联合、二项式定理及复数

中国数学会上海分会
中学数学研究委员会编

新知識出版社

联合、二項式定理及复数

中國数学会上海分会
中学数学研究委員会編

*

新 知 識 出 版 社 出 版
(上 海 湖 南 路 9 号)
上海市書刊出版業營業許可証出 015 号

中科藝文联合印刷厂印刷　新華書店上海發行所总經售

*

开本：787×1092　1/32　印張：2 9/16　字数：58,000
1956年11月第1版　1956年11月第1次印刷
印数：1—80,000本

統一書号：13076·55
定　价：(7)0.24元

序　言

本会为了学習苏联先進經驗，帮助教师積極提高教学質量，并根据当前中学教学实际需要，决定着手編寫有关高初中数学各科包括代数、三角、几何、算術教材内容的小册子，陸續分批出版，以提供中学数学教师作为進一步研究和了解教材的参考，从而更好地掌握教材的教学目的。同时，也可供高初中学生作为課外鑽研的題材，以利更深刻理解教材内容。我們希望通过这一套小册子的出版，能使数学界同志对中学数学教材的研究得到廣泛的交流。

这本小册子是根据中学数学教学大綱（修訂艸案）“联合与二項式定理”及“复数”兩節編寫的。它首先講述全排列、选排列与組合的意义以及其他各种联合的意义，并以数学归納法闡明牛頓二項式定理的証明；其次說明擴張实数体的必要性，并配合圖象闡明复数的性質及运算定义，奠定了代数学基本定理的基礎，使讀者不会对虛数感到迷惑不解。

本会在編寫本册前，曾拟就編寫計划，邀請上海市二十余个学校的高中代数教师参加意見，又經編輯組討論，然后确定初步提綱，分別由黃公安、夏守岱兩同志提供材料，而由范际平同志执筆寫成，再經程其襄、楊荣祥、黃公安、夏守岱諸同志校訂，最后由范际平同志作了修正。虽然这样，但由于我們水平有限，缺点是难免的，希望数学界同志予以批評和指正。

中國数学会上海分会中学数学研究委員会

1956 年 7 月

目　　錄

一 联 合

設有 n 个不同的物件，把它們依一直綫上不同的次序而排成一列的方法，叫做全排列。它的排列数用記号 P_n 表示之。

設有 n 个不同的物件，选擇 r 个 $(r<n)$ 依一直綫上不同的次序而排成一列的方法，叫做选排列。它的排列数用記号 A_n^r 表示之。那就是說不僅所选取的物件只要有一个不同，就是另一种排法；而且当所选取的 r 个物件相同时，只要它們間的次序不同时，也是另一种排法。

要曉得上面我們所討論依一直綫上不同的次序全排列和选排列，都是排列里面最簡單的一种。

設有 n 个不同的物件，在它們的中間选擇 r 个 $(r\leqslant n)$ 为一組，且不問它們排列是怎样的順序，这样所选取的方法叫做組合。它的組合数用 C_n^r 表示之。那就是說，所选取的 r 个物件中只要有一个物件不同，就是另一种选取方法；又同样的 r 个物件，不問它們是怎样順序选擇出來的，总是屬于同一种选取方法。

从定义中我們根容易看出，全排列是选排列的特殊情况。組合是选擇的結果，而排列是选擇后再依一直綫上不同的次序排列的結果。全排列、选排列、組合是联合中最簡單和最主要的問題。如果我們要問联合的意义是什么？吉西略夫代数中說得好：**“由某些物件組成的不同的羣．它們彼此的差異，或者只是这些物体的次序不同，或者所含的物体不同，这样的羣，一般叫做联合。”**組成联合的物件叫做元素，一般用字母 $a, b, c, \cdots\cdots$ 等表示。現在我們將联合里面三种最簡單最主要的問題：全排列、选排列

和組合分别加以研究。其它的联合問題，配合適当的例題也講述一下，以使讀者了解它們的計算方法。因为各种的联合問題，对于日常生活和实际应用上是有帮助的。而且也可以帮助讀者更深入地認識这三种最簡單的联合問題。但所补充的材料，教师不要在課堂內講授，只要当做数学課外小組研究的內容，那是很好的。

1. 全排列

通过实际的計算，我們可以曉得將 n 个($n=1, 2, 3, 4, \cdots\cdots$)不同的元素排列起來究竟有多少种不同的方法。

如果只有一个元素 a，那末排列的方法顯然地只有一种。

如果有兩个不同的元素 a、b，那末排列的方法有 ab 和 ba 兩种。

如果有三个不同的元素 a、b、c，我們曉得以 a 为首的排列方法，根据兩个不同元素 b, c 的排列方法是兩种，很容易知道是兩种即 abc, acb. 同样以 b 为首、以 c 为首的排列方法都是兩种。所以共有 $2\times3=6$ 种排列方法。

如果有四个不同的元素 a、b、c、d，我們曉得以 a 为首的排列方法，根据三个不同元素 b, c, d 的排列方法是六种，很容易知道是六种，即 $abcd, abdc, acbd, acdb, adbc, adcb$. 同样以 b 为首、以 c 为首、以 d 为首的排列方法都是六种。所以共有 $6\times4=24$ 种排列方法。

如果符号 $n!$（讀如 n 的階乘）表示 $1\cdot2\cdot3\cdots\cdots n$. 从实际的計算中得

$P_1=1,$

$P_2=P_1\times2=1\times2=2!$

$P_3=P_2\times3=1\times2\times3=3!$

$$P_4 = P_3 \times 4 = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 4!$$

$$P_5 = P_4 \times 5 = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 5! = 120.$$

$$P_6 = P_5 \times 6 = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 = 6! = 720.$$

$$P_7 = P_6 \times 7 = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 = 7! = 5040.$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

这样地推下去因得 $P_n = n!$

例一 有三面不同颜色的旗，問將它們依一直綫上不同的次序排列，可以代表多少种不同的信号？又如將三本不同的書借給三个学生，每人一本，問有几种方法？

解 这問題前一部分很明顯地是全排列的問題。由 $P_3 = 3! = 6$，而得出有六种信号。

这問題后一部分虽然沒有明顯提出是全排列問題，但如將任何兩个学生所借的書調換一下，应当屬于另一种借出的方法，这和兩个元素的次序調換一下，卽屬于另一种排列法完全一样。所以也是全排列問題。那末借書的方法也有 $P_3 = 6$ 种。

例二 用 1, 2, 3, 4, 5 五个数字，不許数字重复，排列成五位的偶数。問共有若干数？

解 因为所排出的五位数限定为偶数，所以它的末位只能是偶数，卽只能是 2 或 4，也卽排末一位时只有兩种方法。末一位排好后，再將其余的四个数字排在前面四个位置的排列法是 $P_4 = 4! = 24$ 种。所以用 1, 2, 3, 4, 5 五个数字，不許数字重复（卽不允許每个数字重复地使用例如 11224, 11124, 11112 等），排成五位的偶数有 $24 \times 2 = 48$ 种。

例三 五个不同的元素 a, b, c, d, e 每次全取作排列。如元素 c 不能在第三个位置上，問有几种排列法？

解一 第三个位置旣然不能是 c，我們可以先安排第三个位置。卽 a, b, d, e 四个元素中任何一个元素可以排在第三个位置，

所以有四种方法。第三个位置既然安排好，再將余下的四个元素排在其余四个位置。这是全排列問題，共有 $P_4=4!=24$ 种排列法。因得第三个位置不是 c 的排列法是 $24\times4=96$ 种。

解二 因为元素 c 和元素 a, b, d, e 不同，它不能排在第三个位置上，所以我們可以先把元素 c 安排好。它是可以排在第一个、第二个、第四个、第五个位置中任何一个的，所以有四种方法，再將其它四个元素排在其余四个位置上，有 $p_4=4!=24$ 种排列法。所以共有 $24\times4=96$ 种排列法。

解三 將五个不同的元素 a, b, c, d, e 的全排列数 $P_5=5!$ 分为兩类：一类元素 c 在第三个位置上，一类元素 c 不在第三个位置上。由于元素 c 在第三个位置上的排列法是 $P_4=4!$ 种，所以元素 c 不在第三个位置上的排列法是 $P_5-P_4=5!-4!=4!(5-1)=4\times4!=4\times24=96$ 种。

例四 五个不同的元素 a, b, c, d, e 每次全取作排列，如元素 b 不能在第二个位置上而元素 c 不能在第四个位置上，問有几种排列法？

解一 a, b, c, d, e 五个不同元素的排列法是 P_5 种。其中元素 b 在第二个位置的排列法是 P_4 种（内中包含元素 c 在第四个位置的排列法 P_3 种）。元素 c 在第四个位置的排列法也是 P_4 种（内中包含元素 b 在第二个位置的排列法 P_3 种）。所以 P_5-2P_4 是將元素 b 在第二个位置而元素 c 在第四个位置的排列法多減了一次。由于元素 b 在第二个位置而元素 c 在第四个位置的排列法是 P_3 种，因得所求的排列法是 $P_5-2P_4+P_3=120-2\times24+6=78$ 种。

解二 將五个不同的元素 a,b,c,d,e 的排列数 P_5 分为四类：

第一类是所求的排列方法，卽元素 b 不在第二个位置而元素 c 不在第四个位置上。

第二类是元素 b 在第二个位置而元素 c 不在第四个位置上。由于元素 b 在第二个位置上只有一种方法，元素 c 不在第四个位置上卽可排在第一个、第三个、第五个位置的任何一个位置上，所以有三种方法。其余三个元素可以任意排在余下的三个位置上，所以有 P_3 种方法。因知第二类的排列法有 $P_3\times3$ 种。

第三类是元素 c 在第四个位置而元素 b 不在第二个位置上。其排列法也是 $P_3\times3$ 种。

第四类是元素 b 在第二个位置而元素 c 在第四个位置上。由于元素 b 在第二个位置、元素 c 在第四个位置上只有一种方法，而其余三元素排在其余三个位置上有 P_3 种，所以第四类的排列法有 $P_3\times1=P_3$ 种。

因得所求的排列法是 $P_5-P_3\times3-P_3\times3-P_3=P_5-7\times P_3=5!-7\times3!=3!(20-7)=6\times13=78$ 种。

解三 將所求的排列法分为四类：

第一类是元素 b 和元素 c 都不在第二个位置和第四个位置上。这时先將元素 b 排在第一个位置、第三个位置、第五个位置中任何一个位置上，可有三种方法；再將元素 c 排在第一个位置、第三个位置、第五个位置中余下的兩个位置中任何一个位置上，可有二种方法；最后再將余下的三个元素排在余下的三个位置上有 P_3 种方法。所以第一类的排列法是 $P_3\times3\times2=3!\times6=36$ 种。

第二类是元素 b 在第四个位置而 c 不在第二个位置上。由于元素 b 在第四个位置上只有一种方法，元素 c 排在第一个位置、第三个位置、第五个位置中任何一个位置上有三种方法，而其余三个元素排在其余三个位置上有 P_3 种排列法，所以第二类的排列法是 $P_3\times3=6\times3=18$ 种。

第三类是元素 c 在第二个位置而 b 不在第四个位置上。它

的排列法和第二类一样，也是 18 种。

第四类是元素 b 在第四个位置而元素 c 在第二个位置上，它的排列法是 $P_3=6$ 种。

所以所求的排列法是 $36+2\times18+6=78$ 种。

又如 n 个物件中有 p 个相同，其余相異的时候，如果全取出來依一直綫上不同的次序排列，它的排列数是多少呢？

我們可以假定所求的排列数是 x，再設想如果变更 p 个相同的物件为 p 个不相同的物件，那末由于 p 个不同的物件的排列法是 $p!$ 种，所以这时的排列数是 $xp!$

又因为 n 个不同物件的排列数是 P_n，故得

$$xp!=P_n, \qquad \therefore \quad x=\frac{n!}{p!}.$$

一般說起來，如果 n 个物件中分为 $p_1, p_2, \cdots\cdots, p_r$ 个相同物件的小組，它的排列数是 $\dfrac{n!}{p_1!\,p_2!\cdots\cdots p_r!}$. 这种全排列叫做物件不尽相異的全排列。

例一 今有一元的人民幣 5 張，五角的人民幣 6 張，二角的人民幣 4 張，以每人一張分給兒童 15 人。問有多少种方法。

解 十五張人民幣，分給十五个兒童，应有 $15!$ 种方法；但其中有 5 張一元的人民幣，6 張五角的人民幣和 4 張二角的人民幣，所以有 $\dfrac{15!}{5!\,6!\,4!}=630630$ 种分配法。

例二 棋盤形的街道有 10 条直街和 5 条橫街。有一人由一角走到对角，要走最短的路徑問有几种走法？

解 直街 10 条都被橫街 5 条区分为 $5-1=4$ 段，橫街 5 条也都被直街 10 条区分为 $10-1=9$ 段。而从一角走到对角，不論怎样，必定經过直街 4 段，橫街 9 段。如將直街 4 段用 a, a, a, a 表示，橫街 9 段表 $b, b, b, b, b, b, b, b, b$ 用示，則所选道路的情况是：

$$aaaabbbbbbbbb, \qquad aabbaabbbbbbb, \cdots\cdots$$

所以其走法是 $\frac{13!}{4!9!}=715$ 种。

2. 选排列

在 n 个不同的元素中，如果我們选择 1 个來排列，它的排列数顯然是 n，即 $A_n^1=n$. 如果我們选择 2 个來排列，这时每个排列中有兩个位置，我們可以先在这 n 个不同的元素中任取一个排在第一个位置应有 n 种方法，再在其余 $n-1$ 个元素中选取一个元素排在第二个位置应有 $n-1$ 种方法，故得 $A_n^2=n(n-1)$。

一般說起來，如果我們在 n 个不同的元素中选择 r 个來排列，这时每个排列中有 r 个位置。第一个位置因为可在这 n 个不同物件中任取 1 个排入，所以有 n 种排法。第二个位置僅有 $n-1$ 种排法。第三个位置僅有 $n-2$ 种排法。推到第 r 个位置僅有 $n-(r-1)$ 种排法，故得

$$A_n^r=n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1). \tag{1}$$

因为右边可以寫成$[n-0][n-1][n-2]\cdots\cdots[n-(r-1)]$，而由 $0,1,2,\cdots\cdots$到 $r-1$ 共 r 个数，所以知道公式一的右边共有 r 个因式，右边等于

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)(n-r)\cdots\cdots2\cdot1}{(n-r)\cdots\cdots2\cdot1}$$

$$=\frac{n!}{(n-r)!}. \tag{2}$$

很明顯，当 $r=n$ 公式一变成 $A_n^n=n(n-1)(n-2)\cdots\cdots2\cdot1=n!$，所以 $A_n^n=P_n$，那就是說全排列是选排列的特殊情况，即当 $r\leqslant n$，

$$A_n^r=n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1).$$

但应用公式二要受 $r\neq n$ 的限制。

例一 如 $A_{2n+1}^{4}=140\times A_{n}$, 試求 n 的值.

解 原式即

$$(2n+1)2n(2n-1)(2n-2)=140n(n-1)(n-2),$$

也即

$$4n(2n+1)(2n-1)(n-1)=140n(n-1)(n-2).$$

$\because n\geqslant 3$, 兩边同除以 $4n(n-1)$, 得 $4n^2-1=35n-70$,

即 $$4n^2-35n+69=0,$$

解得 $$n=3,\qquad n=\frac{23}{4}.$$

因为 n 限为正整数, 故得 $n=3$.

例二 如 $A_9^r=6\times A_9^{r-2}$, 試求 r 的值.

解 原式即

$$9\cdot 8\cdot 7\cdots\cdots(9-r+1)=6\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdots\cdots(9-r+3),$$

兩边同除以 $9\cdot 8\cdot 7\cdots\cdots(9-r+3)$, 得

$$(9-r+2)(9-r+1)=6.$$

化簡得 $$r^2-21r+104=0,$$

解得 $$r=8,\qquad r=13.$$

$\because\quad r\leqslant 9,\qquad \therefore\quad r=8.$

例三 解 $\dfrac{A_x^5+A_x^3}{A_x^3}=43.$

解 按分比定理

$$\frac{A_x^5}{A_x^3}=42,\qquad \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{x(x-1)(x-2)}=42,$$

$\because\quad x\geqslant 3,$

$\therefore\quad (x-3)(x-4)=42,\qquad x^2-7x-30=0,$

解得 $$x=10,\qquad x=-3.$$

因为 x 限为正整数, 故得 $x=10$.

例四 有顏色不同的旗幟六面, 用一面或多面縱列为信号.

問可做成多少种不同的信号?

解 六面旗帜中取一面旗帜代表一种信号，如果取兩面旗帜，可見每有一种排列卽代表一种信号，卽代表 A_6^2 种信号．由于最多能全取六面旗帜，因得所求的排列数是

$$A_6^1+A_6^2+A_6^3+A_6^4+A_6^5+A_6^6=6+30+120+360+720+720$$
$$=1956\text{ 种}.$$

像这种的問題：卽有 n 个不同的元素，求每次取 1 个，2 个，……n 个元素的排列数的和，这和数叫做排列总数．

例五 用 0, 1, 2, 3, 4, 5 六个数字，不許数字重复，排列成能被 5 整除的三位数．問共有若干数?

解 由于所構成的三位数要能被 5 整除，所以个位数字只能是 0 或 5．如果个位数字固定是 0，由于百位数字和十位数字可从 1, 2, 3, 4, 5 五个数字中任意选出兩个來排入，那末它的排列数是 A_5^2．同样，如果个位数字固定是 5，由于百位数字和十位数字可从 0, 1, 2, 3, 4 五个数字中任意选出兩个來排入，那末它的排列数也是 A_5^2 在里面有百位数字是 0 的数，这是二位数而不是三位数，应当去除．又由于百位数字是 0，个位数字是 5，而十位数字可从 1, 2, 3, 4 四个数字中任意选出一个來排入，所以有四种方法应当去除．卽它的排列数是 A_5^2-4．所以所求的排列数是 $A_5^2+A_5^2-4=20+20-4=36$．

又如 n 个不同物件中每次取 r 个，每种物件准許重复，依一直綫上不同的次序而排列，它的排列数是多少呢?

因在每一个排列中有 r 个位置，現在各物件旣然可以重复，那末每一个位置都可由此 n 个物件中任选一个排入，所以它的排列数是 $n\cdot n\cdot n\cdots\cdots$到 r 个因式$=n^r$．

这种排列叫做重复排列，在日常生活上及实际应用上也常常碰到．例如有書信 6 封，随意投入三处邮箱，問有几种不同方

法？很容易知道共有 $3^6=729$ 种．并且我們体会到这种排列当 $r>n$ 时也可以．

例 以 1, 2, 3, 4, 5 五数字，用种种方法造成五位数（每数字得任意重复）．問其中大于 23400 者有多少个？

解 五数字重复排列，其排列数是 5^5．如 1 在首位其排列数是 5^4; 21 在首两位其排列数是 5^3; 22 在首两位其排列数是 5^3; 231 在首三位其排列数是 5^2; 232 在首三位其排列数是 5^2; 233 在首三位其排列数是 5^2．故得

$$5^5-(5^4+2\times5^3+3\times5^2)=3125-(625+250+75)$$
$$=3125-950=2175.$$

又如 n 个不同物件中每次取 r 个，不許重复，环繞一閉形曲綫上而排列，它的排列数是多少呢？

在閉形曲綫上的 r 个元素，順鐘向（或反鐘向）全体移动 1 个位置、2 个位置、3 个位置、……、$r-1$ 个位置和沒有移动时的排列順序相同．但在直綫排列就变成 r 种不同的排列．那就是說，直綫上排列 r 种在閉形曲綫上就变为一种．所以这种排列数是 $\dfrac{A_n^r}{r}$．

又当 $r=n$ 时其排列数是

$$\frac{A_n^n}{n}=\frac{P_n}{n}=\frac{n!}{n}=(n-1)!$$

这种排列叫做循环排列，在日常生活上和实际应用上也会碰到的．

例一 某姓之家庭，夫妇两人及其子六人圍圓桌而坐．限定夫妇并肩而坐，問共有多少不同的坐法？又限其幼子坐在夫妇之中，問共有多少不同的坐法？

解 (1)因为限定夫妇两人并肩而坐，好像一个人一样，則其排列数是 6! 但由于夫妇两人彼此可以調換坐位，所以所求的排列数是 $2!\times6!=1440$ 种．

(2)因为限定幼子坐在夫妇兩人的中間，这三个人好像一个人一样，則其排列数是 $5!$。但由于夫妇兩人彼此可以調換坐法，所以所求的排列数是 $2!\times 5!=240$ 种。

但如閉形曲綫上有 n 个次第不同的位置，則 n 个不同的物件在其上排列，它的排列数和在直綫上的排列数完全相同，卽仍是 $n!$。

例二 四女子与四男子圍坐一圓桌，如限定同性不相隣接，問有多少种坐法？

解 如果先請女子入席，它的排列数是 $(4-1)!=3!$，再請男子插入其間，此时圓桌上有 4 个不同的位置，所以它的排列数是 $4!$。因得坐法为 $3!4!=144$ 种。

又如將 n 个不同的珠类选擇 r 个 $(r\leqslant n)$，穿成一珠圈。因为这时沒有上下表里之別，而其正反相对的各排列全同，所以这时的排列数是 $\frac{A_n^r}{2r}$.

例三 八粒顏色不同的鑽石，問可穿成几种鑽石圈？

解 $$\frac{(8-1)!}{2}=\frac{7!}{2}=2520\text{ 种}.$$

3. 組　　合

我們曉得 C_n^n 是代表 n 个不同物件全取的組合数，很顯然地是等于 1. 又 C_n^1 是代表 n 个不同物件每次取一个的組合数，很顯然地是等于 n. 目前我們自然要問 C_n^2 是等于多少呢？我們可以把它和 A_n^2 比較一下。如在 n 个不同物件 $a, b, c, d, \cdots\cdots, l$ 中选擇 a, b 兩个元素，ab 和 ba 是一种方法；但在选排列中則为兩种不同的排法。那就是說，对于任何兩个不同物件的选列数总是組合数的兩倍。

卽 $$2\times C_n^2=A_n^2,\qquad \text{故得}\qquad C_n^2=\frac{A_n^2}{2}.$$

進一步問 C_n^3 是等于多少呢?我們可以把它和 A_n^3 比較一下。如在 n 个不同物件 $a, b, c, d, \cdots\cdots l$ 中选擇 a, b, c 三个元素，abc, acb, bac, bca, cab, cba 是一种方法;但在选排列中則为 $6=3!$ 种方法。那就是說，对于任何三个不同物件的选列数总是組合数的 $3!$ 倍。

即 $\qquad 3!\times C_n^3=A_n^3,\qquad$ 故得 $\qquad C_n^3=\dfrac{A_n^3}{3!}.$

一般說起來，对于任何 r 个 $(r\leqslant n)$ 不同物件的选列数总是組合数的 $r!$ 倍。

即 $\qquad r!\times C_n^r=A_n^r,\qquad$ 故得 $\qquad C_n^r=\dfrac{A_n^r}{r!}.$

$$\because\qquad A_n^r=n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1),$$

$$\therefore\qquad C_n^r=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)}{r!}.\qquad\text{(公式一)}$$

由組合的定义可知組合数必为整数。所以从公式一可得整数一个性質：“**r 个連續整数之積必可被開首 r 个連續整数之積整除**”。

$$\text{又}\because\qquad A_n^r=\frac{n!}{(n-r)!}.\qquad (r\neq n)$$

$$\therefore\qquad C_n^r=\frac{n!}{r!\,(n-r)!}.\qquad (r\neq n)\qquad\text{(公式二)}$$

由公式二，$C_n^{n-r}=\dfrac{n!}{(n-r)!\,[n-(n-r)]!}=\dfrac{n!}{(n-r)!\,r!}$

$$\therefore\qquad C_n^r=C_n^{n-r}.\qquad (r\neq n)\qquad\text{(公式三)}$$

当 $r>\dfrac{n}{2}$ 时，用公式三求組合数的值較为簡便。

例如 $\qquad C_{18}^{16}=C_{18}^{2}=\dfrac{18\times 17}{2\times 1}=153.$

从实际計算中我們已經知道 $C_n^n=1$，当 $r=n$，由公式二，

$C_n^n=\dfrac{n!}{n!\,o!}=\dfrac{1}{o!}$. 很明顯地要想公式二当 $r=n$ 时也適合，必須定义 $o!=1$，而且这样一來当 $r=n$ 时公式三也自然成立。又符号 C_n^0 根据組合的定义是沒有意义的，但由公式三 $C_n^n=C_n^0$，因为 $C_n^n=1$，所以我們定义 $C_n^0=1$. 事实上 C_n^n 表示 n 个不同物件全取出來的組合数，顯然地是一种。C_n^0 可以表示 n 个不同物件不取出來的組合数，自然仍然是一种。所以这种規定并不脫离实际。

例一 如 $C_{2n}^{n-1}:C_{2(n-1)}^{n}=132:35$，試求 n 的值。

解 $\because$
$$\frac{C_{2n}^{n-1}}{C_{2n-2}^{n}}=\frac{\dfrac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!}}{\dfrac{(2n-2)!}{n!(n-2)!}}$$
$$=\frac{2n(2n-1)}{(n+1)(n-1)}=\frac{4n^2-2n}{n^2-1},$$
$\therefore$
$$\frac{4n^2-2n}{n^2-1}=\frac{132}{35}.$$
$$140n^2-70n=132n^2-132,\qquad 8n^2-70n+132=0,$$
$$4n^2-35n+66=0.$$
解得 $$n=\frac{11}{4},\qquad n=6.$$
因为 n 限为正整数，故得 $n=6$.

例二 如 $C_{18}^{r}=C_{18}^{r-2}$，試求 r 的值。

解 这例 $r=r-2$，(1) 或 $18-r=r-2$. (2) 才能成立。因为方程(1)無根。解方程(2)得 $r=10$.

例三 有相異的書籍 20 本，分給五个学生，各得四本，求其分法有多少种？

解 第一个学生选取有 C_{20}^4 法，第二个学生选取有 C_{16}^4 法，第三个学生选取有 C_{12}^4 法，第四个学生选取有 C_8^4 法，第五个学生选取有 C_4^4 法。所以分法是