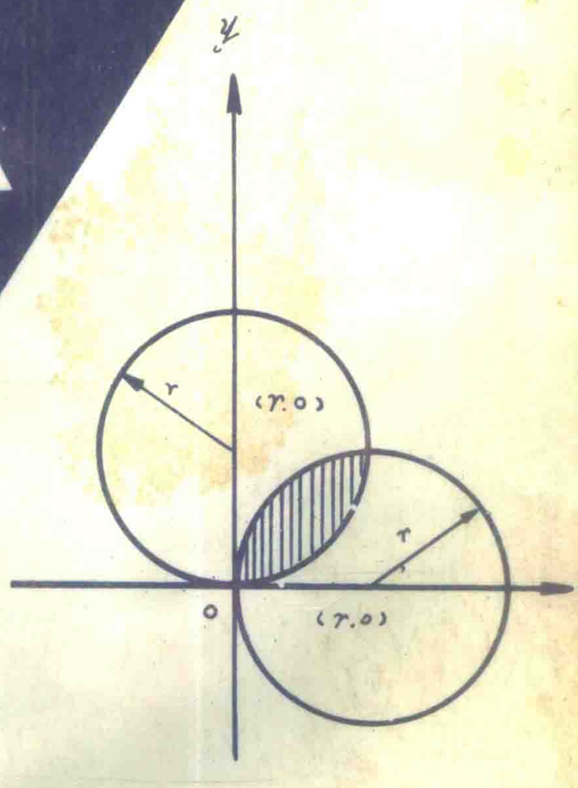
高等数学习题集全解

上册

梁再中
周大琼 编著
李 莉



科学技术文献出版社

高等数学习题集全解

梁在中　周大琮　李　莉　编

上　册

科学技术文献出版社

内 容 提 要

本书是将同济大学数学教研室所编《高等数学习题集》（1965年修订本）中的全部习题，按照原习题集的章节顺序，做了比较详细的解答，作为学习高等数学的辅导读物，供广大读者参考。

本书分上、中、下三册。上册包括解析几何和一元函数微分学。

高 等 数 学 习 题 集 全 解

著译

科学技术文献出版社出版

（北京复兴路15号）

北京顺义县振华印刷厂印刷

新华书店科技发行所发行　各地新华书店经售

*

787×1092 毫米　16 开本　23 印张　584 千字

1989年8月第1版　1989年8月第1次印刷

印数　1—7800册

科技新书目：195—101

ISBN 7-5023-0815-6/O·507

定价：9.00元

前　言

同济大学数学教研室所编《高等数学习题集》（1965年修订本）一书，多年来一直是很多高等院校工科专业的高等数学习题参考书，也是电视大学、职工业余大学、函授大学、夜大学及中等专业学校等有关专业的高等数学习题参考书。这本书中的习题，内容比较丰富，选材比较广泛，类型比较全面，大部分是比较基本的习题，少部分具有一定的难度。对初学高等数学的读者，要比较顺利地全部做完这本习题集中的习题尚有一定的困难，特别是电视大学、职工业余大学、函授大学、夜大学及中等专业学校的学生与自学高等数学的读者，可能困难就更大。为了帮助广大读者更好地掌握高等数学的解题方法和技巧，以及克服解题中的困难，我们把这本《高等数学习题集》中的全部习题，做了比较详细的解答，作为学习高等数学的辅导读物，供广大读者参考。

我们编写《高等数学习题集全解》这本书，按照原习题集的章节顺序，每一章包括两部分：一、内容提要；二、习题详解。"内容提要"是将该章习题所涉及到的高等数学的有关基本知识，包括基本概念、基本理论和基本方法，比较系统地加以概括、总结，以帮助读者首先理清这些基本内容的线索，然以运用有关的概念、理论和方法去解该章的习题。"习题详解"是对每章的习题做出比较详尽的解答，在解题过程中，力求做到分析问题的思路清楚，解决问题的步骤较详，以使基础较差或自学高等数学的某些读者，减少解题过程中的一些障碍，而且对某些题，特别是不定积分的部分题，还做了几种不同的解法，以利于开阔读者的解题思路，掌握更多的解题技巧。

本书分上、中、下三册，上册包括解析几何和一元函数微分学；中册包括一元函数积分学和无穷级数；下册包括级数、多元函数微分学、积分学、微分方程和习题集的附录。此外，在本书下册中，我们还将一九八七年、一九八八年与一九八九年全国攻读硕士学位研究生入学考试的全部数学试题及解答附在书后，供读者参考。同时，我们还选编了几套自我检查题与部分综合性的习题，这些题均有一定的难度和技巧，可帮助读者在综合能力的训练方面得到进一步的提高。这些题也均附有较详细的解答。

由于水平所限，加之时间仓促，谬误之处在所难免，恳请读者批评指正。

编者

1988年8月于北京工业大学

目　　录

第一编　解析几何

第一章　平面上的直角坐标、曲线及其方程

一、内 容 提 要

1. 平面上点的直角坐标

如图1.1所示，过平面上一点O作一条水平直线与一条铅直直线，水平直线的正向从左至右，称为**横轴**或**ox轴**；铅直直线的正向从下至上，称为**纵轴**或**oy轴**，交点O称为**坐标原点**，简称**原点**。再取定一个单位长度。ox 轴和 oy 轴统称为**坐标轴**。这种有了坐标轴及取定一个单位长度的系统，称为**平面直角坐标系**。

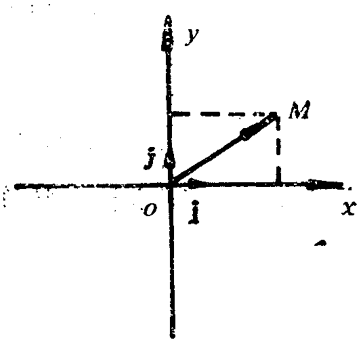


图 1-1

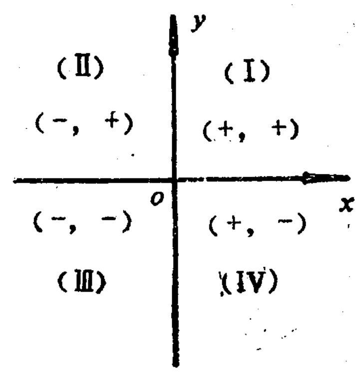


图 1-2

分别以**i**、**j**记ox，oy轴正方向上的单位向量，称为**基本单位向量**，则任一向量$\overrightarrow{OM}$可唯一地表示为$\overrightarrow{OM}=xi+yj$（图1-1），$x$，$y$分别称为点$M$的横坐标与纵坐标，记作 $M(x,\ y)$。两坐标轴把平面分为四个部分，每一部分都称为一个**象限**，象限的顺序及点的坐标x，y在各象限的符号如图1-2所示。

2. 坐标变换

（1）平移变换

若将坐标轴从一个位置平行移动到另一个位置，则称这种变换为坐标轴的**平移变换**。

若将坐标系oxy平行移动为新坐标系$o'x'y'$(图1-3)，原点o'关于原坐标系oxy的坐标为a、b。点M在坐标系oxy与$o'x'y'$下的坐标分别为$(x,\ y)$与$(x',\ y')$，则平移变换为

$$x=c+x',\qquad y=b+y'.$$

（2）旋转变换

设在坐标系oxy中，原点o不动，两轴旋转α角而得一个新的坐标系$ox'y'$(图1-4)。若点M在坐标系oxy与$ox'y'$下的坐标分别为$(x,\ y)$与$(x',\ y')$，则相应的**旋转变换**为

$$x=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha,\qquad y=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha。$$

或

$$x'=x\cos\alpha+y\sin\alpha,\qquad y'=-x\sin\alpha+y\cos\alpha。$$

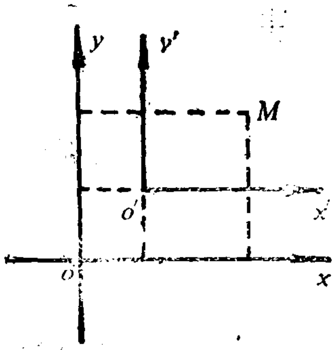


图 1-3

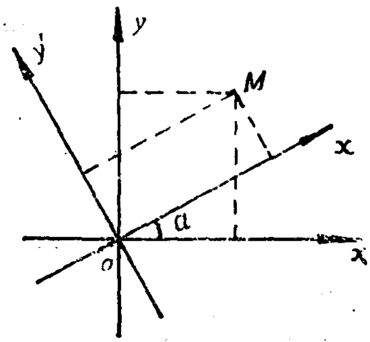


图 1-4

3．两点间的距离

平面上两点$M_1(x_1,\ y_1)$，$M_2(x_2,\ y_2)$间的距离为

$$d=|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}。$$

4．线段的定比分点

给定平面上两点$M_1(x_1,\ y_1)$及$M_2(x_2,\ y_2)$，若点$M(x,\ y)$是线段M_1M_2的分点(图1-5)，其分割比例为 $\dfrac{M_1M}{MM_2}=\lambda$，则

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\quad (-\infty<\lambda<+\infty\ \ \lambda\neq-1)$$

当$\lambda>0$时，称为**内分**；当$\lambda<0$时，称为**外分**；当$\lambda=1$时，点M为线段M_1M_2的**中点**，得中点坐标公式为

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\qquad y=\frac{y_1+y_2}{2}。$$

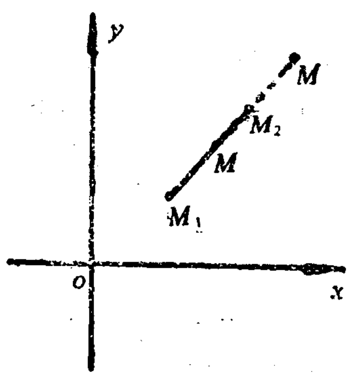


图 1-5

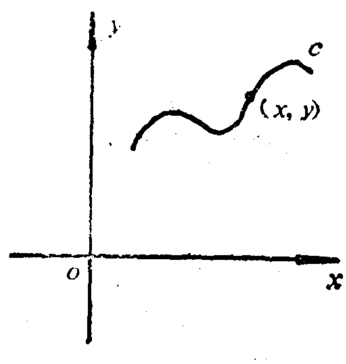


图 1-6

5．曲线及其方程

设在平面直角坐标系oxy中给定某条曲线C(图1.6)。如果C上所有点的坐标x，y都满足方程$\varphi(x,\ y)=0$，且坐标x，y满足方程$\varphi(x,\ y)=0$的所有点都在C上，则称方程$\varphi(x,\ y)=0$为所给曲线C的方程；反过来，曲线C为方程$\varphi(x,\ y)=0$的图象。

6. 曲线的参数方程

在平面直角坐标系oxy中，如果曲线C上，任意一点的坐标x，y可表为某一变量t的函数

$$x=x(t),\qquad y=y(t),\qquad (a\leqslant t\leqslant b),$$

当使x，y随变量t在区间$[a, b]$上变化时而描出曲线C，且只描出曲线C，则称方程

$$x=x(t),\qquad y=y(t),\qquad (a\leqslant t\leqslant b)$$

为曲线C的**参数方程**或**参数表示**，变量t称为**参变量**或**参数**。

二、习题详解

平面上点的直角坐标，坐标变换

1.1 设轴上三点A，B，C的排列次序如图1.7A和B间距离为4，C和B间距离为1。

(a) 求轴上有向线段$\overline{AB}$，$\overline{AC}$，$\overline{BC}$的值。

(b) 若以点A为原点，那么点A，B，C的坐标等于什么？

图 1-7

解 (a)因有向线$\overline{AB}$，$\overline{AC}$的方向与轴l的正向相反，$\overline{BC}$的方向与l的正向相同，所以$\overline{AB}=-4$，$\overline{AC}=-3$，$\overline{BC}=1$。

(b) $A(0)$，$B(-4)$，$C(-3)$。

1.2 已知数轴上点A、B、C的坐标依次为-6，0，8，求轴上有向线段$\overline{AB}$，$\overline{BC}$，$\overline{CA}$的值。

解 因$A(-6)$，$B(0)$，$C(8)$，所以$\overline{AB}=0-(-6)=6$，$\overline{BC}=8-0=8$，$\overline{CA}=(-6)-8=-14$。

1.3 作下列各点：$A(2, 7)$，$B(3, 0)$，$C(1, -4)$，$D(0, 5)$，$E(-1, 2)$，$F(-4, -3)$，$G(-2, 0)$，$H(0, -3)$，$K(-3\frac{1}{2}, 2\frac{1}{3})$，$L(\sqrt{2}, -\sqrt{3})$，$N(0, \sqrt{5})$。

解 各点如图1.8所示。

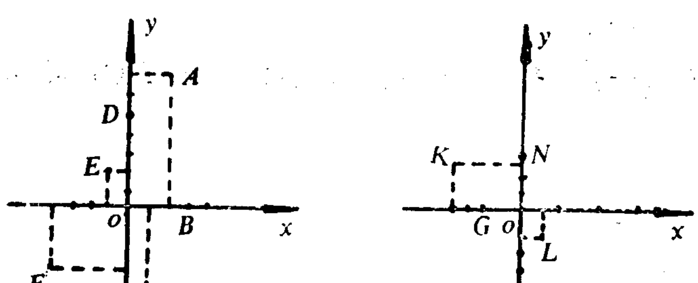


图 1-8

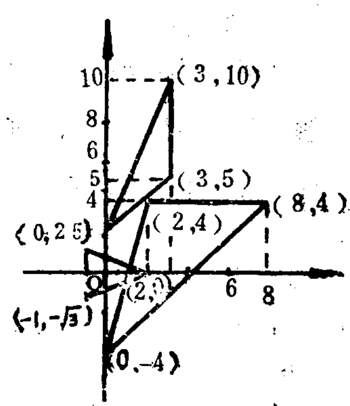


图 1-9

1.4 三角形的三个顶点的坐标如下：

(a) $(8, 4)$，$(0, -4)$，$(2, 4)$；

(b) $(3, 5)$，$(3, 10)$，$(0, 2.5)$；

(c) $(2, 0)$，$(-1, \sqrt{3})$，$(-1, -\sqrt{3})$。

求作这些三角形。

解 各三角形如图1.9所示。

1.5 设$a=1$，$b=2$，求作点(a, b)，(b, a)，$(-a, b)$，$(b, -a)$，$(-b, a)$，$(a, -b)$，$(-a, -b)$和$(-b, -a)$。

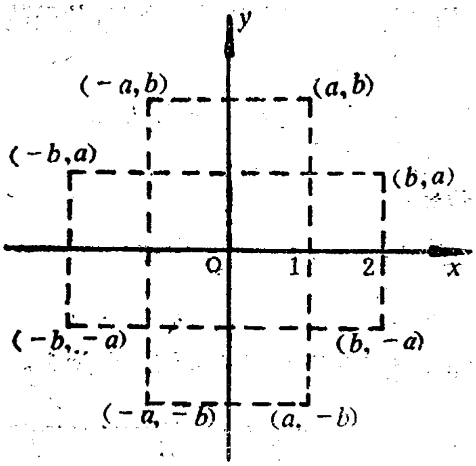


图 1-10

解 各点如图1-10所示。

1.6 一正方形的边长为2单位，如果将两条坐标轴放到这正方形的任意一组邻边上去，问正方形各顶点的坐标等于什么？

解 （1）如图1-11(a)所示$A(0, 0)$，$B(2, 0)$，$C(2, 2)$，$D(0, 2)$。

（2）如图1-11(b)所示$A(-2, 0)$，$B(0, 0)$，$C(0, 2)$，$D(-2, 2)$。

（3）如图1.11(c)所示$A(-2, -2)$，$B(0, -2)$，$C(0, 0)$，$D(-2, 0)$。

（4）如图1.11(d)所示$A(0, -2)$，$B(2, -2)$，$C(2, 0)$，$D(0, 0)$。

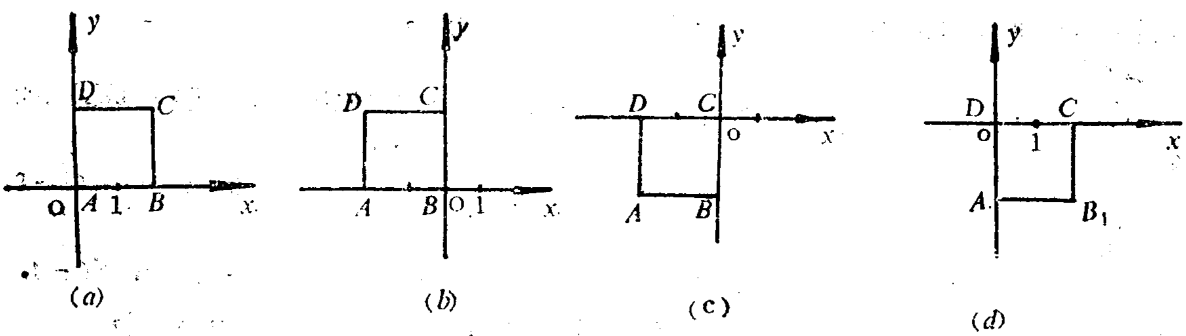


图 1-11

1.7 菱形的每边长为5单位，它有一条对角线长为6单位，如果把菱形的两条对角线分别放在两坐标轴上，求它各个顶点的坐标。

解 菱形的另一对角线长为 $2\sqrt{5^2-\left(\frac{6}{2}\right)^2}=8$，两对角线的交点置于坐标原点，对角线放在坐标轴上的放法有两种。

（1）如图1.12(a)所示，各个顶点坐标分别为$(3, 0)$，$(0, 4)$，$(-3, 0)$，$(0, -4)$。

（2）如图1-12(b)所示，各个顶点的坐标分别为$(4, 0)$，$(0, 3)$，$(-4, 0)$，$(0, -3)$。

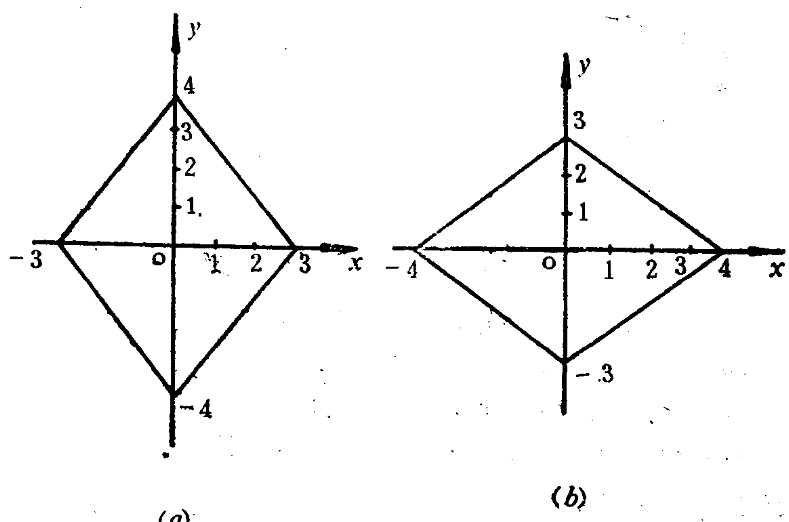


图 1-12

1.8 已知点$M(3, 2)$，作它关于横轴、纵轴、原点的对称点。求这些点的坐标。

解 关于横轴的对称点为$M_1(3, -2)$。关于纵轴的对称点为$M_2(-3, 2)$。关于原点对称点为$M_3(-3, -2)$。如图1-13所示。

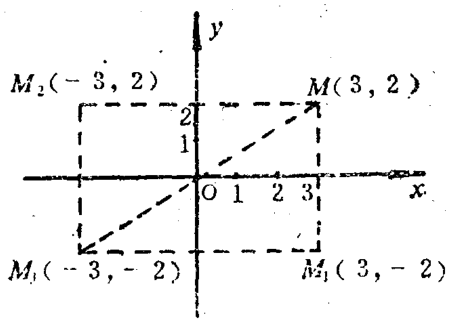


图 1-13

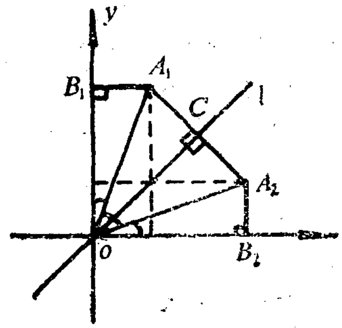


图 1-14

1.9 证明点$A_1(a, b)$关于第Ⅰ和第Ⅲ象限角的平分线的对称点A_2必有坐标(b, a)。

证 设直线l为第Ⅰ和第Ⅲ象限的角平分线，A_1与A_2的连线交直线l于点C，连OA_1与OA_2，作直线A_1B_1垂直于oy轴，直线A_2B_2垂直于ox轴，其交点分别为B_1，B_2。

因为A_2是A_1关于直线l的对称点，所以$|A_1C|=|A_2C|$，$\angle OA_1=\angle OCA_2=90°$，则$\Delta OCA_1\cong\Delta OCA_2$，于是$|OA_1|=|OA_2|$，$\angle A_1OC=\angle A_2OC$。

因为$\angle B_1OC=\angle B_2OC=45°$，所以$\angle B_1OA_1=\angle B_2OA_2$，则$\Delta A_1B_1O\cong\Delta A_2B_2O$，从而可得$|A_2B_2|=|A_1B_1|$，$|OB_2|=|OB_1|$。由$A_1(a, b)$可知$A_2$的坐标为$(b, a)$。

1.10 点B与点$A(2, 4)$对称于第Ⅰ和第Ⅲ象限角的平分线，求点B的坐标。

解 由1.9题知点B的坐标为$(4, 2)$。

1.11 一点在某一坐标系下的坐标为$x=2$，$y=-1$，如果轴的方向保持不变而将原点移至点：

(a) $(4, 5)$； (b) $(4, -5)$；

(c) $(-4, 5)$； (d) $(-4, -5)$。

该点在新系下的坐标等于什么？

解 设该点在新系下的坐标为x'，y'。由平移变换公式得：

(a) $x'=2-4=-2$， $y'=-1-5=-6$，即$(-2, -6)$；

(b) $x'=2-4=-2$， $y'=-1-(-5)=4$，即$(-2, 4)$；

(c) $x'=2-(-4)=6$， $y'=-1-5=-6$，即$(6, -6)$；

(d) $x'=2-(-4)=6$， $y'=-1-(-5)=4$，即$(6, 4)$。

1.12 某点在两轴方向相同的两坐标系下的坐标为$(12, -7)$和$(0, 15)$，各系的原点在他系下的坐标等于什么？

解 设一坐标系为oxy，点的坐标为$x=12$，$y=-7$，另一坐标系为$o'x'y'$，该点的坐标为$x'=0$，$y'=15$，点o在$o'x'y'$系下的坐标为$x'=a'$，$y'=b'$，点o'在oxy系下的坐标为$x=a$，$y=b$，由平移变换公式得：

$a'=x'-x=0-12=-12$， $b'=y'-y=15-(-7)=22$，

$a=x-x'=12-0=12$， $b=y-y'=-7-15=-22$。

1.13 如果将坐标轴依逆时针方向旋转60°，点$M(1, \sqrt{3})$在新系下的坐标等于什么？

解 由旋转变换公式得：

$$x' = 1\cdot\cos60° + \sqrt{3}\sin60° = \frac{1}{2} + \sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 2,$$

$$y' = -1\cdot\sin60° + \sqrt{3}\cos60° = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3}\cdot\frac{1}{2} = 0,$$

所以在新系下的坐标为(2, 0)。

1.14 如果将坐标轴依逆时针方向旋转45°，点$M(1,\ \sqrt{3})$在新系下的坐标等于什么?

解 由旋转变换公式得：

$$x' = 1\cdot\cos45° + \sqrt{3}\sin45° = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+\sqrt{3}),$$

$$y' = -1\cdot\sin45° + \sqrt{3}\cos45° = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+\sqrt{3})。$$

1.15 坐标轴应该旋转多少角度，方能使点$M(2,\ 0)$在新系下的横坐标和纵坐标变成相等?（我们把角度限制在$-\frac{\pi}{2}$到$\frac{\pi}{2}$之间。）

解 设坐标轴旋转$\alpha°$，点$M(2,\ 0)$在新系下的横标x'和纵标y'相等。由旋转变换公式得：

$$x' = 2\cos\alpha° + 0\cdot\sin\alpha°,$$
$$y' = -2\sin\alpha° + 0\cdot\cos\alpha°,$$

由$x'=y'$而得$2\cos\alpha° = -2\sin\alpha°$，即$\operatorname{tg}\alpha° = -1$，所以$\alpha° = -45° = \frac{-\pi}{4}$.

两点间的距离，线段的定比分点

1.16 求下列各题中两点间的距离：

(*a*) (5, 2)和(1, −1)；　　(*b*) (−6, 3)和(0, −5)；

(*c*) (0, 0)和(−3, 4)；　　(*d*) (9, −7)和(4, 5).

解 由两点间的距离公式，分别可得：

(*a*) $d = \sqrt{(5-1)^2+(2-(-1))^2} = \sqrt{25} = 5$;

(*b*) $d = \sqrt{(-6-0)^2+(3-(-5))^2} = \sqrt{100} = 10$;

(*c*) $d = \sqrt{(-3-0)^2+(4-0)^2} = \sqrt{25} = 5$;

(*d*) $d = \sqrt{(9-4)^2+(-7-5)^2} = \sqrt{169} = 13$.

1.17 已知三角形的顶点$A(3,\ 2)$，$B(-1,\ -1)$和$C(11,\ -6)$.求三角形的周长。

解 $|AB| = \sqrt{(-1-3)^2+(-1-2)^2} = 5$，$|BC| = \sqrt{12^2+5^2} = 13$，$|CA| = \sqrt{8^2+8^2} = 8\sqrt{2}$；三角形$ABC$的周长为$2(9+4\sqrt{2})$。

1.18 试证顶点为$A(0,\ 0)$，$B(3,\ 1)$及$C(1,\ 7)$的三角形是直角三角形。

证 $|AB| = \sqrt{3^2+1^2} = \sqrt{10}$，$|BC| = \sqrt{2^2+6^2} = \sqrt{40}$；$|CA| = \sqrt{1^2+7^2} = \sqrt{50}$，因为$|AC|^2 = 50 = 10+40 = |AB|^2+|BC|^2$，所以三角形$ABC$为直角三角形，$AC$边为斜边。

1.19 一点从点$A(-3,\ -2)$作直线运动移至点$B(4,5)$，求该点所经过的距离。

解 设该点所经过的距离为S，$S = |AB| = \sqrt{7^2+7^2} = 7\sqrt{2}$。

1.20 证明点(7, 2)和点(1, −6)在以点(4, −2)为圆心的圆周上，并求这个圆的半径。

证 因为点(7, 2)到点(4, −2)的距离为$d_1 = \sqrt{3^2+4^2} = 5$，点(1, −6)到点(4, −2)的距离为$d_2 = \sqrt{3^2+4^2} = 5$，所以点(7,2)和点(1, −6)在以点(4, −2)为圆心的

圆周上，圆的半径为5。

1.21　在x轴上求与点$A(5,12)$的距离为13单位的点的坐标。

解　因为在x轴上的点的纵坐标$y=0$，所以设点B的坐标为$(x,0)$由$B(x,0)$与$A(5,12)$的距离为13，得$\sqrt{(x-5)^2+12^2}=13$。即$(x-5)^2+144=169$，故$x-5=\pm\sqrt{25}=\pm5$。从而得到点$B_1(10,0)$和点$B_2(0,0)$即为所求。

1.22　在第Ⅰ象限角的平分线上求一点，使它与点$A(0,2)$的距离为$\sqrt{2}$单位。

解　第Ⅰ象限角的平分线上的点的坐标有$x=y$，设所求的点为$B(a,a)$。由题设条件得$|AB|=\sqrt{a^2+(a-2)^2}=\sqrt{2}$，即$2a^2-4a+4=2$。

由方程$a^2-2a+1=0$得$a=1$。所求点为$B(1,1)$。

1.23　已知点M的横坐标等于7单位，而到点$N(-1,5)$的距离等于10单位，求点M的纵坐标。

解　设$M(7,y)$，由题设条件$|MN|=10$，即$\sqrt{8^2+(y-5)^2}=10$，所以有$(y-5)^2=36$，解得$y=5\pm6$，故所求点为$M_1(7,11)$和$M_2(7,-1)$。

1.24　已知点M到两坐标轴和点$(3,6)$都有相等的距离，求点M的坐标。

解　设所求点为$M(x,y)$，点M到ox轴的距离为$|y|$，点M到oy轴的距离为$|x|$，点M与点$(3,6)$的距离为$\sqrt{(x-3)^2+(y-6)^2}$。由题设条件$|y|=|x|=\sqrt{(x-3)^2+(y-6)^2}$。

因为$|y|=|x|$，所以$y=\pm x$。故需分两种情况求解。

（1）$y=x$；由$x^2=(x-3)^2+(y-6)^2$得方程$x^2-18x+45=0$，解为$x_1=3$，$x_2=15$，从而得出所求的点为$M_1(3,3)$，$M_2(15,15)$两点。

（2）$y=-x$；由$x^2=(x-3)^2+(y-6)^2$得方程$x^2+6x+45=0$，因为$6^2-4\times45<0$，所以方程无实数解。故没有点满足条件。

综上所述，点$(3,3)$和点$(15,15)$为所求。

1.25　求与已知三点$A(2,2)$，$B(-5,1)$和$C(3,-5)$等距离的点。

解　设点$M(x,y)$与点A,B,C等距离，由此得$\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2}=\sqrt{(x+5)^2+(y-)^2}=\sqrt{(x-3)^2+(y+5)^2}$。从而有$(x-2)^2+(y-2)^2=(x+5)^2+(y-1)^2=(x-3)^2+(y+5)^2$，即$x^2-4x+y^2-4y+8=x^2+10x+y^2-2y+26=x^2-6x+y^2+10y+34$。

故得方程组 $\begin{cases}14x+2y+18=0\\2x-14y-26=0\end{cases}$或 $\begin{cases}7x+y=-9\\x-7y=13,\end{cases}$

该方程组之解为$x=-1$，$y=-2$。所求的点为$M(-1,-2)$。

1.26　试用解析法证明，任意三角形两边中点连线之长等于第三边之长的一半。

证　设三角形的三个顶点分别为$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$C(x_3,y_3)$，AB边之中点为$D(x_4,y_4)$，AC边之中点为$E(x_5,y_5)$。（图1-15）。

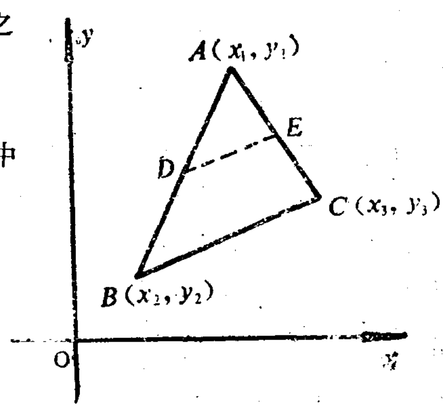


图 1-15

由中点坐标公式得：

$$x_4=\frac{x_1+x_2}{2}\qquad y_4=\frac{y_1+y_2}{2};$$

$$x_5=\frac{x_1+x_3}{2},\qquad y_4=\frac{y_1+y_3}{2};$$

$|DE|=\sqrt{(x_5-x_4)^2+(y_5-y_4)^2}$

$$=\sqrt{\left(\frac{x_3-x_2}{2}\right)+\left(\frac{y_3-y_2}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{(x_3-x_2)^2+(y_3-y_2)^2}=\frac{1}{2}|BC|$$

1.27 设点$M_1(1,\ 1)$，$M_2(2,\ 2)$，$M_3(3,\ -1)$是平行四边形的三个顶点，求第四个顶点。

解 设第四个顶点为$M_4(x_4,\ y_4)$、点M_1，M_2，M_3为顶点的平行四边形有三种组成方法。(图1-16)

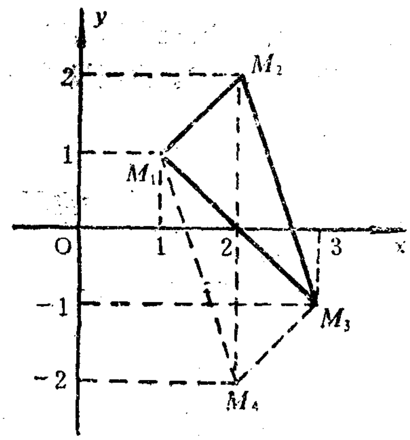


图 1-16

(1) 若$\overline{M_1M_2}$，$\overline{M_2M_3}$为平行四边形的两邻边，则$\overline{M_1M_3}$为该平行四边形的一条对角线，另一条对角线为$\overline{M_2M_4}$，设两条对角线的交点为$E_1(\overline{x_1},\ \overline{y_1})$，它是这两条对角线的中点，由中点坐标公式得：

$$\overline{x_1}=\frac{1+3}{2}=\frac{2+x_4}{2}，所以x_4=1+3-2=2,$$

$$\overline{y_1}=\frac{1+(-1)}{2}=\frac{2+y_4}{2}，所以y_4=1+(-1)-2=-2,$$

由此得第四个顶点为$M_4(2,\ -2)$。

(2) 若$\overline{M_2M_3}$，$\overline{M_3M_1}$为平行四边形的两邻边，则两条对角线分别为$\overline{M_1M_2}$和$\overline{M_3W_4}$。设它们的交点为$E_2(\overline{x_2},\ \overline{y_2})$，于是得：

$$\overline{x_2}=\frac{2+1}{2}=\frac{x_4+3}{2}，所以x_4=2+1-3=0,$$

$$\overline{y_2}=\frac{2+1}{2}=\frac{y_4+(-1)}{2}，所以y_4=2+1-(-1)=4,$$

由此得出第四个顶点为(0, 4)。

(3) 若$\overline{M_1M_3}$，$\overline{M_1M_2}$为平行四边行的两邻边，则两条对角线分别为$\overline{M_2M_3}$和$\overline{M_1M_4}$，设其交点为$E_3(\overline{x_3},\ \overline{y_3})$，于是得

$$\overline{x_3}=\frac{3+2}{2}=\frac{x_4+1}{2}，所以x_4=3+2-1=4,$$

$$\overline{y_3}=\frac{(-1)+2}{2}=\frac{y_4+1}{2}，所以y_4=(-1)+2-1=0,$$

则第四个顶点为(4, 0)。

此题有三解(2, -2)，(0, 4)，(4, 0)，它们均是第四个顶点。

1.28 设正方形相邻两顶点是$A(2,\ 3)$和$B(6,\ 6)$，求其余的顶点。

解 设正方形另外两顶点为$C_1(x_1,\ y_1)$，$C_2(x_1',\ y_1')$。如图1·17所示。因为$|AB|=|BC_1|$及$|AC_1|^2=|AB|^2+|BC_1|^2$，所以有$(x_1-6)^2+(y_1-6)^2=(6-2)^2+(6-3)^2$，及$(x_1-2)^2+(y_1-3)^2=2[(6-2)^2+(6-3)^2]$，

即 $\begin{cases}x_1^2+y_1^2-12x_1-12y_1=-47\\x_1^2+y_1^2-4x_1-6y_1=37\end{cases}$，

两式相减得 $4x_1+3y_1=42$，

所以$y_1=-\frac{4}{3}x_1+14$，代入方程组化简得方程

$x_1{}^2-12x_1+27=0$，解得$x_1=3$和$x_1'=9$。由此可得$y_1=10$和 $y_1'=2$，所以点 C 有两个，分别为$C_1(3,\ 10)$和$C_2(9,\ 2)$。

设所求的另一顶点为 $D_1(x_2,\ y_2)$ 和 $D_2(x_2',\ y_2')$。由中点坐标公式得：

$$\frac{x_2+6}{2}=\frac{2+3}{2},\qquad \frac{y_2+6}{2}=\frac{3+10}{2},$$ 则$D_1(-1,\ 7)$。

$$\frac{x_2'+6}{2}=\frac{2+9}{2},\qquad \frac{y_2'+6}{2}=\frac{3+2}{2},$$

则$D_2(5,\ -1)$。

故此正方形的其余的顶点为$C_1(3,10)$，$D_1(-1,7)$或$C_2(9,\ 2)$，$D_2(5,\ -1)$。

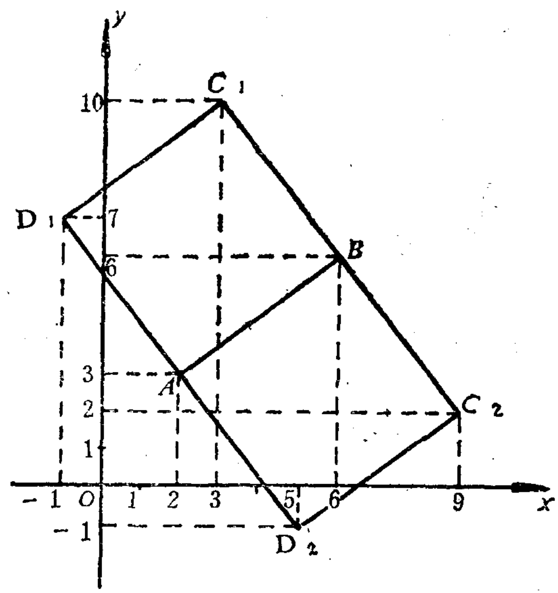


图 1-17

1.29 下列各对坐标表示一线段的两端点，试求它们的中点：

(a) (7, 4)，(3, 2)；　　(b) (6, −4)，(2, 2)；

(c) (a, 1)，(1, a)；　　(d) (0, 0)，(0, $\frac{2}{3}$)；

(e) ($-3\frac{3}{8}$, $-7\frac{5}{8}$)；($2\frac{3}{4}$, $-4\frac{1}{2}$)。

解 设中点为($\bar{x}$, $\bar{y}$)，由中点坐标公式得：

(a) $\bar{x}=\dfrac{7+3}{2}=5$，　$\bar{y}=\dfrac{4+2}{2}=3$，中点(5, 3)；

(b) $\bar{x}=\dfrac{6+2}{2}=4$，　$\bar{y}=\dfrac{-4+2}{2}=-1$，中点(4, −1)；

(c) $\bar{x}=\dfrac{a+1}{2}$，　$\bar{y}=\dfrac{1+a}{2}$，中点$\left(\dfrac{a+1}{2},\ \dfrac{1+a}{2}\right)$；

(d) $\bar{x}=\dfrac{0+0}{2}=0$，　$\bar{y}=\dfrac{0+\frac{2}{3}}{2}=\dfrac{1}{3}$，中点(0, $\frac{1}{3}$)；

(e) $\bar{x}=\dfrac{-3\frac{3}{8}+2\frac{3}{4}}{2}=-\dfrac{5}{16}$，　$\bar{y}=\dfrac{-7\frac{5}{8}+\left(-4\frac{1}{2}\right)}{2}=-6\dfrac{1}{16}$，

中点$\left(-\dfrac{5}{16},\ -6\dfrac{1}{16}\right)$。

1.30 从点 $A(2,\ 3)$引一线段到点$B(7,\ -2)$，再延长同样的长度。求延长线端点的坐标。

解 设所求端点为$C(x,\ y)$。因为点$B(7,\ 2)$是线段 AC 的中点，所以有$\dfrac{x+2}{2}=7$，$\dfrac{y+3}{2}=-2$，解得$x=12$，$y=-7$。

1.31 已知两点$A(5,\ 4)$和$B(6,\ -9)$。延长线段$\overline{AB}$至点C使 $BC=\frac{1}{2}AB$，求点 C 的坐标。

解 设所求点为$C(x, y)$。因为$\frac{AB}{BC}=2$，由定比分点公式($\lambda=2$)得：

$6=\frac{5+\lambda x}{1+2}$，　　$-9=\frac{4+\lambda y}{1+2}$解得$x=6\frac{1}{2}$，$y=-15\frac{1}{2}$。所以点$C\left(6\frac{1}{2},\right.$ $\left.-15\frac{1}{2}\right)$。

1.32　已知两点$A(2, 3)$，$B(3, 5)$。求分线段$\overline{AB}$得比值$1:3$的点M的坐标。

解 设分点为$M(x, y)$。因为$\frac{AM}{MB}=1:3=\frac{1}{3}=\lambda$，由定比分点公式得

$$x=\frac{2+\frac{1}{3}\times 3}{1+\frac{1}{3}}=\frac{9}{4},\qquad y=\frac{3+\frac{1}{3}\times 5}{1+\frac{1}{3}}=\frac{7}{2}，所以分点M\left(2\frac{1}{4},3\frac{1}{2}\right)。$$

1.33　已知两点$A(2, 1)$，$B(3, 9)$。求(a)分线段$\overline{AB}$得比值$4:1$的点M的坐标；(b)分线段$\overline{BA}$得比值$4:1$的点M的坐标。

解 设分点为$M(x, y)$。(a)因为$\frac{AM}{MB}=\frac{4}{1}$，所以有$x=\frac{2+4\times 3}{1+4}=\frac{14}{5}$，$y=\frac{1+4\times 9}{1+4}=\frac{37}{5}$，点$M\left(2\frac{4}{5},7\frac{2}{5}\right)$。$(b)$因为$\frac{BM}{MA}=4:1=4$，故有$x=\frac{3+4\times 2}{1+4}=\frac{11}{5}$，$y=\frac{9+4\times 1}{1+4}=\frac{13}{5}$，点$M\left(2\frac{1}{5},\ 2\frac{3}{5}\right)$。

1.34　下列各对坐标表示一线段的两端点，试求它们的两个三等分点。

(a) $(-1, 2)$，$(-10, -1)$；　　(b) $(11, 6)$，$(2, 3)$。

解 设$A(-1, 2)$，$B(-10, -1)$，$C(11, 6)$，$D(2, 3)$，两个三等分点分别为$M_1(x_1y_1)$，$M_2(x_2, y_2)$。

(a) 因为$\frac{AM_1}{M_1B}=1:2=\frac{1}{2}$，　$\frac{AM_2}{M_2B}=2:1=2$由公式得

$$x_1=\frac{-1+\frac{1}{2}\times(-10)}{1+\frac{1}{2}}=\frac{-12}{3},\qquad y_1=\frac{2+\frac{1}{2}(-1)}{1+\frac{1}{2}}=\frac{3}{3}，故M_1(-4, 1)。$$

$$x_2=\frac{-1+2\times(-10)}{1+2}=\frac{-21}{3},\qquad y_2=\frac{2+2\times(-1)}{1+2}=0，故M_2(-7, 0)。$$

(b) 因为$\frac{CM_1}{M_1D}=\frac{1}{2}$，　$\frac{CM_2}{MD}=2$，由公式得

$$x_1=\frac{11+\frac{1}{2}\times 2}{1+\frac{1}{2}}=8,\qquad y_1=\frac{6+\frac{1}{2}\times(3)}{1+\frac{1}{2}}=5，故M_1(8, 5)。$$

$$x_2=\frac{11+2\times 2}{1+2}=5,\qquad y_2=\frac{6+2\times 3}{1+2}=4，故M_2(5, 4)。$$

1.35 点C(2, 3)将线段$\overline{AB}$分为1∶2。如已知点A的坐标为(1, 2)，求点B的坐标。

解 因为$\frac{AB}{BC}=-\frac{3}{2}$，点$B$($x$, y)由定比分点公式得

$$x=\frac{1+\left(-\frac{3}{2}\right)\times 2}{1-\frac{3}{2}}=4,\qquad y=\frac{2+\left(-\frac{3}{2}\right)\times 3}{1-\frac{3}{2}}=5,\text{ 故}B(4,\ 5)。$$

1.36 线段$\overline{AB}$被点M_1(1,2)和点M_2(3, 4)分成相等的三部分。求点A和B的坐标。

解 设点A(x_1, y_1)，点B(x_2, y_2)。因为$\frac{M_2A}{AM_1}=-\frac{2}{1}$，$\frac{M_1B}{BM_2}=-\frac{2}{1}$，由定比分点公式分别得：

$$x_1=\frac{3+(-2)\times 1}{1-2}=-1,\quad y_1=\frac{4+(-2)\times 2}{1-2}=0,\text{ 故}A(-1,\ 0),$$

$$x_2=\frac{1+(-2)\times 3}{1-2}=5,\qquad y_2=\frac{2+(-2)\times 4}{1-2}=6,\text{ 故}B(5,\ 6)。$$

1.37 两点A(x, 5)和B(−2, y)间的线段被点M(1,1)平分。求出点A的横标和点B的纵标。

解 因为点M为$\overline{AB}$的中点，由中点坐标公式得 $1=\frac{x+(-2)}{2}$，$1=\frac{5+y}{2}$，解为

$x=4$，$y=3$，故点A(4, 5)，点B(−2, −3)。

1.38 已知三角形的顶点的坐标A(3, −2)，B(5, 2)和C(−1, 4)，求它中线的长。

解 设三角形ABC三边AB，AC，BC的中点依次分别为E_1(x_1, y_1)，E_2(x_2, y_2)，E_3(x_3, y_3)，由中点坐标公式得

$$x_1=\frac{3+5}{2}=4,\qquad y_1=\frac{-2+2}{2}=0,\text{ 故}E_1(4,\ 0);$$

$$x_2=\frac{3+(-1)}{2}=1,\qquad y_2=\frac{-2+4}{2}=1,\text{ 故}E_2(1,1);$$

$$x_3=\frac{5+(-1)}{2}=2,\qquad y_3=\frac{2+4}{2}=3,\text{ 故}E_3(2,\ 3)$$

中线CE_1之长为$|CE_1|=\sqrt{(4+1)^2+(-4)^2}=\sqrt{41}$.

中线BE_2之长为$|BE_2|=\sqrt{(1-5)^2+(1-2)^2}=\sqrt{17}$.

中线AE_3之长为$|AE_3|=\sqrt{(2-3)^2+(3+2)^2}=\sqrt{26}$.

1.39 直线由两点A(−1, 4)和B(2, 1)决定，在这条直线上求横标等于5单位的点。

解 设所求点为M(5, y)，(图1-18)。$\frac{AM}{MB}=\lambda$.由定比分点公式得$5=\frac{-1+2\lambda}{1+\lambda}$，

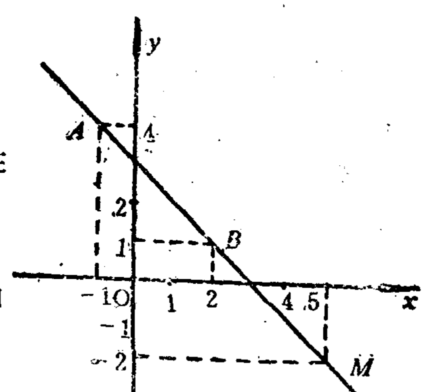


图 1-18

解 $\lambda=-2$. 所以有 $y=\dfrac{4+(-2)\times 1}{1-2}=-2$. 故点 $M(5,\ -2)$ 为所求.

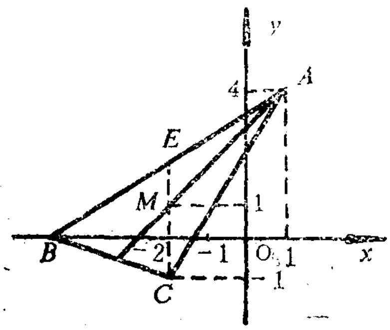


图 1-19

1.40 已知三角形的顶点：$A(1,\ 4)$，$B(-5,\ 0)$，及 $C(-2,\ -1)$. 求它的中线的交点。

解 设 AB 边之中点为 $E(x_1,\ y_1)$。中线之交点为 $M(x_2,\ y_2)$，图1-19）由中点坐标公式得

$x=\dfrac{1+(-5)}{2}=-2$，$y=\dfrac{4+0}{2}=2$，故 $E(-2,\ 2)$。根据三角形三中线交于一点的性质知 $|CM|=\dfrac{2}{3}|CE|$，$|ME|=\dfrac{1}{3}|CE|$，所以 $\dfrac{CM}{ME}=\dfrac{2}{1}$，$x_2=\dfrac{-2+2\times(-2)}{1+2}=-2$，

$y_2=\dfrac{-1+2\times 2}{1+2}=1$. 故所求点为 $M(-2,\ 1)$.

1.41 已知平形四边形的相邻两顶点为 $A\left(-4\frac{1}{2},\ -7\right)$ 和 $B(2,\ 6)$ 及对角线的交点 $M\left(3,\ 1\frac{1}{2}\right)$. 求它的其余两个顶点。

解 设其余两个顶点为 $C(x_1, y_1)$，$D(x_2, y_2)$。(图1-20). 因为点 M 为 AC 的中点，也是 BD 的中点，所以 $\dfrac{AC}{CM}=-2$，$\dfrac{BD}{DM}=-2$. 由定比分点公式得：

$$x_1=\frac{-\frac{9}{2}+(-2)\times 3}{1-2}=10\frac{1}{2},$$

$$y_1=\frac{-7+(-2)\left(\frac{3}{2}\right)}{1-2}=10.$$

$$x_2=\frac{2+(-2)\times 3}{1-2}=4,$$

$$y_2=\frac{6+(-2)\times\frac{3}{2}}{1-2}=-3$$

由此得到其余两个顶点 $C\left(10\frac{1}{2},\ 10\right)$，$D(4,\ -3)$

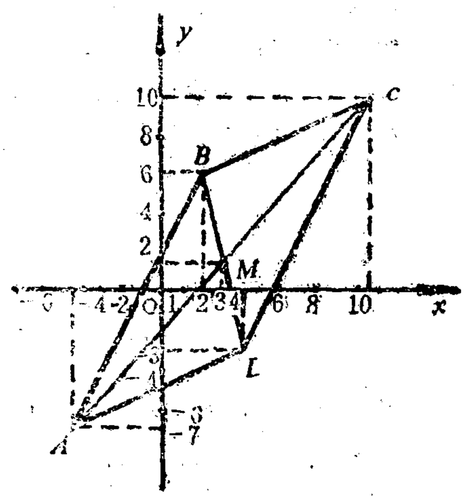


图 1-20

1.42 点 $A(1,\ 1)$ 到点 B 的长为5单位，线段 $\overline{AB}$ 中点的横标为3单位，求点 B 的坐标。

解 设点 $B(x,\ y)$，如图1.21所示。由题设条件知 $|AB|=5$. 所以得方程组为

$$\begin{cases}(x-1)^2+(y-1)^2=25 & ①\\ \dfrac{x+1}{2}=3 & ②\end{cases}$$

由②得 $x=5$，代入①得 $(y-1)^2=9$，故 $y-1=\pm 3$，即 $y_1=4$，$y_2=-2$，所求点 B 有两个，