
8°	.139	.990	.141	54°	.809	.588	1.376
9°	.156	.988	.158	55°	.819	.574	1.428
10°	.174	.985	.176	56°	.829	.559	1.483
11°	.191	.982	.194	57°	.839	.545	1.540
12°	.208	.978	.213	58°	.848	.530	1.600
13°	.225	.974	.231	59°	.857	.515	1.664
14°	.242	.970	.249	60°	.866	.500	1.732
15°	.259	.966	.268	61°	.875	.485	1.804
16°	.276	.961	.287	62°	.883	.470	1.881
17°	.292	.956	.306	63°	.891	.454	1.963
18°	.309	.951	.325	64°	.899	.438	2.050
19°	.326	.946	.344	65°	.906	.423	2.145
20°	.342	.940	.364	66°	.914	.407	2.246
21°	.358	.934	.384	67°	.921	.391	2.356
22°	.375	.927	.404	68°	.927	.375	2.475
23°	.391	.921	.425	69°	.934	.358	2.605
24°	.407	.914	.445	70°	.940	.342	2.747
25°	.423	.906	.466	71°	.946	.326	2.904
26°	.438	.899	.488	72°	.951	.309	3.078
27°	.454	.891	.510	73°	.956	.292	3.271
28°	.470	.883	.532	74°	.961	.276	3.487
29°	.485	.875	.554	75°	.966	.259	3.732
30°	.500	.866	.577	76°	.970	.242	4.011
31°	.515	.857	.601	77°	.974	.225	4.331
32°	.530	.848	.625	78°	.978	.208	4.705
33°	.545	.839	.649	79°	.982	.191	5.145
34°	.559	.829	.675	80°	.985	.174	5.671
35°	.574	.819	.700	81°	.988	.156	6.314
36°	.588	.809	.727	82°	.990	.139	7.115
37°	.602	.799	.754	83°	.993	.122	8.144
38°	.616	.788	.781	84°	.995	.105	9.514
39°	.629	.777	.810	85°	.996	.087	11.43
40°	.643	.766	.839	86°	.998	.070	14.30
41°	.656	.755	.869	87°	.999	.052	19.08
42°	.669	.743	.900	88°	.999	.035	28.64
43°	.682	.731	.933	89°	1.000	.018	57.29
44°	.695	.719	.966	90°	1.000	.000	∞
45°	.707	.707	1.000				

根据上表，我們可以查出任何小於 90° 角的正弦、餘弦和正切。譬如說，要查 63° 的正弦、餘弦和正切，那末可先從“角”的一行中查出“ 63° ”（自上向下看），再從 63° 向右看，在下一橫行中（上面標有正弦字樣）所列出的數字 0.891，就是 $\sin 63^\circ$ 的數值，即 $\sin 63^\circ = 0.891$ 。同理，再下一橫行（上面標有餘弦字樣）所列出的數字 0.454，就是 $\cos 63^\circ$ 的數值，即 $\cos 63^\circ = 0.454$ ；最後一行所列的數字，就是 $\tan 63^\circ$ 的數值，即 $\tan 63^\circ = 1.963$ 。

為節省篇幅起見，表分為兩大組，以兩條直線為界。左面的一組，可查從 0° 到 45° 的三角函數，右面的一組，可查從 46° 到 90° 的三角函數。剛才所說的 63° ，是在右面的一組裏面。

3. 大於 90° 角的三角函數

當 A 角大於 90° 時，C 角不能再為 90° ，三角形 ABC 也不再是直角三角形了。這樣，我們在 § 1 中所規定的三角函數似乎已經失去意義，其實不然，三角函數的關係，利用座標方法，可以推廣到任何角度，此處為篇幅所限，不預備詳細介紹這種方法，祇把所推出的結果，列成一表，以備查用。

角	sin	cos	tan	cot	sec	csc
$90^\circ - A$	$\cos A$	$\sin A$	$\cot A$	$\tan A$	$\csc A$	$\sec A$
$90^\circ + A$	$\cos A$	$-\sin A$	$-\cot A$	$-\tan A$	$-\csc A$	$\sec A$
$180^\circ - A$	$\sin A$	$-\cos A$	$-\tan A$	$-\cot A$	$-\sec A$	$\csc A$
$180^\circ + A$	$-\sin A$	$-\cos A$	$\tan A$	$\cot A$	$-\sec A$	$-\csc A$
$270^\circ - A$	$-\cos A$	$-\sin A$	$\cot A$	$\tan A$	$-\csc A$	$-\sec A$
$270^\circ + A$	$-\cos A$	$\sin A$	$-\cot A$	$-\tan A$	$\csc A$	$-\sec A$
$360^\circ - A$	$-\sin A$	$\cos A$	$-\tan A$	$-\cot A$	$\sec A$	$-\csc A$
$360^\circ + A$	$\sin A$	$\cos A$	$\tan A$	$\cot A$	$\sec A$	$\csc A$

由上表可以看出，凡是 90° 的奇數倍（1 倍、3 倍等，像 90° 、 270° 等），加減 A 角的某函數，等於和該函數对应的 A 角的餘函數，即把 90° 奇數倍的角去掉，並把正弦變成餘弦，餘弦變為正弦（餘類推），然後再在前面加上適當符號。如：

$$\sin 140^\circ = \sin(90^\circ + 50^\circ) = \cos 50^\circ$$

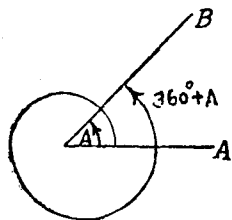
$$\cos 210^\circ = \cos(270^\circ - 60^\circ) = -\sin 60^\circ$$

又凡 90° 的偶數倍（2 倍、4 倍等，像 180° 、 360° 等），加減 A 角的某函數，等於 A 角的同函數，即去掉 90° 偶數倍的角後，正弦仍為正弦，餘弦仍為餘弦（其他函數也是這樣），不過在前面仍然要加上適當的符號。如：

$$\sin 330^\circ = \sin(360^\circ - 30^\circ) = -\sin 30^\circ$$

$$\cos 190^\circ = \cos(180^\circ + 10^\circ) = -\cos 10^\circ$$

至於 360° （或 360° 的倍數）“加” A 角的某函數，總是等於



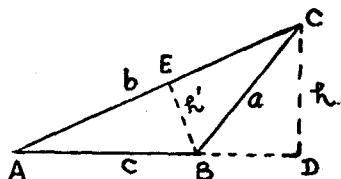
（圖 3）

A 角的原函數，並且不再加負號。因為任何一個角，轉過 360° （四個直角）後，仍回到原來的位置，如圖 3 所示，所以它的三角函數，也就有了相同的數值。

有了上面表上所列的種種關係，任何大於 90° 角的三角函數，都可化為小於 90° 角的三角函數。這樣，我們總可利用 § 2 中所給的那張三角函數表，求出任何角度的三角函數的值了。

4. 正弦和餘弦定律

假如我們有一個任意三角形 ABC ，並且仍令 A 角的對邊為 a ， B 角的對邊為 b ， C 角的對邊為 c (圖 4)，那末，根據 § 3 中所講的，任何角度的三角函數的值都可求出；但是這時 $\sin A$ 卻不等於 $\frac{a}{c}$ (其他函數也是這樣)，因為現在的三角形 ABC 已不是一個直角三角形了，所以 § 1 中所說的種種關係，不再正確。



(圖 4)

如果我們把這個任意三角形 ABC 的 c 邊延長，並自頂點 C 作一直線垂直於 c 邊的延長綫，那末必定可以和它 (c 邊) 相交於一點 D ，這樣我們就把一個任意三角形 ABC 配成了兩個直角三角形 ADC 和 BDC 了。如果令 CD 的長等於 h ，那末在直角三角形 ADC 中，可以找出下列關係：

$$\sin A = \frac{h}{b}$$

同理，在三角形 BDC 中 $\sin(180^\circ - B) = \sin B = \frac{h}{a}$

即

$$h = b \sin A$$

和

$$h = a \sin B$$

所以

$$h = a \sin B = b \sin A$$

即

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \quad (1)$$

同理，如果自頂點 B 作一直線垂直於 b 邊，交 b 邊於 E，則可得兩個直角三角形 ABE 及 CBE。如令 BE = h'，則有：

$$\sin A = \frac{h'}{c}$$

$$\sin C = \frac{h'}{a}$$

即
$$h' = c \sin A = a \sin C$$

即
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} \quad (2)$$

聯合(1)和(2)兩式，可以得出：

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \quad (3)$$

這個關係，叫做“正弦定律”，即三角形的三邊和對角的正弦互成比例。這是適用於任意三角形的關係式。很顯然，如果 C 角等於 90°，那末 $\sin C = \sin 90^\circ = 1$ ，因而由(2)式可得出：

$$\sin A = \frac{a}{c}$$

和 § 1 中所說的一樣。

又由圖 4，知：

$$a^2 = h^2 + \overline{BD}^2$$

因
$$\overline{BD} = AD - c$$

故平方後，得：

$$a^2 = h^2 + \overline{AD}^2 - 2AD \cdot c + c^2$$

因
$$h^2 + \overline{AD}^2 = b^2 \quad AD = b \cos A$$

$$\begin{array}{lcl}
 \text{所以最後得:} & a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A & \\
 \text{同理} & b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B & \\
 & c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C &
 \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}} \right\} \quad (4)$$

这个關係，叫做“餘弦定律”。即三角形任何一边的平方，等於其他兩边平方之和，減去此兩边和此兩边夾角的餘弦連乘積的兩倍。

三角形有三个边和三个角，一共是六个量。如果在这六个量中有三个是已知的，那末利用正弦或餘弦定律，可以求出其餘的三个量。但已知的三个量中，不能全是角，必定要有一个量是边才行，不然的話，將得到許多大小不同的相似三角形，不能得出每边的確定數值。事实上，任何三角形三角之和，總是等於 180° ，所以六个量中，祇五个是独立的。也就是說，在五个独立的量中，如已知任意的三个量，可以求出其餘的兩個量。

5. 联立方程式

算術裏面的四則問題，有時用代數解算反較便当。譬如有这样一個題目：

“甲乙兩數的和是36，它們的差是14，求此兩數。”

如果用四則解算，那末我們知道：

$$\text{大數(設为甲數)} = (36 + 14) \div 2 = 25$$

$$\text{小數(設为乙數)} = (36 - 14) \div 2 = 11$$

如果用代數法來解算，我們可設 $x = \text{大數(甲數)}$ 。因为甲乙兩數的和是36，所以小數(乙數)必为 $36 - x$ ；又因它們的

差是14,所以我們有:

$$x - (36 - x) = 14$$

这样就組成了一个“一元一次方程式”。因为祇有一个未知數 x , 而且 x 是一次方。解開括弧, 即得:

$$x - 36 + x = 14$$

即

$$2x = 50$$

$$x = 25 \text{ (甲數)}$$

代入得

$$36 - x = 36 - 25 = 11 \text{ (乙數)}$$

我們也可这样算: 令 x = 甲數, y = 乙數, 於是根据題意, 我們可得:

$$x + y = 36 \quad (1)$$

$$x - y = 14 \quad (2)$$

这样就組成了一个“二元一次联立方程式”, 因为有两个未知數 x 和 y , 而且 x 和 y 都是一次方。這類方程式的解法有好幾种, 通常我們多半採用“消去法”, 就是从两个方程式中消去一个未知數。譬如說, 在上面所得出的那两个方程式中, 我們可以先把 y 消去, 即把(1)和(2)兩式相加, 得到:

$$2x = 50$$

$$x = 25 \text{ (甲數)}$$

把已經算得的 x 的數值, 代入(1)或(2), 就可求出 y 值。譬如把 x 值代入(1)式, 得:

$$y = 36 - x = 36 - 25 = 11 \text{ (乙數)}$$

任何二元一次方程式, 都可用这种方法來解算。然而, x 、 y 前面, 可能还有數字係數(如 $3x$ 、 $5y$ 等), 所以比較普遍的