高等数学

——线性代数
概率论与数理统计

聂高辉 郑培根
陈孝新 李 杰 编著

中国商业出版社

面向21世纪高校新编教材

编 写 说 明

高等数学依据国家教委成人高等本科教育所要求的财经类专业《经济数学基础》中的《线性代数》和《概率论与数理统计》两部分的大纲要求，集作者多年从事成人本科教育的经验和体会编写而成。为方便读者选择，该书分《线性代数》和《概率论与数理统计》上、下篇。第一章至第五章为上篇，第六章至第九章为下篇。各篇都自成体系，可适合不同要求的读者。根据学生面授时间短、自学时间不足的特点，在内容处理上，本书做到就简易懂，保重弃烦，便于自学，既照顾了各专业后续课程所需，又不失内容本身的一般性。书中带“ * ”号的内容为选学内容。

为让读者更好地理解和掌握书中的基本概念、思想和方法，本书每章备有习题(A)、(B)两类。在 A 类中的习题，我们标明了其所在的章节或综合题的提示。B 类的习题则是为澄清概念等设计的客观题。书后，我们提供了这些习题的参考答案和提示，并附有本书所需用表。

本书由聂高辉、郑培根担任主编，陈孝新、李杰担任副主编。第一、七章由陈孝新编写；第二、六章由郑培根编写；第三、八章由李杰编写；第四、五、九章由聂高辉编写。本书的总纂和定稿工作由聂高辉完成。刘梓修教授担任本书的主审工作并在百忙中审阅了全书原稿。由于成书的时间仓促，编者的水平所限，书中缺点，错误在所难免，请读者和同仁批评指正。

最后，我们特别要感谢江西财经大学信息管理学院以及数学与决策科学系的领导、同仁的支持和帮助。

编　者

2000 年 5 月

内 容 提 要

本书分上篇和下篇共九章，上篇为线性代数，内容包括第一章至第五章，即：行列式、矩阵向量，线性方程组及矩阵的特征值(含二次型)。下篇为概率论与数理统计，内容包括第六章至第九章，即概率论基本知识，抽样分布，统计推断及线性回归分析。

本书可适用于成人各类本科专业，特别是财经管理本科专业，也可作为经济类本科高等数学的自考用书以及财经工作者的自学用书。

目　录

上篇　线性代数

下篇 概率论与数理统计

上篇　线性代数

第一章　行列式

线性代数主要是研究线性函数。在线性代数中线性方程组是一个基础部分，也是一个重要部分。解线性方程组首先需要行列式这个基本工具。行列式是人们从解线性方程组的需要而产生。它在经济领域中有着广泛的应用。

1.1　二阶、三阶行列式

在中学代数中，我们已学过用二阶行列式解二元线性方程组，用三阶行列式解三元线性方程组。在此，我们再进行简单的复习。

1.1.1　二元线性方程组

两个未知量 x_1,x_2 的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 & (1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 & (2) \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 b_1,b_2 是常数项，a_{ij} 叫做 x_j 的系数，它有两个足标，第一个足标 i 表示它在第 i 个方程，第2个足标 j 表示它是第 j 个未知量的系数。例如 a_{21} 就是第二个方程中 x_1 的系数。利用消元法，消去 x_2，即方程(1) $\times\ a_{22}$ - 方程(2) $\times\ a_{12}$ 得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}$$

同样，消去 x_1 得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，方程组(1,1) 的解为：

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \\ x_2 = \dfrac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \end{cases}$$

为了便于记忆这个表达式,我们引进记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

并叫做二阶行列式。它含有两行,两列。横写的叫做行,竖写的叫做列。行列式中的数又叫做行列式的元素,a_{21} 就是在第二行,第 1 列上的元。二阶行列式表示的代数和,可以用画线(图 1－1) 的方法记忆,即实线联结的两个元素的乘积减去虚线联结的两个元素的乘积。

$$\overset{+}{}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}^{-} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

图 1－1

根据定义,我们可得

$$b_1a_{22} - a_{12}b_2 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, a_{11}b_2 - b_1a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

如果我们记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

于是当 $D \neq 0$ 时,方程组(1.1) 的解记为:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{D_1}{D} \\ x_2 = \dfrac{D_2}{D} \end{cases}$$

其中 D 称为方程组(1.1) 的系数行列式。

例 1.1.1 解线性方程组

$$\begin{cases} x + 2y = 10 \\ 2x - y = 5 \end{cases}$$

解：　系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \times (-1) - 2 \times 2 = -5 \neq 0$$

而

$$D_1 = \begin{vmatrix} 10 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 10 \times (-1) - 2 \times 5 = -20$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 10 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1 \times 5 - 2 \times 10 = -15$$

所以方程组的解为：

$$\begin{cases} x = \dfrac{D_1}{D} = 4 \\ y = \dfrac{D_2}{D} = 3 \end{cases}$$

例 1.1.2　设 $D = \begin{vmatrix} \lambda^2 & \lambda \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$

问：(1) 当 λ 为何值时 $D = 0$

(2) 当 λ 为何值时 $D \neq 0$

解：

$$D = \begin{vmatrix} \lambda^2 & \lambda \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda$$

由 $\lambda^2 - 3\lambda = 0$，得 $\lambda = 0, \lambda = 3$。

因此可得

(1) 当 $\lambda = 0$ 或 $\lambda = 3$ 时，$D = 0$

(2) 当 $\lambda \neq 0$ 且 $\lambda \neq 3$ 时 $D \neq 0$

1.1.2　三元线性方程组

我们再来解三个未知量的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \tag{1.2}$$

同上面一样，先从前两式消去 x_3，后两式消去 x_3，得到只含 x_1，x_2 的两个新线性方程；再从这两个方程消去 x_2，就得到

$$\begin{aligned}&(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}\\&-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31})x_1\\=\ &b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-b_1a_{23}a_{32}\\&-a_{12}b_2a_{33}-a_{13}a_{22}b_3\end{aligned}$$

当 x_1 的系数

$$\begin{aligned}D=\ &a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}\\&-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}\neq 0\end{aligned}$$

时，得出

$$\begin{aligned}x_1=\ &\frac{1}{D}(b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-b_1a_{23}a_{32}\\&-a_{12}b_2a_{33}-a_{13}a_{22}b_3)\end{aligned}$$

同理，可得

$$\begin{aligned}x_2=\ &\frac{1}{D}(a_{11}b_2a_{33}+b_1a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}b_3-a_{11}a_{23}b_3\\&-b_1a_{21}a_{33}-a_{13}b_2a_{31})\\x_3=\ &\frac{1}{D}(a_{11}a_{22}b_3+a_{12}b_2a_{31}+b_1a_{21}a_{32}-a_{11}b_2a_{32}\\&-a_{12}a_{21}b_3-b_1a_{22}a_{31})\end{aligned}$$

所以，当 $D\neq 0$ 时，方程组(1.2) 的解就一定是上述形式。

为方便记忆，我们引进三阶行列式

$$\begin{aligned}&\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}\\=\ &a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}\\&-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}\end{aligned}$$

它含有三行，三列，是 6 个项的代数和，这 6 个项我们可按“对角线法则”来记忆。(如图 1－2) 实线上三个元素相乘取正号，虚线上的三个元素相乘取负号。

根据定义，我们可知在上面 x_1,x_2,x_3 的表达式中，分母都是行

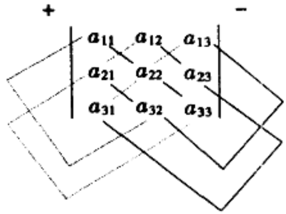

图 1－2

列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

而分子是把行列式 D 中第 1,2,3 列分别换成常数项 b_1,b_2,b_3 得到的行列式 D_1,D_2,D_3,即

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

因此,当 $D\neq 0$ 时,方程组(1.2)的解可记为

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{D_1}{D} \\ x_2=\dfrac{D_2}{D} \\ x_3=\dfrac{D_3}{D} \end{cases}$$

例 1.1.3　解线性方程组

$$\begin{cases}2x_1 - x_2 + x_3 = 0\\3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 1\\x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 4\end{cases}$$

解： 系数行列式

$$\begin{aligned}D &= \begin{vmatrix}2 & -1 & 1\\3 & 2 & -5\\1 & 3 & -2\end{vmatrix}\\&= 2\times2\times(-2)+(-1)\times(-5)\times1+1\times3\times3\\&\quad -1\times2\times1-(-1)\times3\times(-2)-2\times3\times(-5)\\&= 28\end{aligned}$$

而

$$D_1 = \begin{vmatrix}0 & -1 & 1\\1 & 2 & -5\\4 & 3 & -2\end{vmatrix} = 13, D_2 = \begin{vmatrix}2 & 0 & 1\\3 & 1 & -5\\1 & 4 & -2\end{vmatrix} = 47$$

$$D_3 = \begin{vmatrix}2 & -1 & 0\\3 & 2 & 1\\1 & 3 & 4\end{vmatrix} = 21$$

所以方程组的解为：

$$\begin{cases}x_1 = \dfrac{D_1}{D} = \dfrac{13}{28}\\[2ex]x_2 = \dfrac{D_2}{D} = \dfrac{47}{28}\\[2ex]x_3 = \dfrac{D_3}{D} = \dfrac{21}{28} = \dfrac{3}{4}\end{cases}$$

例 1.1.4 a,b 为何值时有

$$\begin{vmatrix}a & b & 0\\-b & a & 0\\1 & 0 & 1\end{vmatrix} = 0$$

解：

$$\begin{vmatrix}a & b & 0\\-b & a & 0\\1 & 0 & 1\end{vmatrix} = a^2 + b^2$$

若要 $a^2+b^2=0$,则 a 与 b 须同时等于零。因此,当 $a=0$ 且 $b=0$ 时,所给行列式等于零。

1.2 n 阶行列式

为了介绍 n 阶行列式定义,先学习排列与逆序的知识。

1.2.1 排列与逆序

定义 1.2.1 由数码 $1,2,\cdots,n$ 组成的不重复的每一种有序数组,称为一个 n 级排列。记为:$i_1i_2\cdots i_n$,或 $j_1j_2\cdots j_n$。

例如,132 是一个 3 级排列,2413,3412 都是 4 级排列,7563421 是一个 7 级排列。

根据中学学过的排列的知识可知由 $1,2,\cdots,n$ 组成的全部不同的 n 级全排列共有 $n!$ 个。

例如,3 级全排列为 $3!=6$ 个,它们是

$$123,132,213,231,312,321$$

在这六个排列中只有 123 是按从小到大的自然序排列的。

称 n 级排列 $123\cdots n$ 为自然排列,而其余的 n 级排列中,如果有一个较大的数排在一个较小的数前面,这两个数就构成了一个逆序。

定义 1.2.2 在一个 n 级排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 中,如果有较大的数 i_t 排在较小的数 i_s 前面($i_s<i_t$),则称 i_t 与 i_s 构成一个逆序。一个 n 级排列中逆序的总数,称为它的逆序数,记为 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$。

例如 2413 为一个 4 级排列,从个位看起,3 前面比 3 大的数只有 4,产生一个逆序;拾位数 1 前面比 1 大的数有 4,2,产生 2 个逆序;

百位数 4 前面没有比 4 大的数,不产生逆序;2 排在首位,不产生逆序。

所以 $\tau(2413)=1+2+0+0=3$

仿此方法，可计算任一排列的逆序数。

例如：$\tau(23154) = 1 + 0 + 2 + 0 + 0 = 3$

定义 1.2.3 若 $\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)$ 为奇数，则称 n 级排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 为奇排列。若 $\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)$ 为偶数，则称 n 级排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 为偶排列。

23154 为奇排列，排列 $123\cdots n$ 的逆序数是零，是偶排列。

定义 1.2.4 n 级排列 $i_1 \cdots i_t \cdots i_s \cdots i_n$ 中，仅交换两个数 i_t 与 i_s 后得到另一个 n 级排列，这种变换称为对换。

例如，在排列 23154 中对换 3，5 得 25134 且 $\tau(25134) = 4$，奇排列变成了偶排列。在排列 123456 中对换 1，5 得 523416 且 $\tau(523416) = 7$，偶排列变成了奇排列。

定理 1.2.1 任意一个排列经过一次对换奇偶性改变。

证：(1) 首先讨论对换相邻两个数的特殊情形，设排列为

$$AijB$$

其中 A,B 表示除 i,j 两个数码外其余的数码，经过对换 i,j，变为排列

$$AjiB$$

比较上面两个排列中的逆序，显然 A,B 中数码的次序没有改变，并且 i,j 与 A,B 中数码的次序也没有改变，仅仅改变了 i 与 j 的次序，因此，新排列仅比原排列增加了一个逆序（当 $i < j$ 时），或减少了一个逆序（当 $i > j$ 时），所以它们的奇偶性相反。

(2) 在一般情形，设排列为

$$Aik_1k_2\cdots k_sjB$$

经过对换 i,j，变为排列

$$Ajk_1k_2\cdots k_siB$$

新排列可以由原排列中将数码 i 依次与 $k_1,k_2,\cdots,k_s,j$ 作 $s+1$ 次相邻对换，变为

$$Ak_1k_2\cdots k_sjiB$$

再将 j 依次与 $k_s,k_{s-1},\cdots,k_2,k_1$ 作 s 次相邻对换得到，即新排列可以由原排列经过 $2s+1$ 次相邻对换得到。由(1)的结论可知它改变了奇数次奇偶性，所以它与原排列的奇偶性相反。

定理 1.2.2　当 $n \geqslant 2$ 时，所有的 n 级排列中奇偶排列各占一半，且都为 $\frac{n!}{2}$ 个。

证　设在 $n!$ 个 n 级排列中，奇排列共有 P 个，偶排列共有 Q 个。设想将每一个奇排列都施以同一的对换，例如都对换 2,3，则由定理 1.2.1 可知 P 个奇排列全部变为偶排列，于是 $P \leqslant Q$，同理如将全部偶排列也都施以同一对换，则 Q 个偶排列全部变为奇排列，于是又有 $Q \leqslant P$，所以推得 $P = Q$，而 $P + Q = n!$，故 $P = Q = \frac{n!}{2}$。

1.2.2　n 阶行列式的定义

上一节通过解二元，三元线性方程组引入了二阶，三阶行列式。为了定义 n 阶行列式。我们先分析二阶，三阶行列式的结构。

观察二阶行列式和三阶行列式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

有如下规律：

(1) 二阶行列式表示所有不同的行不同的列的两个元素乘积的代数和。两个元素的乘积可以表示为 $a_{1j_1}a_{2j_2}$，j_1j_2 为 2 级排列，当 j_1j_2 取遍了 2 级排列 12，21 时，即得到二阶行列式的所有项(不包含符号)，共有 $2! = 2$ 项。

三阶行列式表示所有位于不同的行不同的列的 3 个元素乘积的代数和。3 个元素的乘积可以表示为

$$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$$

$j_1j_2j_3$ 为 3 级排列，当 $j_1j_2j_3$ 取遍了 3 级排列时，即得到三阶行列式的所有项(不包含符号)，共有 $3! = 6$ 项。

(2) 每一项的符号，当这一项中元素的行标按自然数顺序排列后，如果对应的列标构成的排列是偶排列取正号，是奇排列则取负号。二阶行列式的一般项为$(-1)^{\tau(j_1j_2)}a_{1j_1}a_{2j_2}$，$j_1j_2$ 是 2 级排列中的一个。三阶行列式的一般项为$(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$，$j_1j_2j_3$ 是 3 级排列中的一个。所以

$$D=\sum_{j_1j_2}(-1)^{\tau(j_1j_2)}a_{1j_1}a_{2j_2}$$

$$D=\sum_{j_1j_2j_3}(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$$

其中$\sum$ 表示对所有 2 级排列求和，对所有 3 级排列求和。

根据这个规律，可给出 n 阶行列式的定义。

定义 1.2.5　由 n^2 个数 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 组成的符号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶行列式。记为 D。有时简记为 $|a_{ij}|$。其中横排称为行，纵排称为列。它表示所有可能取自不同的行不同的列的 n 个元素乘积的代数和，各项的符号是：当这一项中元素的行标按自然数顺序排列后，如果对应的列标构成的排列是偶排列则取正号，是奇排列则取负号。因此，n 阶行列式所表示的代数和中的一般项可以写为

$$(-1)^{\tau(j_1j_2j_3\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}\cdots a_{nj_n}$$

其中 $j_1j_2\cdots j_n$ 构成一个 n 级排列。所以

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2j_3\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}\cdots a_{nj_n} \tag{1.3}$$

特殊地，一阶行列式 $|a|=a$

例 1.2.1　计算上三角形行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

其中 $a_{ii} \neq 0, i = 1,2,\cdots,n$。元素 $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$ 所在的对角线称为主对角线,我们称上面的行列式为上三角形行列式,其特点是主对角线以下的元素均为零。

解:　由 n 阶行列式定义

$$D = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

D 是一个 n 阶行列式,其为 $n!$ 项的代数和,但由于 D 中含有很多零元素,所以 $n!$ 项中有许多是零。从第 n 行出发,第 n 行只有一个元素 $a_{nn} \neq 0$,只能取 $a_{nj_n} = a_{nn}$,第 $n-1$ 行有 $a_{n-1\,n-1}, a_{n-1\,n}$ 可以选取,但第 n 列已取了元素 a_{nn},所以只能取 $a_{n-1\,n-1} = a_{n-1\,j_{n-1}}$。依此推下去可得 D 中只有一项不等于零,即

$$D = (-1)^{\tau(1234\cdots n)} a_{11} a_{22} \cdots a_{nn} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

即:上三角形行列式的值等于其主对角线上元素的乘积。

同理可得下三角形行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{11} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{11} & a_{22} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

特殊情况:对角形行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$