

十年制学校高中課本(試用本)

代数第一册教学参考书

人 民 教 育 出 版 社

十年制学校高中課本(試用本)

代数第一册教学参考书

北京市书刊出版业营业许可登记证字第二号

人民教育出版社編輯出版(北京景山东街)

新华书店发行

人民教育印刷厂印装

統一书号: K7012·1842 字数: 61 千
开本: 787×1092 毫米 1/32 印张: 3 $\frac{1}{8}$

1963 年第一版

第一版 1963 年 6 月第一次印刷

北京: 1—2,800 册

定价 0.24 元

十年制学校高中課本(試用本)

代数第一冊教学参考书

目 录

第一章 函数和它的图象	1
I 函数	2
II 正比例函数、反比例函数	9
III 一次函数	18
IV 二次函数	21
第二章 任意角的三角函数	27
第三章 三角函数的性质和图象	38
第四章 两角和与两角差的三角函数, 倍角与半角的三角函数	51
第五章 反三角函数	70
第六章 三角方程	78

第一章 函数和它的图象

(一)本章是在学生积累了一些函数的感性知識的基础上系統地来研究函数和它的图象。教材中首先通过变量的概念引入函数的概念,然后研究了四种最简单也是最重要的函数:正比例函数、反比例函数、一次函数和二次函数。

函数是中学数学教学的重要内容之一,它不仅对学习中学其他数学知識如方程、不等式、恒等变形等有关,而且对进一步学习高等数学以及学习其他科学如物理、化学,也有着很大的作用。

学生在学习本章之前,已經有了函数的初步观念。例如在算术里学习四則运算中已知数的变化所引起的运算結果的变化,分数里分子、分母的变化所引起的分数值的变化,正比例和反比例等;在初中代数里学习代数式中的字母取不同的数值时計算相应的代数式的值,一个代数式在字母取哪些数值时失去意义,二元一次方程的图象等,都体现了数量之間的依存关系。虽然沒有引用函数这个名称,但实际上已給予学生函数的感性知識。这些都是系統地学习函数和它的图象的基础,本章就在这个基础上来讲解的。在学习了本章之后,还需要通过一系列的初等函数的学习,例如三角函数、反三角函数、指数函数、对数函数等,来扩大和加深关于函数的知識。

(二)本章的教学要求主要是:

1. 使学生理解函数的意义, 熟悉正比例函数、反比例函数、一次函数和二次函数的图象、性质以及它们的应用.

2. 使学生获得运用初等方法研究一些简单函数的技能, 能够正确地绘制函数的图象, 学会探讨一些简单函数的特性.

(三)本章教材的重点是函数的概念. 这也是本章教材的难点, 又是学好本章以及以后各章中所涉及到的各种函数的关键.

(四)本章教材的教学时间估计需要18课时左右. 各部分所需要的教学时间大致如下:

I 函数	5
II 正比例函数, 反比例函数	6
III 一次函数	3
IV 二次函数	4

I 函数

教材说明

本单元教材是在学生学习了代数式、方程和实数的基础上来讲解的, 包含变量和常量、函数的定义、函数的定义域和值域、函数的三种表示法、函数的记号和函数的图象等几个主要内容. 这些内容都是以函数的概念为中心, 围绕着函数概念逐步阐明函数的含义, 使学生一开始对函数的概念有一个正确的理解.

(一)本单元教学要求主要是:

1. 使学生理解什么是变量、什么是常量, 能够对问题里

所涉及到的数量,分清哪些是变量,哪些是常量.

2. 使学生理解什么是自变量,什么是自变量的函数,能够对问题里所涉及到的两个有联系的变量,根据问题中的条件区分出哪一个是自变量,哪一个是自变量的函数.

3. 使学生理解什么是函数的定义域和值域,能够根据代数式的意义指出由这个代数式所表示的函数的定义域以及一些简单函数的值域.

4. 使学生理解记号 $f(x)$ 和 $f(a)$ 的意义,能够正确地求出当自变量取某一个指定值时的函数值.

5. 使学生理解函数的三种表示法,能够用解析式表示一些简单的实际问题中的变量之间的函数关系,并且能够用描点法作出函数的图象.

(二)本单元教材的重点是函数的概念,这也是本单元教材的难点.

正确理解函数的概念是学好各种初等函数的基础,也是今后学习高等数学必须具备的知识.因此函数的概念是本单元教材的重点.又因为这个概念比较抽象,学生不易理解,因此它又是本单元教材的难点.

为了突出这个重点,解决这个难点,教材围绕着函数概念,通过一些实际问题的分析,逐步揭露出变量之间的函数关系.主要步骤是:

1. 首先通过实际例子,引进变量和常量的概念.因为函数关系是变量之间的依从关系,所以研究函数必须从变量谈起.变量的学习不是从现在开始,在过去研究的许多问题中

所涉及的量，多有变量存在。这里仅从学生已有的知識中抽象出变量的概念，引起学生注意到研究变量的必要。

2. 仍旧引用原来的例子，进一步考察問題里的变量的一个重要特性，使学生发现变量的变化不是孤立的，它們是相互影响，相互制約，按照着一定的关系联系在一起的。由此把問題里的两个变量加以区分，引进自变量和自变量的函数两个概念，并給出了它們的定义。为了加深学生对这两个概念的理解，課本还指出含有字母的代数式都是它所含字母的函数，使学生了解到过去学过的代数式都可以看作函数来研究。

3. 仍引用原来的例子，引导学生去分析，使他們发现自变量的值虽然可以任意选择，但往往有一定的变化范围。由此引进函数的定义域和值域。通过函数的定义域和值域的学习，使学生認識到要确定一个函数，必須知道变量的变化范围。

4. 变量間的函数关系，实际上是一种对应关系，那么怎样来表示这种对应关系呢，这就引进了三种函数关系的表示法。这三种表示法，实际上都是由自变量的值来确定函数对应值的方法。例如，在解析法中对于每一个自变量的值，根据解析式所示的运算步骤，經過計算就可得出对应的函数值。在列表法中，对于每一个自变量的值都可直接从表中得出对应的函数值。在图象法中，对于每一个自变量的值，可以通过作图和度量的手續得出对应的函数值。教材中詳細讲解了这三种常用的函数关系表示法，同时比較了它們各自的优缺点。通过函数的三种表示法的学习，可以使学生具体地認識什么

是变量之间的对应规律。

讲清函数的含义，要抓住两个要素，就是：

- (1) 自变量的定义域，
- (2) 变量间的对应规律。

通过函数的定义域和函数关系的三种表示法的学习，可以使学生更深刻地理解函数的含义。

5. 讲清了函数的三种表示法之后，再把它們归纳成一般的記法，提出了函数和函数值的記号 $f(x)$ 和 $f(a)$ 。

函数和函数值的記号比較抽象，放在最后引入，可以使学生在接受这个記号之前有更多的感性知識，减少困难。

通过上面五个步骤来进行函数概念的教学，前后联系比較紧密，概念的引进也比较自然，问题的研究由具体到抽象逐步深入，可以减少学习时理解函数概念的困难。教材中結合每一个步骤的讲解，都配备了适当数量的习题来加深学生对函数概念的理解。

最后，在正确地理解了函数概念的基础上，讲清函数的图象的概念，并且說明作函数的图象的一般方法，为以后学习各种初等函数的性质和作它們的图象作好准备。

(三)其他

1. 区分变量和常量，必須根据所研究的问题来决定。同一个量在某些場合可以看作是常量，但在另外一些場合却可以看作是变量。例如 § 1.1 中第一个例子，单价 a 元是一个常量，这是指在研究某种确定的貨物和确定的价格时來說的，如果所研究的是各种不同貨物的价格，或者是各个不同时期

不同地点的价格，那么单价 a 就不是一个常量了。教材中在定义变量和常量时提出了“在研究过程中”就是指这个意义而说的。同样，自变量和函数也是随问题来决定的。

2. 函数的一般定义是建立在“集合”和“对应”这两个基本概念的基础上的。在函数里所研究的“变量”，不仅可以是数，也可以是一般的元素。但在中学里，讲授函数的一般定义，学生接受上有困难。

函数概念的形成是逐步的，应该有一个发展过程，有些问题将在以后各章中加以研究，有些问题将在高等数学中研究。本单元所讨论的函数，具有下列一些特点：

(1) 这里提到的函数，只是一个自变量的函数，也就是单变量的函数，关于多变量的函数，在本章 § 1.11 联变中提到一些。

(2) 变量可取的值限于实数，也就是说所研究的函数只限于实变数的函数，其他变量的函数留在高等数学中学习。

(3) 函数能表示为 $y=f(x)$ 的形式，也就是说所研究的函数都是显函数。在习题一布置了一些化隐函数为显函数的练习(如第 8 题)，为将来学习隐函数作准备。

(4) 对于自变量每一个确定的值，函数的对应值是唯一的。也就是说，所研究的都是单值函数。关于多值函数将在第五章反三角函数中讨论到。

3. 决定函数的定义域或值域，一般都要由实际问题的意义来确定。例如 § 1.1 的第一个例子的定义域是 $x \geq 0$ ，值域是 $y \geq 0$ ，习题一中的第 6 题就是利用这种方法来确定的。但

是，当抽象地研究用代数式所表示的函数时，式子中的变数没有具体指明表示任何实际的量，这时的定义域是指不使这个代数式失去意义的自变量的值的全体，例如 § 1.3 中所举的例题。在习题一中也有同样的练习（如第 4 题和第 5 题）。

4. 函数关系的三种表示法，各有它的优缺点，各有它的独特应用的场合。教材中都已具体说明。在以后具体研究各种初等函数时，常常是把三种方法联合起来应用。一般先用解析式写出它们的式子。由此计算出自变量和函数的对应数值并列成表格，再把它绘制成图象。但在科学研究，生产实际中，往往先通过实验或调查，搜集资料，把变量间的函数关系利用列表法表示，或得出图象，再从而设法找出函数关系的解析式。这种方法，将在解析几何中学习。

5. 记号 $y=f(x)$ 里的 f 不是表示量， $f(x)$ 不是表示 f 乘以 x 。这里的 f 是表示某一种的对应法则，根据这种法则，对于自变量 x 的每一个确定的值，可以求出对应的函数值 y 。以前是字母表数，这里是字母表对应关系。因此，学生对于这个记号，在开始时不大习惯，特别是同一个字母可以表示不同的对应关系，但同一个题目里，则只表示一个对应关系，学生很不习惯。为此课本上配备了比较多的例题和习题。

6. 课本最后讲解了用描点法作函数的图象。在学生已经掌握了作二元一次方程的图象的基础上来讲授这部分内容是没有什么困难的。这里的重点是要求学生理解函数的图象的意义： F 上所有的点的坐标都适合 $y=f(x)$ ，反过来坐标能够适合 $y=f(x)$ 的关系的点都在 F 上。这就需要在轨迹的概

念的基础上来理解的.

在实际作图时, 因为不可能把所有坐标适合 $y=f(x)$ 的点都画出来, 一般只能作出少数几个点. 因此用这种方法作出的图象, 只是近似的. 点作得愈多, 图象也就愈精确.

注 解

习题提示

1. 习题一第4题.

(1) 定义域: 全部实数, 值域: $y \geq 1$.

(2) 定义域: $x \geq 5$, 值域: $y \leq 0$.

(3) 定义域: 全部实数, 值域: 全部实数.

(4) 定义域: $x \neq 4$, 值域: $y \neq 0$.

2. 5题. (1) $x \neq 2$; (2) $x \neq \pm \frac{3}{2}$; (3) $x \geq -2$; (4) $x < 3$.

3. 6题. $y = \frac{180^\circ - x}{2}$, 定义域 $0^\circ < x < 180^\circ$, 值域 $0^\circ < y < 90^\circ$.

4. 16题. (2) $\phi(a+1) - \phi(a) = (a+1)^2 - a^2 = 2a+1$.

5. 17题. $f(-x) = \frac{1+x}{1-x}$, $f(x+1) = \frac{1-(x+1)}{1+(x+1)} = -\frac{x}{x+2}$,

$$f(x)+1 = \frac{1-x}{1+x}+1 = \frac{2}{1+x}, \quad f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} = \frac{x-1}{x+1},$$

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\frac{1-x}{1+x}} = \frac{1+x}{1-x}.$$

$$\begin{aligned} 6. 19 \text{ 題. } F(x) &= ax + b, F(1) = a \cdot 1 + b = 7, \\ F(2) &= a \cdot 2 + b = 16. \end{aligned}$$

解上面的方程組，得 $a=9, b=-2$.

$$\therefore F(x) = 9x - 2.$$

7. 25 題. 可让学生注意 x 在 2 附近时的趋向. 为以后学习函数值趋近于无穷大作准备.

II 正比例函数、反比例函数

教材說明

本单元教材是在学生理解了函数的概念之后，来研究在算术中学过的成正比例或反比例的两个量之间的关系，把正比例和反比例的概念加以扩大和深化，并且在正变（即正比例函数）反变（即反比例函数）的基础上学习了联变，为学习物理作好准备。正比例函数和反比例函数是最简单的函数，通过这两个函数的学习，可以初步掌握一些研究初等函数的方法。

（一）本单元教学要求主要是：

1. 使学生理解什么是正比例函数，什么是反比例函数，能够对所給函数分清哪些是正比例函数或反比例函数，哪些不是。

2. 使学生理解什么是正变、反变和联变，能够正确写出它们的表达式，并且能够熟练地应用这些关系来解决有关的实际问题。

3. 使学生掌握正比例函数和反比例函数的图象和性质，

了解什么叫做增函数, 什么叫做减函数, 学会一些探讨函数性质的初等方法.

(二) 本单元教材的重点是正比例函数, 它的图象和性质.

在实际问题中, 成正比例的量最是大量存在, 因此正比例函数在解决实际问题时有着广泛的应用. 正比例函数也是学习其他各种函数的基础. 正比例函数学习得好, 反比例函数就容易学习. 正比例函数的图象和性质和一次函数的图象和性质有类似的地方 (正比例函数就是一次函数的特殊情况), 学好了正比例函数的图象和性质, 学习一次函数时就容易得多.

1. 为了突出这个重点, 教材中首先通过实际例子引入正比例函数 $y=kx$. 接着用定理的形式证明了成正比例函数的两个变量的任意两对不等于零的对应值成正比例, 反之如果两个变量的任意两对不等于零的对应值成正比例, 那么它们的关系一定是正比例函数的关系. 最后再指出 y 是 x 的正比例函数, 也就是 y 依 x 而正变. 这样就把算术中的正比例, 函数中的正比例函数, 变数法中的正变三者结合在一起. 通过对比, 可以使学生更清楚地理解它们.

在算术里, 我们知道当把一个量扩大(或缩小)若干倍, 另一个量也随之扩大(或缩小)同样的倍数, 那么这两个量成正比例关系, 这是在正有理数范围内定义的. 由于数的概念已扩展到实数范围, 因此比例的概念也就不能再从单纯的扩大或缩小若干倍来理解. 我们说, 如果一个量的任意两个数值的比等于另一个量的对应的两个数值的比时, 那么这两个量

成正比例. 用 x, y 代表这两个变量, 就得出正比例函数 $y=kx$ (k 是不等于零的常数). 在正比例函数 $y=kx$ 中, 如果 $k>0$, $x>0$, 那么 y 和 x 的关系就是算术中的正比例关系. 也就是说正比例函数 $y=kx$ 中的两个变量 x, y 和算术中的成正比例关系的两个量是同样的关系, 仅是把定义域和值域从正有理数扩大到实数范围. 至于正变 $y \propto x$ 和正比例函数 $y=kx$ 实质上是一样的, 仅是写法上的不同而已.

2. 正比例函数 $y=kx$ 的图象是一条直线, 由于学生在初中时已经作过这种图象, 不会产生任何怀疑, 它的证明将在解析几何中详细讲解, 这里不再重复. 教材中仅指出它是通过 $(0, 0)$ 和 $(1, k)$ 两点的一条直线, 这里要求学生掌握下列两点:

(1) 正比例函数的图象是一条通过原点的直线. 这是正比例函数图象的特征.

(2) 比例系数 k 的变化所引起图象的变化. 就是: 当 $k>0$ 时, 直线在第 I 第 III 象限内; 当 $k<0$ 时, 直线在第 II 第 IV 象限内; 当 $|k|$ 增大时, 直线逐渐靠拢 y 轴.

3. 课本最后根据正比例函数的图象讨论了正比例函数的性质. 从图象上来研究函数, 比较直观. 对初学者来说, 容易接受. 这里要求学生掌握正比例函数 $y=kx$ 在 $k>0$ 时是增函数, 在 $k<0$ 时是减函数. 反过来通过正比例函数的性质, 也可帮助学生理解什么是增函数, 什么是减函数, 这里需要指出不是所有增函数都是正比例函数. 学生常常认为当一个量增大时, 另一个量也随着增大的两个量成正比例, 这种错误的理解必须防止. 习题二的第 1 题就是有关这方面的一个

练习.

关于比例系数 k 的几何意义和实际意义也是一个重要内容, 应当使学生很好理解. k 的几何意义在研究图象的几何性质时非常重要. 在解析几何、数学分析中都有用. 比例系数 k 的实际意义在解决实际问题时有用. 联系实际问题例如物理中的弹性系数、摩擦系数、线膨胀系数等来讲解比例系数, 可以使学生更清楚地理解它的意义.

关于正比例函数(正变) $y=kx$, 要求学生能够根据 k 和一个变量的值, 求另一个变量的对应值, 以及根据一对对应值, 决定 k , 这点很重要.

(三)其他

1. 研究反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 和正比例函数的研究方法大体相同. 因此讲授反比例函数可以参照讲解正比例函数的方法来进行. 这里要求学生能够根据 k 和一个变量的值, 求另一个变量的对应值, 以及根据一对对应值, 决定 k , 非常重要.

2. 关于函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象为什么是双曲线, 因为目前讲解有困难, 它的证明将在解析几何中学到. 关于双曲线的一些重要性质, 也将在解析几何中加以研究. 这里要求学生掌握下列几点:

(1) 当 x 的绝对值逐渐扩大时, y 的绝对值逐渐缩小, 但是不论 x 取什么值, y 的值不能是零, 因此 $y=\frac{k}{x}$ 的图象向左和向右都逐渐接近于 x 轴, 但是无论什么时候也不能达到 x

軸.

同样, 当 x 的绝对值逐渐缩小时, y 的绝对值逐渐扩大, 但是 x 的值不能为零, 因此 $y = \frac{k}{x}$ 的图象向上和向下都逐渐接近于 y 軸, 但无论如何也不能达到 y 軸.

(2) $k > 0$ 时, 图象在第 I、第 III 象限. 在 $x < 0$ 和 $x > 0$ 的范围内函数值随自变量 x 的增大而减小, 因此在这两个范围内, 都是减函数.

$k < 0$ 时, 图象在第 II、第 IV 象限. 在 $x < 0$ 和 $x > 0$ 的范围内, 函数值随自变量 x 的增大而增大. 因此在这两个范围内, 都是增函数.

这里, 在提法上应当注意, 不能籠統地說函数 $y = \frac{k}{x}$ 在 $k > 0$ 时是减函数, 在 $k < 0$ 时是增函数. 应当說当 $k > 0$ (或 $k < 0$) 时, 在 $x < 0$ 和 $x > 0$ 两个范围内都是减函数 (或增函数). 因为在 $x = 0$ 时, 函数的图象是不連續的, 当 x 从 $-\infty$ 逐渐增加到 $+\infty$ 时, 函数值不是連續的下降 (或上升), 而是分成两段. 从图象上容易看出, 在 $k > 0$ 时, 当 x 从 $-\infty$ 逐渐增加到 0 时, 函数值从 0 逐渐减小到 $-\infty$, 当 x 从 0 增加到 $+\infty$ 时, 函数值从 $+\infty$ 逐渐减小到零. 两个范围内, 函数值都是随着 x 的增加而减小, 但不是連續的减小, 因此必須分成两个区間來說. $k < 0$ 时也是这样.

3. 联变在物理、化学和其他科学研究中都很有用. 在实际問題中, 如果自变量不只一个时, 要研究变量之間的关系时, 用联变定理就方便得多. 例如在物理中研究一定量的气体的体积和它的压力、溫度之間的关系时, 如果把压力、溫度

都变化，就不容易看出它們和体积之间的关系。因此在研究时，先把温度保持不变，看压力改变时对体积的影响。得出的关系就是波义耳-馬路特定律：“温度不变时，一定量的气体的体积跟它的压强成反比例”。用公式表示就是 $P_1V_1=P_2V_2$ (P 表示压强, V 表示体积)。然后再把压力保持不变，看温度对体积的影响。得出的关系就是盖·呂薩克定律：“压强不变时，一定量的气体的体积和绝对温度成正比例”。用公式表示就是 $\frac{P_1}{T_1}=\frac{P_2}{T_2}$ (T 表示绝对温度)。从这两个关系，通过联变定理的推导，就得出当压力，温度都改变时气体体积的变化，即气态方程 $\frac{P_1V_1}{T_1}=\frac{P_2V_2}{T_2}$ 。

联变定理比較难，学生不易理解。特别是对变量 z 首先取值 z_1 ，再取值 z' ，最后取值 z_2 。弄不清它們之间的关系。这条定理的证明主要根据 § 1.7 的定理和它的逆定理。在讲课时，可以先复习一下这两条定理，然后指出当 x 不变时， z 依 y 而正变，因此对于 y 和 z 两个变量的任何两对对应值都有 $\frac{z_1}{z'}=\frac{y_1}{y_2}$ 的关系。問題不在于用什么文字来表示这两对对应值，主要是弄清它們之间的关系。同样当 y 不变时， x 和 z 两个变量的任何两对对应值有 $\frac{z'}{z_2}=\frac{x_1}{x_2}$ 的关系，由此得出 $\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1y_1}{x_2y_2}$ 。再根据 § 1.7 的逆定理得出 $z \propto xy$ 。

对于联变，要求学生能够根据 k 和一些变量的已知值，求另一个变量的未知的对应值，以及根据一組对应值决定 k 。

• 14 •