錐齿輪及准双曲綫齿輪傳动嚙合原理

爱·威尔德哈泊著

机械工業出版社

錐齿輪及准双曲綫齿輪傳动嚙合原理

爱·威尔德哈泊著

斯列巴克譯（俄文）

張志僖譯

机械工業出版社

1958

09948

出版者的話

苏联斯列巴克曾將爱·威尔德哈泊在1945～1946年間發表于〖美国机械师〗、〖机械师〗（倫敦）兩杂志上的十四篇論文加以匯集并譯成俄文，这就是本書的俄文原書。今由張志僖同志从俄文轉譯成中文。中譯本曾承任世仲同志校閱。

本書闡明了設計及制造螺旋錐齿輪及准双曲綫齿輪傳动的理論根据。

本書專供工程师及科学工作者使用。

苏联 A. B. Слепак 譯 Э. Вильдгабер 著 'Основы зацепления конических и гипоидных передач' (Машгиз 1948 年第一版)

*　　*　　*

NO. 1676

1958 年 5 月第一版　　1958 年 5 月第一版第一次印刷

850×1168 1/32　字数 147 千字　印張 5 12/16　0,001— 2,500 册

机械工業出版社(北京东交民巷 27 号)出版

机械工業出版社印刷厂印刷　　新华書店發行

北京市書刊出版業营業許可証出字第 008 号　定价(10) 0.65 元

序　言

本書包括爱念斯特·威尔德哈泊在1945～1946年期間發表在“美国机械师”和“机械师”（倫敦）兩杂志上十四篇論文的譯文。在本書中完全按照論文出版年月的順序排列。

多少年以来，爱念斯特·威尔德哈泊在苏联早已为对螺旋錐齿輪的設計及制造有兴趣的專家們所熟知。他是一系列的齿輪傳动及其制造方法的創造者。近年来他又提出了連續拉銑的方法。

爱念斯特·威尔德哈泊与机床制造公司格利森工厂有密切的关系。这个工厂是美国的一个壟断組織，專門从事制造生产直齿和螺旋（圓弧）齿的錐齿輪及准双曲綫齿輪的切齿机床。

錐齿輪的設計，特别是圓弧齿的准双曲綫齿輪的設計，以及制造切齿机床的調整机件及刀具所需要的計算，是与很大的計算困难密切相关的。

格利森公司售給顧主的机床，附有机床傳动机件和調整机件計算方面的説明書。在牛范成的傳动方面，不給詳尽的説明書，而是由格利森公司自己进行必需的計算。

应当指出的是，在上述説明書中大多数公式的推导，格利森公司并未發表。虽然如此，有关螺旋錐齿輪的部分公式，在苏联文献中已有論証。

不要以为这里譯出的爱·威尔德哈泊的論文能够解决所有按照格利森公司的説明書計算时發生的問題。事实上在实际应用方面最重要的問題都一字未提。不仅如此，对于某些問題，显然作者力求使讀者不用那些他在編写格利森公司説明書时所采用的計算方法。例如螺旋發生齿輪的計算，發生齿輪軸的位置的选擇，在分度面上嚙合条件的計算等就是上述情況。

作者对于他所闡明的这些情况也不打算加以論証或供給足够

的証明，并且也不打算讓讀者了解这些情况。

例如有关輪齿节綫曲率的問題，就完全沒有論証，也沒有說明它的概念，而作者显然認为它是具有重大意义的。因为在很大的程度上，准双曲綫齿輪机件計算的复杂性都是由它引起的。

虽然如此，爱・威尔德哈泊所發表的論文对讀者还是有很大的好处的。它們提供了关于他在創造复杂的空間傳动时所設計的数学仪器的概念。为了容易了解所述的材料，在引言中要叙述一系列分析空間嚙合的方法，对于某些問題还附有圖、注解或公式的推导。

發表的譯文是按照材料的內容区分章节的。对于某些标題在字面上稍有不同，那些标題是作者在單篇的論文中采用的。在准双曲綫齿輪傳动那一部分的前面也有篇短短的引言，闡明准双曲綫齿輪的基本概念以及常用术語。

譯者所增注解及补充材料，用小字刊出，方括弧內数字指明其索引，相应的圖号也有标記。

阿・斯列巴克

目 次

引　　言

（俄譯者）

复杂的空間齿輪傳动通常要利用基于各类傳动特殊性質的特殊方法来进行研究。例如用来研究球面蝸杆傳动的方法就不能用来研究螺旋錐齿輪，反之亦然。

爱·威尔德哈泊提出的研究錐齿輪及准双曲綫齿輪傳动的方法，在很大的程度上也可以用来研究其他空間类型的傳动，例如蝸杆傳动或螺旋傳动。

若由螺旋及其輻射綫綜合的性質出發，威氏所列的沒有詳尽論証的一系列的原理，事实上都是可以了解的。因此，下面我們要簡短地述明关于螺旋、螺旋輻射綫的綜合、螺旋的共軛綫、接触条件及繪制瞬时接触綫的方法的基本概念。

a）螺旋

螺旋的概念在交錯軸傳动的嚙合原理中是基本的概念。这是很自然的事，因为在这种类型的傳动中，齿輪的瞬时相对运动是螺旋运动。这种运动的軸称为瞬时螺旋运动軸。

螺旋运动的特点是以角速度 ω_i 繞一定的軸 V 迴轉，并以直綫速度 u 平行于 V 軸移动。

得到螺旋运动的点画出来的是螺旋綫（圖1′）。当角速度为 ω_i 1/秒和直綫移动速度为 u 公厘/秒时，螺旋綫的螺距 L_i，也就是在迴轉一周中，該点的軸向位移，可按照下列公式求得：

$$L_i=2\pi\frac{u}{\omega_i}。$$

$\frac{u}{\omega_i}=h$ 这一綫段称为螺旋参数，

$$h=\frac{L_i}{2\pi}。$$

螺距 L_i 或参数 h 的大小，既不是决定于点到軸的距离 r，也不是决定于 u 和 ω_i 的絕对值，而只是决定于 u 和 ω_i 的比值。具有一定螺旋运动的空間的点，都可以画出导程及参数相同的螺旋綫来。

今后提到螺旋就是所有具有公共軸及相同参数（导程）的螺旋綫的总称。

以V为軸h为参数的螺旋用符号（V，h）表示。螺旋运动以符号（V,ω_i，u）或（V，ω_i，h）表示。

螺旋軸与螺旋綫切綫之間的夾角以Φ_0表示。螺旋綫的升角以Φ表示。

若A点参与螺旋运动(V，h)，那么垂直于A点所画螺旋綫的平面I就称为A点的極平面，而A点則称为極平面I的極点。

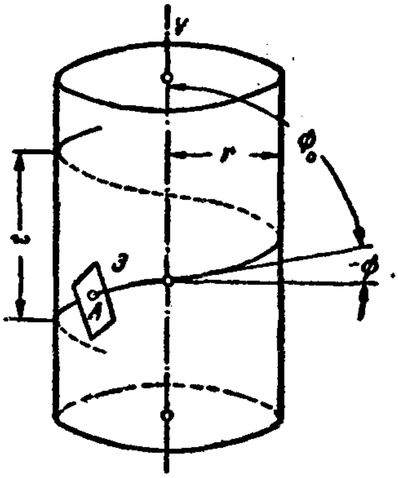

圖 1′

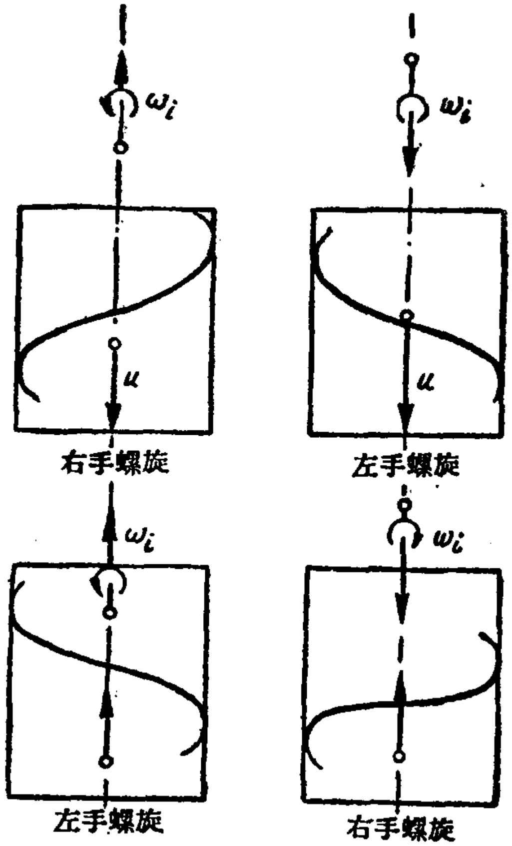

圖 2′

我們用沿着迴轉軸的向量ω_i表示作反时針方向轉动的角速度（圖2′）。在螺旋运动中，若移动速度（滑动）与角速度的向量方向相同，这种螺旋运动就屬于左手螺旋；当滑动与迴轉向量的方向相反就屬于右手螺旋(圖2′)。

6）螺旋輻射綫綜合

螺旋輻射綫綜合及輻射綫性質的概念，在研究空間嚙合●問題的理論上和实际中占有極其重要的地位。

在威氏的著述中，也曾在很大的程度上用到螺旋輻射綫綜合的性質，但無証明。威氏称綜合的輻射綫为〔接触法綫〕。

在写出螺旋輻射綫綜合的性質之前，必須熟悉下面的定理：

綫段AB如果是这样运动，即A点的速度V_A垂直于綫段AB，那么B点的速度V_B也垂直于綫段AB（圖3′）。

● P. Cormac D. Sc. 所著关于螺旋、蝸輪及蝸杆等方面的論文。

B点的运动可以認为是整个綫段 AB 以速度 V_A 移动和 B 点繞着 A 点轉动的結果，所以，速度 V_B 可以認为是迴轉速度 V_{AB} 及速度 V_A 的和。由于 V_A 和 V_{AB} 都垂直于 AB，所以，我們得到 V_B 亦垂直于 AB。

所有这样一些直綫的总合称为螺旋輻射綫綜合，即参与已知螺旋的螺旋运动时，那些直綫上所有各点的軌迹均垂直于本身的直綫。

因为在平面 I（7 頁圖1′）內所有通过 A 点

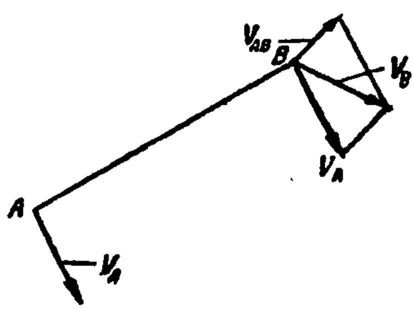

圖 3′

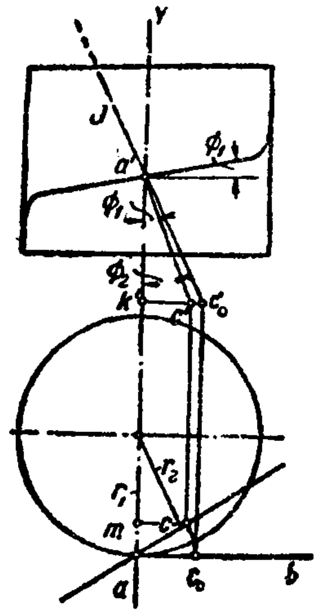

圖 4′

的直綫均垂直于 A 点的螺旋軌迹，所以它們全是已知螺旋的輻射綫。螺旋輻射綫綜合包含 ∞^3 輻射綫。螺旋輻射綫具有下列的性質：

1. 所有螺旋中螺旋綫的法綫都是螺旋綜合的輻射綫。这可由上述定理推出。

2. 在圖 4′ 上，位于到 V 軸的距离为 r_1 的 aa' 点，完成参数为 h 的螺旋运动。

画出垂直于 aa' 点軌迹的平面 I，并研究这个平面上水平投影为 ab 及 ac 的兩条直綫。这兩直綫分别与軸構成 Φ_1 角和 Φ_2 角。

由三角形 $a'k'c'$ 及 $a'k'c_0'$

$$\frac{\operatorname{tg}\Phi_1}{\operatorname{tg}\Phi_2}=\frac{k'c'}{k'c_0'}=\frac{mc}{ac}=\frac{r_2}{r_1}。$$

因为 Φ_1 是半徑为 r_1 的螺旋綫的升角，我們得到：

$$r_1\cdot\operatorname{tg}\Phi_1=r_2\cdot\operatorname{tg}\Phi_2=h=\text{常数}。$$

既然直綫 ac 是在平面 I 內任意选定的，所以所有螺旋綜合的輻射綫都具有下面的性質：

$$r\cdot\operatorname{tg}\Phi=h, \qquad (1')$$

式中 r ——由輻射綫到軸的距离；

Φ——輻射綫与軸的夾角；

h ——螺旋参数。

3．空間的每一个点都可取为某一个極面的極点，这个極面包含 ∞^1 通过極点的輻射綫。空間每一个任意取定的平面都可确定極点，也就是确定位于該平面內螺旋輻射綫的位置。由任意表面（法綫一致）上 ∞^2 个法綫的总合，可以分出 ∞^1 个法綫，这 ∞^1 个法綫乃是該螺旋的輻射綫。例如圖 5′ 中 F 表面分出了 ∞^1 个法綫形成表面 H，并屬于一定的給定螺旋輻射綫綜合。

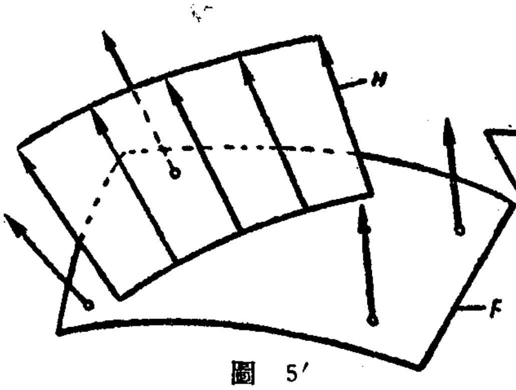

圖 5′

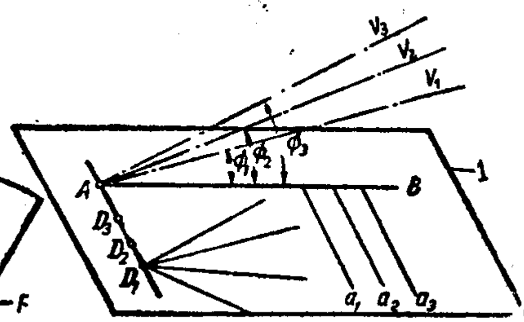

圖 6′

4．我們来研究一下那些位于与螺旋軸相交的任意平面上的已知螺旋的輻射綫。在圖 6′ 上平面 I 与螺旋軸 V_1 相交于 A 点。

設已知平面 I 的輻射綫極点位于 D_1 点。增大螺旋軸对于平面 I 的傾斜角 Φ_1。这时，極点將占有 D_2、D_3 等点的位置而接近于 A 点。当 $\Phi=90°$时，極点即到达 A 点。若 $\Phi=0°$，則極点就在無穷远的地方，而輻射綫 a_1、a_2、a_3 等則成为 AB 綫的垂直綫。直綫 AB 乃是軸 V_1、V_2 等的投影。

所以，为了确定位于任意平面 I 上的螺旋的輻射綫，必須找出这个平面与軸 1 的交点 A 和 V 軸的投影 AB。然后在平面 I 上作 AD_1 垂直于 AB，并在 AD_1 上截取綫段 $AD_1=r=\dfrac{h}{\mathrm{tg}\Phi}$，式中 h 为螺旋参数。至于 D_1 点在 AD_1 綫上的位置究竟是在 A 点的这边还是那边，則决定于螺旋的方向。

5．若平面 I 平行于 V 軸（圖7′）并与 V 軸相距为 r_0，則位于此平面上的螺旋輻射綫与軸的投影应構成 Φ_0 角，

$$\mathrm{tg}\,\Phi_0=\frac{h}{r_0}。\tag{2′}$$

因为所有位于平面 I 上并与此輻射綫平行的直綫都滿足这一条件，所以它們都是螺旋的輻射綫。

因此，若平面 I 与螺旋軸平行，并与軸相距为 r_0 时，則在平面 I 上彼此平行的螺旋輻射綫，均与軸構成 Φ_0 角，而

$$\mathrm{tg}\,\Phi_0=\frac{h}{r_0}。$$

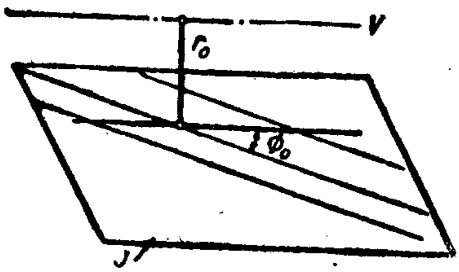

圖 7′

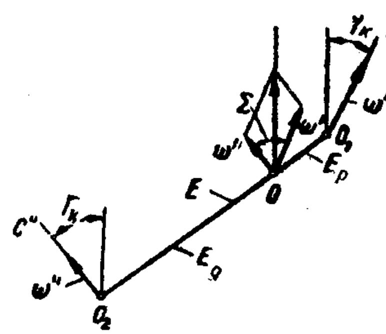

圖 8′

B） 螺旋的共軛直綫

螺旋的共軛直綫的概念最簡單是利用众所周知的兩个轉动相加的方法来述明。圖 8′ 所示为兩轉动軸 O_1C' 及 O_2C''，軸間距离 $E=E_p+E_g$，又兩軸間之夾角 $\Sigma=\gamma_k+\Gamma_k$。

为了确定瞬时运动軸，必須把兩角速度 ω' 及 ω'' 的向量几何地相加起来，即

$$\overline{\omega'}+\overline{\omega''}=\overline{\omega_i};\quad \frac{\omega'}{\sin\Gamma_k}=\frac{\omega''}{\sin\gamma_k}=\frac{\omega_i}{\sin\Sigma}。$$

向量 $\overline{\omega_i}$ 确定瞬时运动軸的方向。

这个軸的位置由 E_p 及 E_g 兩綫段确定。

$$E_p\cdot\mathrm{tg}\Gamma_k=E_g\cdot\mathrm{tg}\gamma_k=h。\tag{3′}$$

式中 h 为瞬时螺旋参数。

沿着瞬时运动軸的滑动速度为：

$$u=\omega''\cdot\sin\Gamma_k\cdot E=\omega'\cdot\sin\gamma_k\cdot E。$$

螺旋参数为：

$$h=\frac{u}{\omega_i}=\frac{\sin\Gamma_k\cdot\sin\gamma_k}{\sin\Sigma}E。$$

現在我們来研究（3′）式。这些公式規定了直綫 O_1C'、O_2C'' 与参数为 h 的螺旋軸 V 之間的一定关系。直綫 O_1C'、O_2C'' 及 OV 均垂直于公法綫 O_1O_2。

角 γ_k、Γ_k 及 Σ 与綫段 E_p、E_g 及 E 表明直綫与螺旋軸的位置，而（3′）式就确定这些量之間的关系。

前面已經解决了如何确定兩个迴轉运动的瞬时运动軸問題。若是我們的目的在把螺旋运动（V，h）分解为兩个迴轉运动，那么，我們就得出这样一个結論，即所提的問題有無数的解答。当然，这無数的解答之中，也包含

着确定这样兩条直綫的問題，这兩条直綫与螺旋（V，h）的V軸有着公法綫，并都滿足公式（3′）。

这样的直綫均称为螺旋的共軛直綫。但要注意，这些直綫并不是已知螺旋的輻射綫。

为了繪制螺旋的兩个共軛直綫，就須給出二者之一对于螺旋（V，h）的方向γ_k及位置E_p，然后再繪另一个。利用公式（3′），

$$\operatorname{tg}\Gamma_k=\frac{h}{E_p};\qquad E_g=\frac{h}{\operatorname{tg}\gamma_k}。$$

螺旋的共軛直綫的最重要的性質，就在于螺旋的任意兩共軛直綫相交的直綫，都是已知螺旋的輻射綫。

г） 共軛表面的接触条件

我們来研究一下兩个表面为点接触及綫接触的条件。

点接触时，在接触点兩表面的法綫重合。

綫接触时，兩接触表面有一公共的綫，兩表面在这綫上所有各点的法綫都彼此兩兩重合。

在輪齿的共軛表面上，接触綫称为瞬时接触綫。在瞬时接触綫的各点上所作兩表面的一些法綫，構成接触法面（参看圖5′）。

我們来确定裝在兩交錯軸上的大齿輪及小齿輪的兩共軛齿面，在任意接触点上兩表面的法綫应当滿足的条件。

在小齿輪对于大齿輪（或相反）的相对运动中，小齿輪在每一瞬时都要圍繞瞬时运动軸作瞬时的螺旋运动。

若1（圖9′）为小齿輪輪齿表面的一部分，2为大齿輪輪齿表面的一部分（固定不动），那么，小齿輪上P点在接触点P所作無穷小的位移s，应当是旣切于表面1又切于表面2的。因而，s应垂直于接触点的法綫PG。因为s是螺旋綫的微量，所以，垂直于这个微量的法綫就是螺旋的輻射綫。这样，接触条件可叙述为：接触点的法綫就是小齿輪对大齿輪作相对运动时螺旋的輻射綫。

必須指出的是，在給定的螺旋运动下，輪齿表面1及2可繞着与s方向重合的軸t（亦即螺旋綫在P点的切綫）迴轉。这时，仍旧垂直于s的法綫PG，將要繞着t軸迴轉，但是并不違反接触条件。

实际的兴趣是在具有螺旋运动的表面上确定这些表面的法綫中哪些是瞬时螺旋的輻射綫，也要确定这些法綫沿着它們与所述表面相交的那些条綫（因为它們是可能的瞬时接触綫）。

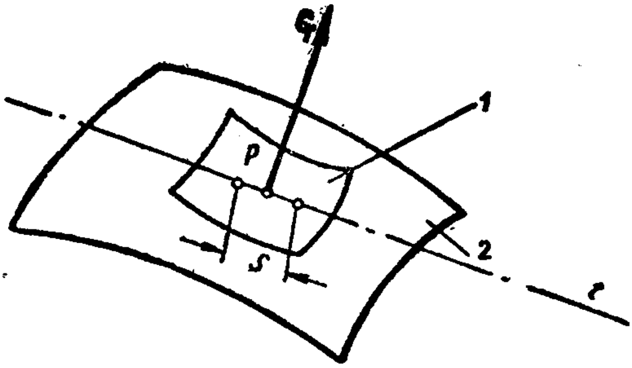

圖 9′

д） 在平面上的瞬时接触綫

以V为軸h为参数的螺旋(V, h)与平面T構成Φ角（圖 10′)。我們都知道，在螺旋运动中，平面要形成包絡的螺旋漸开面。

圖 11′所示为螺旋漸开面半徑为r_0的基圓柱，發生綫DE，沿着發生綫DE与螺旋表面相切的平面T及切于基圓柱并包含平面T沿着直綫DE的法綫而成的平面Q。根据（2′）式容易求得半徑r_0:

$$r_0 = h\ \mathrm{ctg}\Phi_0 = h\ \mathrm{tg}\Phi_{\circ}$$

这样，在平面T上（圖10′）所求的瞬时接触綫，乃是平行于V軸在平面T上的投影AC，并与AC相距r_0的直綫DE。直綫DE位于投影AC的这边或那边，则决定于螺旋的方向。

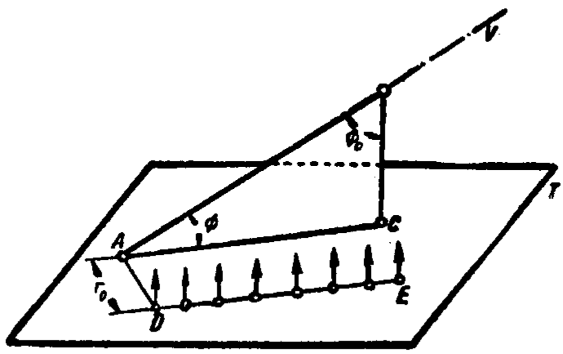

圖 10′

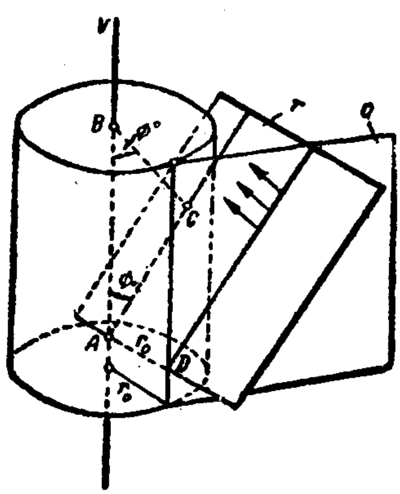

圖 11′

e） 在被展开的綫形表面上的瞬时接触綫

当一任意形狀的表面对于共軛表面作瞬时螺旋运动时，求任意形狀的表面上瞬时接触綫的問題，就是由已知表面的法綫总合中选定一些法綫，这些法綫要是瞬时螺旋的輻射綫。

法綫綜合包含 ∞^2 个法綫，而与瞬时螺旋法綫总合有关的条件按照(1)式为

$$r\cdot \mathrm{tg}\Phi=h。$$

这个条件是由 ∞^1 法綫的綜合中求出的，这 ∞^1 法綫形成的表面与已知表面沿着瞬时接触綫相交。

在这里，我們不打算提出解决一般問題的方法，由于在齿輪嚙合的領域內，必須用相当簡單形狀的表面，因此，問題的解决就大大地簡化了。

前面曾写到在平面上求瞬时接触綫的方法。現在我們来研究在展开的綫形表面上求瞬时接触綫的这个問題。

在圖 12′ 中展开的表面 S 具有相当于軸为 V 螺旋参数为 h 的瞬时螺旋运动。沿着發生綫作切于表面 S 的平面 I。

由螺旋軸上任意一点作平面 I 的垂綫 BC，求得 V 軸在平面 I 上的投影 AC，并确定 V 軸对于平面 I 的傾斜角 Φ。

然后，作直綫 DE，使平行于 AC 并与 AC 相距 $r_0=h\cdot \mathrm{tg}\Phi$。直綫 DE 与發生綫的交点为 F 点。因此，平面 I 与表面 S 的法綫是屬于瞬时螺旋(V，h)的綜合。为了在平面 S 上求出另外的点 F，必須連續地作其他切面并重复所述的画法。

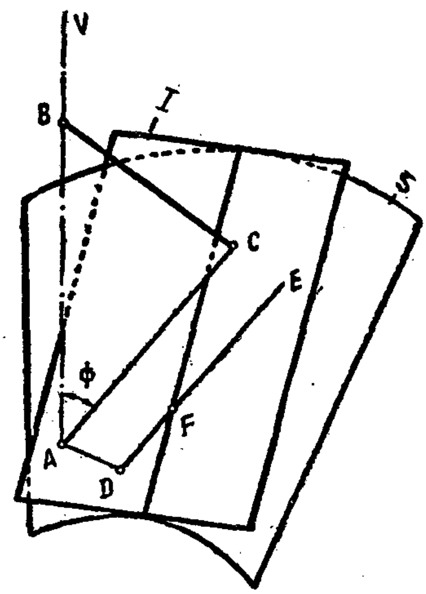

圖 12′

在这些展开的表面上求瞬时接触綫的問題，如像螺旋漸开面、圓柱表面或圓錐表面就更加簡單了。

下面我們用确定迴轉表面瞬时接触綫的方法为例来加以說明。

ж） 在迴轉表面上的瞬时接触綫

在圖 13′ 上 V 是迴轉表面的瞬时运动$\left(\frac{u}{\omega_i}=h\right)$軸，迴轉表面的 C 軸到 V 軸的距离为 e。

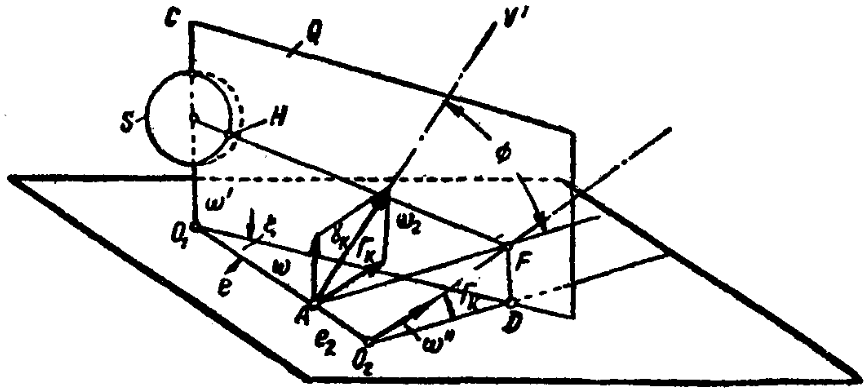

圖 13′

我們把对于 V 軸的螺旋运动分解为兩个迴轉运动，使其中一个迴轉运动的軸与已知迴轉表面的軸 C 重合。若以 ω'、ω'' 及 ω_i 表示相应的角速度，傾斜角为 γ_K、Γ_K，又距离为 e_1 及 e_2，則角速度 ω' 与 ω'' 之和給出螺旋运动 V（u，ω_i，h）的条件如下：

$$\frac{\omega'}{\sin\Gamma_K}=\frac{\omega''}{\sin\gamma_K}=\frac{\omega_i}{\sin(\gamma_K+\Gamma_K)};$$

$$e_1\cdot\mathrm{tg}\Gamma_K=e_2\cdot\mathrm{tg}\gamma_K=h。$$

若 V 軸与垂直于 C 軸的平面 I 所成的傾斜角为 Φ，則

$$\gamma_K=90-\Phi。$$

所以

$$e_2=h\cdot\mathrm{tg}\Phi;$$

$$\mathrm{tg}\,\Gamma_K=\frac{h}{e_1}。$$

于是，我們現在就可用对于 C 軸及 V' 軸的轉动代替对于 V 軸的螺旋运动了。但是繞着 C 軸迴轉时表面的轉动絲毫不影响瞬时接触綫的位置。这样，剩下的只是繞 V' 軸的瞬时轉动了。所以，求出在以 C 为軸的迴轉表面上瞬时迴轉軸 V' 的垂直投影，就是瞬时接触綫。

为了得到这个投影，通过表面 S 的軸 C 作平面 Q。这个平面与 V' 軸相交于 F 点。用下面的座标可以确定 F 点的位置：

$$O_1D=(e_1+e_2)\sec\xi;$$

$$FD=(e_1+e_2)\mathrm{tg}\xi\cdot\mathrm{tg}\Gamma_K。$$

式中　ξ——可变的参数。

知道平面 Q 与表面 S 的軸向相交綫的时候，在相交的廓綫上很容易求得由 F 所作垂綫的垂足 H。

3）瞬时接触綫上各点在平面上的極平面

在圖 14′ 中，平面 I 与螺旋的 V 軸相交于 A 点并与 V 軸構成 Φ 角。D 点是位于平面上的螺旋輻射綫的極点。

我們来求平面 I 上的瞬时接触綫，即繪出平面 I 的一些法綫，这些法綫是螺旋（V，h）的輻射綫。如前所述，这些法綫沿着平行于投影 AB 并与 AB 相距 $r_0=\dfrac{h}{\mathrm{tg}\Phi_0}$ 的直綫 EF 与平面 I 相交，式中 $\Phi_0=90°-\Phi$。

因而　　$r_0=h\cdot\mathrm{tg}\Phi$。

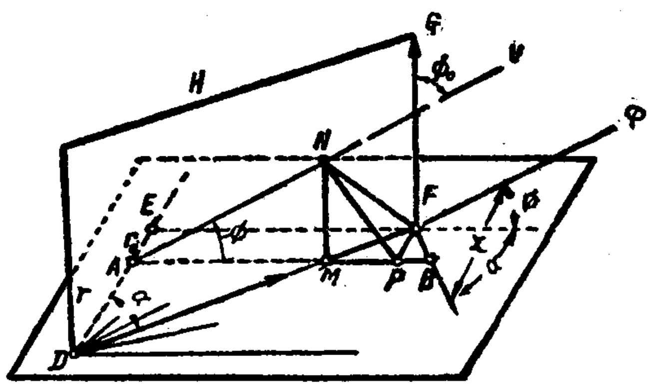

圖　14′

在平面 I 上，通过 D 点作螺旋的任意輻射綫 DF。設 DF 与 EF 相交于 F 点并与 AD 構成 α 角。

我們来証明包含輻射綫 FG 及 DF 的平面 H，也包含所有通过 F 点的螺旋輻射綫。根据螺旋輻射綫綜合的性質，这些輻射綫上的点在螺旋运动中描出垂直于輻射綫的軌迹。屬于輻射綫 DF 及 FG 的 F 点，在螺旋运动中描出軌迹 FB。FB 垂直于平面 H 并在平面 I 內。因而平面 H 包含所有通过 F 点的輻射綫，并且是 F 点的極平面。这种在实际上非常重要的性質可用計算說明之。

首先要証明 FB 是垂直于由 F 点到 V 軸的距离 FN 直綫的，然后确定直綫 FB 与軸的夾角，并列出这个角与距离 FN 之間的关系式。由 F 点作 AB 綫的垂綫 FP，再向螺旋軸作垂綫 PN。这时，FN 将垂直于軸。在平面 I 上，求得 N 点的投影 M，并証明 M 点是在直綫 DF 上。这时要証明直綫 NF 是在平面 H 內，因此 NF 垂直于 FB。

$$AN = AP\cdot\cos\Phi = EF\cdot\cos\Phi = (r+r_0)\mathrm{tg}\alpha\cdot\cos\Phi;$$

$$AM = AN\cdot\cos\Phi = (r+r_0)\mathrm{tg}\alpha\cdot\cos^2\Phi,$$

因为 $r=\dfrac{h}{\mathrm{tg}\Phi}$ 及 $r_0=\dfrac{h}{\mathrm{tg}\,\Phi_0}=h\cdot\mathrm{tg}\,\Phi$,

$$AM = h\cdot\mathrm{tg}\alpha\cdot\cos^2\Phi\left(\frac{1}{\mathrm{tg}\ \Phi}+\mathrm{tg}\ \Phi\right)=\frac{h\cdot\mathrm{tg}\alpha}{\mathrm{tg}\ \Phi}=r\cdot\mathrm{tg}\ \alpha。$$

另一方面，由三角形 DAM

$$AM = r\cdot\mathrm{tg}\alpha,$$

所以，FB 确实是垂直于 NF 的。

由 F 点的三面角求得 $\angle QFB=x$，它是直綫 FB 与平行于軸的直綫 FQ 構成的。按照球面三角的公式，得到

$$\cos x = \cos\Phi\cdot\cos\alpha。$$

現在要証明 FB 切于螺旋綫，这个螺旋綫是以参数为 h、与瞬时螺旋軸的距离为 NF 的 F 点作螺旋运动时得到的。为此必須保持下列的等式

$$NF\cdot\mathrm{ctg}x = h \text{ 或 } NF^2\cdot\mathrm{ctg}^2x = h^2,$$

$$\mathrm{ctg}^2\,x=\frac{\cos^2 x}{1-\cos^2 x}=\frac{\cos^2\Phi\cdot\cos^2\alpha}{1-\cos^2\Phi\cdot\cos^2\alpha};$$

$$NF^2 = FP^2+PN^2 = FP^2+AN^2\cdot\mathrm{tg}^2\Phi = r_0^2+(r+r_0)^2\mathrm{tg}^2\alpha\cdot\sin^2\Phi$$

$$= h^2\left[\mathrm{tg}^2\,\Phi+\left(\frac{1}{\mathrm{tg}\,\Phi}+\mathrm{tg}\Phi\right)^2\mathrm{tg}^2\alpha\cdot\sin^2\Phi\right]=h^2\left(\mathrm{tg}^2\,\Phi+\frac{\mathrm{tg}^2\,\alpha}{\cos^2\,\Phi}\right)。$$

把得到的値代入公式 $NF^2\cdot\mathrm{ctg}^2x=h^2$，我們得到下面的恒等式:

$$h^2\left(\mathrm{tg}^2\,\Phi+\frac{\mathrm{tg}^2\,\alpha}{\cos^2\,\Phi}\right)\cdot\frac{\cos^2\Phi\cdot\cos^2\alpha}{1-\cos^2\Phi\cdot\cos^2\alpha}=h^2。$$

有趣地指出 α 角改变即改变位置的 H 平面，与螺旋軸相交于 N 点，这 N 点就是由 F 点作到螺旋軸上的垂綫的垂足。