交通系統高等院校
函授试用教材

高等数学

第二册

华东水利学院　武汉水运工程学院
大連海运学院　西 安 公 路 学 院　合編

人民交通出版社

交通系统高等院校
函授试用教材

高等数学

第二册

华东水利学院　武汉水运工程学院
大連海运学院　西 安 公 路 学 院　合編

人 民 交 通 出 版 社

本書由华东水利学院等四院校的函授教师合編。全書共分三册：第一册內容为平面解析几何，函数，極限与連續；第二册为導数与微分，微分法的应用，不定積分，定積分及其应用；第三册为矢量代数，立体解析几何，多元函数微分学，重積分，級数，微分方程。

在內容的安排与敍述上，力求貫徹“少而精”和結合函授生的自学特点。限于編者的思想水平和业务水平，錯誤之处希望讀者給予指正。

交通系統高等院校

函授試用教材

高等数学

第二册

华东水利学院　武汉水运工程学院

大連海运学院　西安公路学院　合編

*

人民交通出版社出版

（北京安定門外和平里）

北京市書刊出版业营业許可証出字第〇〇六号

新华书店北京发行所发行　全国新华书店經售

人民交通出版社印刷厂印刷

*

1965年11月北京第一版　1965年11月北京第一次印刷

开本：850×1168 $\frac{1}{32}$　印張：5 $\frac{3}{16}$ 張

全書：136,000字　印数：1-2,900册

統一書号：K15044·8049

定价（科三）：0.60元

目　　录

第四章　导数及其应用

第一部分　导数与微分

第二部分　导数的应用

第五章　不定积分

第六章　定积分及其应用

第一部分　定积分及其計算

第二部分　定积分的应用

第四章　导数及其应用

第一部分　导数与微分

在第二章里，我們把变量之間的依从关系称为函数关系。在很多实际問題的研究中，建立变量間的函数关系，仅是初步的工作，还需要进一步地探討。例如对运动中的物体，除了需要知道它的位移与时間的函数关系外，有时还需要知道它在某一时刻的速度。又如当自变量少許改变时，函数值亦有相应的改变；如果不要求得到函数改变量的精确数值，又将如何简便地計算它的近似值呢？从这两类問題就引出了导数与微分两个概念。它們都是在极限的基础上建立起来的。

第一部分除主要闡明导数与微分这两个概念外，还建立了一套导数和微分公式，解决了初等函数求导数的問題。

这部分学习的要求是：正确地理解导数与微分的概念，注意它們是由具体問題抽象出来的，且具有广泛的应用；通过练习而牢固地記住基本初等函数的导数公式和导数运算的法則，特别是复合函数的求导法則。

§ 4-1　引出导数概念的几个問題

我們先討論两个具体問題，而后引出导数概念。

問題一　非匀速（变速）直綫运动速度

設有一质点，从某点（为具体起見就設是原点）开始作直线运动，在时間 t 內经过路程 s，現在，我們来討論这时质点的运动速度。

如果运动是匀速的（任何单位时間內经过的路程都相等），則由中学的物理可知，在任何时刻它的速度 v 总是等于路程 s 与

时間 t 之比，即

$$v=\frac{s}{t}\text{。}\qquad(1)$$

然而在实践中，碰到的常常是非匀速的运动，这种运动的速度时刻在变化着。于是式（1）就不能表示质点在时間 t 内任何时刻的速度，它只能表示在时間 t 内的平均速度，因此，我們必須用新的方法来解决非匀速运动在任何时刻的速度問題。

假設质点从原点 O 开始作直线运动，在时間 t 内所经过的路程是 s。对于每一时刻 t 都有路程 s 的一个值与它对应，因此路程 s 是时間 t 的函数：

$$s=s(t)$$

当 $t=0$ 时，质点在点 O，故 $s(0)=0$（图4-1）。

现在来研究质点在时刻 t_0 时运动速度。在时刻 t_0 附近的一段时間——从 t_0 到 $t_0+\Delta t$ 内，质点所经过的路程是

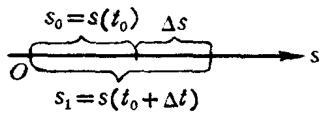

图 4-1

$$\Delta s=s_1-s_0=s(t_0+\Delta t)-s(t_0)$$

当 Δt 很小的时候，由于质点的运动速度变化很小，从而可以近似地当作匀速运动来处理，于是可以用 Δt 这段时間内的平均速度

$$\bar{v}=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}$$

来近似地代替质点在时刻 t_0 的速度。这种代替当 Δt 愈小时，平均速度 $\bar{v}$ 也就愈精确地表示质点在时刻 t_0 的运动速度。如果令 $\Delta t\to 0$，那么极限

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}$$

就精确地反映了质点在时刻 t_0 的运动速度。

由此我們得到质点作直线运动（运动方程是 $s=s(t)$）在时刻 t_0 的速度 v_0 是：路程增量 Δs 与时間增量 Δt 之比，当 $\Delta t\to 0$ 时的

极限，即

$$v_0=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}\text{。}\qquad(4\text{-}1)$$

上述問題的处理过程，是把非均匀变化的問題在一段很短的过程內，近似地看作均匀变化的問題，再考虑其极限情况。这种思想方法，在处理实际問題时具有普遍地指导意义。下面用这种方法再来研究质量分布不均匀的棒的线密度問題。

問題二　质量分布不均匀的棒的綫密度❶

在物理上，称形状接近于直线段的細长物体为細棒。設有一质量为 m、长度为 l 的細棒，如果质量分布是均匀的，那么棒上任何点的线密度是

$$\rho=\frac{m}{l}$$

但是在实际問題中质量分布往往是不均匀的，也就是說，有些部分密一些，有些部分疏一些。那么，如何确定棒上任何点的线密度呢？以下采用与处理速度問題一样的方法来解决。

图　4-2

取棒的一端作为原点，棒所在的位置作为 x 軸（图4-2），則对于每一个 $x(>0)$ 的值，都对应着一段棒长，这一段棒含有一定的质量 m，因而 m 是 x 的一个函数，它随着 x 的增大而增大，我們把这个函数記作

$$m=m(x)$$

現在来研究棒在点 x_0 的线密度。在点 x_0 附近的一小段——从 x_0 到 $x_0+\Delta x$ 之間的这一段上，細棒所含的质量是

$$\Delta m=m(x_0+\Delta x)-m(x_0)$$

当 Δx 很小的时候，在这一段上的质量 Δm 的分布可近似地認为是均匀的，于是可以用 Δx 这一小段的平均线密度

❶ 每單位長度上所含的質量称为綫密度。

$$\bar{\rho}=\frac{\Delta m}{\Delta x}=\frac{m(x_0+\Delta x)-m(x_0)}{\Delta x}$$

来近似地代替細棒在点 x_0 的线密度。当 Δx 愈小时，平均线密度 $\bar{\rho}$ 就愈精确地描述細棒在点 x_0 的线密度。如果令 $\Delta x\to 0$，那么极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta m}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{m(x_0+\Delta x)-m(x_0)}{\Delta x}$$

就精确地反映了細棒在点 x_0 的线密度。

由此我們得到棒在点 x_0 的线密度 ρ_0 是：质量的增量 Δm 与长度的增量 Δx 之比，当 $\Delta x\to 0$ 时的极限，即

$$\rho_0=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{m(x_0+\Delta x)-m(x_0)}{\Delta x}\text{。}\qquad (4\text{-}2)$$

习題 1.某物体的質量是 1 克，現对該物体加热，使它的溫度从 0°C 升高到 τ°C需要热量 Q 卡，已知热量 Q 是溫度 τ 的函数，即 $Q=Q(\tau)$。則該物体在溫度 τ_0 时的比热如何？（使質量 1 克的物体溫度升高 1°C 时所需的热量，称为比热）。

答： 1.比热 $c_0=\lim\limits_{\Delta\tau\to 0}\dfrac{\Delta Q}{\Delta\tau}=\lim\limits_{\Delta\tau\to 0}\dfrac{Q(\tau_0+\Delta\tau)-Q(\tau_0)}{\Delta\tau}$。

§ 4-2 导数的概念

1.导数的定义 上面所讲的两个問題，虽然物理意义不同，但解决問題的过程是一样的，一个是用平均速度的极限去表示某时刻的瞬时速度。一个是用平均线密度的极限去表示某点的线密度。現在从这两个問題中抽去它們具体的物理意义，单純就处理問題的数学方法来看，它們的共同之点是：

首先，各个問題都存在着一个函数： $y=f(x)$；

其次，各个問題都必須考虑函数在点 x_0 的增量

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$$

以及它与自变量增量之比

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

这个比值代表在区間$[x_0, x_0+\Delta x]$上函数y对于x的平均变化率；

最后，研究当$\Delta x\to 0$时比式$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$的极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

如果极限存在，那么这个极限就表示了在点x_0处函数y对自变量x的变化率。

以上的两个問題实质上都是求函数的变化率問題。在数学上称函数的变化率为导数，它在高等数学中占有很重要的地位。

定义： 設在$x=x_0$处自变量取得增量Δx时，相应地函数$y=f(x)$取得增量Δy。如果这两个增量之比$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$，当$\Delta x\to 0$时的极限存在，即极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\tag{4-3}$$

存在，則称此极限为函数$y=f(x)$在点x_0的**导数**，記作

$$f'(x_0)\text{ 或 }y'|_{x=x_0}$$

即
$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\text{。}$$

如果式（4-3）的极限不存在，則說函数$y=f(x)$在点x_0的导数不存在。当式(4-3)为无穷大，那么导数是不存在的，但为方便起見，我們往往也說函数$y=f(x)$在点x_0的导数为无穷大，記为$f'(x_0)=\infty$。

如果函数$y=f(x)$在点x_0处有导数，則称此函数在点x_0可导；如果函数$y=f(x)$在区間(a,b)內每一点x都可导，則称此函数在这区間(a,b)內可导，这时对于該区間內的每一个x值，都有对应的函数值$f'(x)$，故$f'(x)$是x的函数，我們称这个函数$f'(x)$为$f(x)$的**导函数**。为简便起見，今后在不至于引起混淆的地方，导函数也简称为导数，并記作

$$f'(x) \text{ 或 } y'。$$

把式（4-3）中的 x_0 换为 x 就得到求导函数的公式为

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}。\qquad (4-4)$$

必須注意，在上述极限过程中，Δx 是变量，而 x 是看作固定不变的数。自然对不同的 x 值来說，对应的极限值，一般也是不同的，故 $f'(x)$是 x 的函数，它在点 x_0 的函数值 $f'(x_0)$，就是函数 $f(x)$在点 x_0 的导数。

应用"导数"这个术語可把§4-1的两个物理問題重述如下：

1)质点运动的速度是路程 s 对时間 t 的导数，即

$$v=s'(t);\qquad (4-1')$$

2)棒的綫密度是质量 m 对长度 x 的导数，即

$$\rho=m'(x)。\qquad (4-2')$$

根据导数的定义，要計算函数 $y=f(x)$在点 x 的导数，可以按下列三个步驟来进行，叫做求导的"三步法"。

第一步：将 x 固定，当 x 增加 Δx 后，算出函数的增量

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x);$$

第二步：算出 Δy 与 Δx 之比

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x};$$

第三步：令 $\Delta x\to 0$，求比的极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x},$$

如果这个极限存在，則它就是函数 $y=f(x)$在点 x 的导数。

例1 求 $y=\sqrt{x}$（$x\geqslant 0$）在点 x 的导数。

解 第一步：給 x 以增量 Δx，相应的函数增量是

$$\Delta y=\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x};$$

第二步：$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}$

$$=\frac{(\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x})(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}};$$

第三步：$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

故得
$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}。$$

如果要求 $f(x)$ 在 $x=9$ 处的导数，则将 $x=9$ 代入就得

$$f'(9)=\frac{1}{2\sqrt{9}}=\frac{1}{6}$$

这是由于函数 $f(x)$ 在某点 x_0 的导数，就是导函数 $f'(x)$ 在 $x=x_0$ 处的函数值 $f'(x_0)$。

有些初学者把 $f'(x_0)$ 理解为先将 x_0 代入 $f(x)$ 中然后再对 $f(x_0)$ 求导数。这样理解 $f'(x_0)$ 的意义是錯誤的。

习题 1.用“三步法”計算下列函数在給定点的导数：

a) $y=ax^3$ 在 $x=1$ 处；

b) $y=\dfrac{1}{x}$ 在点 x 处。

2.若 $y=f(x)$ 在点 x_0 可导，試求极限

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

提示：令 $x-x_0=\Delta x$

答： 1. a) $3a$； b) $-\dfrac{1}{x^2}$。

2.函数的可导性与連續性 由导数的定义，可以推知：**若函数在点 x_0 可导，則該函数在点 x_0 必定連續。**

事实上，若 $f(x)$ 在点 x_0 可导，則由导数的定义，极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)$$

存在。根据极限与无穷小的关系可得

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)+\alpha$$

其中 α 是当 $\Delta x\to 0$ 时的一个无穷小。两端各乘以 Δx，得到

$$\Delta y=f'(x_0)\Delta x+\alpha\Delta x$$

从而
$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}[f'(x_0)\Delta x+\alpha\Delta x]=0$$

根据連续的定义，可知 $y=f(x)$ 在点 x_0 連续。

读者自然会想到相反的問題，如果函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 連续，則它是否在点 x_0 可导呢？关于这个問題，可以举例說明，**函数在点 x_0 連續时，它在点 x_0 可能有导数，也可能沒有导数**。下面的习題就是一个例子。

习题 3. 試証明函数 $y=\sqrt[3]{x}$ 在点 $x=0$ 連續，但在該点不可导。

3. 导数的几何意义 为了对导数有一直观的认識，我們用几何图形来說明导数的意义。

設函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的导数 $f'(x_0)$ 存在。在曲线 $y=f(x)$ 上取一定点 M_0，設其坐标是 $(x_0, f(x_0))$（图4-3）；又 M_1 是曲线上邻近 M_0 的一点，設其坐标是 $(x_0+\Delta x, f(x_0+\Delta x))$。于是，从图4-3可以看出，当点 M_1 沿曲线趋向于点 M_0 时（$M_1\to M_0$），Δx 就趋近于0（$\Delta x\to 0$），这时割线 M_0M_1 趋向于确定的极限位置 M_0T，这条直线 M_0T 称为曲线 $y=f(x)$ 在点 M_0 处的**切綫**。而割线 M_0M_1 的斜率是

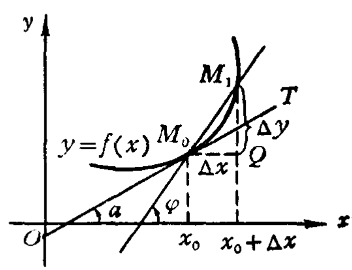

图 4-3

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

当 $\Delta x \to 0$ 时，由于割线 M_0M_1 趋向于切线 M_0T，故割线 M_0M_1 的倾角 φ 就趋向于切线 M_0T 的倾角 α，从而割线 M_0M_1 的斜率 $\operatorname{tg}\varphi$ 就趋向于切线 M_0T 的斜率 $\operatorname{tg}\alpha$，即

$$\operatorname{tg}\alpha = \lim_{M_1 \to M_0} \operatorname{tg}\varphi = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)。 \tag{4-5}$$

这样一来，我們得到导数 $f'(x_0)$ 的几何意义如下：**函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的导数 $f'(x_0)$，在几何上代表曲綫 $y=f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 的切綫的斜率。**

根据导数的几何意义及解析几何中直线的点斜式可知，曲线 $y=f(x)$ 在点 $M_0(x_0, f(x_0))$ 的**切綫方程**是

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)。 \qquad y_0 = f(x_0)$$

通过点 $M_0(x_0, f(x_0))$ 而与切线 M_0T 垂直的直线叫做曲线在点 M_0 的**法綫**。曲线 $y=f(x)$ 在点 $M_0(x_0, f(x_0))$ 的**法綫方程是**

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)。 \quad f'(x_0) \neq 0$$

問題　1.若函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的导数为无穷大，则函数在点 $M_0(x_0, y_0)$ 的切线方程是什么？

习题　4.求等軸双曲线 $y=\frac{1}{x}$ 在点 $(2, \frac{1}{2})$ 的切线及法线方程。

答：　4.　切线方程：$x+4y-4=0$；

法线方程：$8x-2y-15=0$。

§ 4-3　几个基本初等函数的导数公式

在导数的定义中，我們不仅闡明了导数的实质，也給出了計算导数的方法。但是，对每一个具体的函数来說，如果都依照“三步法”来計算导数，常常会感到很麻煩，也給导数的应用带来很大的困难。另一方面，在应用上所遇到的函数大都是初等函数，因而如何简捷地求出初等函数的导数，就成为迫切需要解决的問題了。而初等函数又是由基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次复合步驟所构成的，因此，我們首先来解决求基本初等函数的导数公式（分别在本节与§ 4-6 中介紹），然后再介紹

和、差、积、商以及复合函数的求导法則（分别在§4-4、§4-5中介紹）。有了这些基本初等函数的导数公式及求导法則，就很容易計算出初等函数的导数。

本节运用“三步法”推出一些基本初等函数的导数公式。

1.常数的导数　設 $f(x)=C$（其中 C 是一个常量）。

第一步：这个函数的特点是，不論自变量取什么值，它所对应的函数值都是 C，故当給 x 以增量 Δx 时，相应的函数增量为 $f(x+\Delta x)-f(x)=C-C=0$；

第二步：

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{0}{\Delta x}=0\text{；}$$

第三步：

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}0=0$$

于是得到公式

$$(C)'=0 \tag{4-6}$$

即常数的导数等于零。

2.冪函数的导数　設 $y=x^n$（其中 n 为正整数）。

第一步：給 x 以增量 Δx，相应的函数增量是

$$\Delta y=(x+\Delta x)^n-x^n$$

由牛頓二項式定理，知

$$(x+\Delta x)^n=x^n+nx^{n-1}\Delta x+\frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}(\Delta x)^2+\cdots$$
$$+(\Delta x)^n$$

故有

$$\Delta y=(x+\Delta x)^n-x^n=nx^{n-1}\Delta x+\frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}(\Delta x)^2+\cdots$$
$$+(\Delta x)^n\text{；}$$

第二步：

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}\Delta x+\cdots+(\Delta x)^{n-1};$$

第三步：

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left[nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}\Delta x+\cdots\right.$$

$$\left.+(\Delta x)^{n-1}\right]=nx^{n-1}$$

于是得到公式

$$(x^n)'=nx^{n-1} \tag{4-7}$$

即幂函数 x^n 的导数等于其指数 n 乘上指数减去 1 的幂函数。例如

$$(x^6)'=6x^{6-1}=6x^5;\ (x)'=1\cdot x^{1-1}=1\cdot x^{0}=1\text{。}$$

当 n 不是正整数，公式（4-7）的結果仍然成立，这个結論我們将在§4-6中給以証明，現在先提前应用。例如

$$(\sqrt{x})'=(x^{\frac{1}{2}})'=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{x}};$$

$$\left(\frac{1}{x^3}\right)'=(x^{-3})'=-3x^{-3-1}=-3x^{-4}=-\frac{3}{x^4}\text{。}$$

3.正弦函数的导数　設 $y=\sin x$。

給 x 以增量 Δx，相应的函数增量是

$$\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2}{\Delta x}\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$$

因为

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}=1$$

又 $\cos x$ 处处連续，故有

$$\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=\cos x$$

从而

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=1\cdot\cos x=\cos x$$

于是得到公式

$$(\sin x)'=\cos x。\qquad (4\text{-}8)$$

4.余弦函数的导数 設 $y=\cos x$。由完全类似的方法推导可得

$$(\cos x)'=-\sin x。\qquad (4\text{-}9)$$

5.对数函数的导数 設 $y=\log_a x$ $(a>0, a\neq 1, x>0)$。给 x 以增量 Δx，对应的函数增量是

$$\Delta y=\log_a(x+\Delta x)-\log_a x,$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\log_a(x+\Delta x)-\log_a x}{\Delta x}=\frac{1}{\Delta x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)$$

$$=\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{\Delta x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)=\frac{1}{x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}$$

故得

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{x}\left[\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right]$$

$$=\frac{1}{x}\lim_{\Delta x\to 0}\left[\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right]。$$

为了把以上的极限继续求下去，須要解决求极限

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}$ 的問題，現对此极限計算如下：

令 $\frac{\Delta x}{x}=\alpha$，則当 $\Delta x\to 0$ 时 $\alpha\to 0$，于是