依据教育部最新《考试说明》/最新《教学大纲》编写　配套人民教育出版社试验修订版教材

教案·学案一体化

依据教育部最新《考试说明》/最新《教学大纲》编写　配套人民教育出版社试验修订版教材

全品图书 CHAMPION

教与学整体设计

JIAO YU XUE ZHENGTI SHEJI

主　编 ⊙ 李保成

新教材 高考总复习

数学

智谈

教师用书

教案·学案一体化

教与学整体设计

JIAO YU XUE ZHENGTI SHEJI

高考总复习

数学

主编：李保成

教师用书

宁夏人民教育出版社
學苑出版社

图书在版编目(CIP)数据

教与学整体设计.高考总复习·数学/雨辰主编.
—银川:宁夏人民教育出版社,2003.6

ISBN 7-80596-607-9

Ⅰ.教... Ⅱ.雨... Ⅲ.数学课-高中-升学参考资料 Ⅳ.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 036326 号

高考总复习·数学(教师用书)

责任编辑	陈念华
封面设计	赵卫庆 吴 涛
版式设计	王立科
责任印制	来学军
出版发行	宁夏人民教育出版社 学苑出版社
地 址	银川市解放西街 47 号
网 址	www.nx-cb.com
电子信箱	nrs@public.yc.nx.cn
经 销	新华书店
印 刷	衡水蓝天印刷有限责任公司
开 本	850×1168 1/16
印 张	33.25
字 数	1221 千字
版 次	2003 年 6 月第 1 版
印 次	2003 年 6 月第 1 次印刷
印 数	1-20 000 册
书 号	ISBN 7-80596-607-9/G·576
定 价	39.00 元

编委会名单

主 编 絮 语

"2008",中国人的骄傲！中国人的自豪！

"2008",燃烧着我们的梦想与希望！

2004年毕业的高中学子,将于2008年走出大学之门。2008年的世界,将是中国人的世界。2008年的中国,将是青年人的乐园。

机遇,不是每个人都能遇到。"新大陆"自古以来就漂泊在那片海洋,然而,自古以来,只有一个举世闻名的哥伦布。

《教与学整体设计·高考总复习分册》的问世,就如同浮出题海的小岛。以其崭新的面貌出现在"曰师曰弟子云者"的面前,等待人们来发现。

不必作过多的说明,翻开丛书就会发现,小岛关隘重重,是对自强不息者的挑战。每一座关内,都有着奇珍异宝,等待着智者来采掘;每一座关口,都写有破关门径,等待着天才来破解;每一座关口都藏着秘籍,等待着求知者来翻阅。

似乎说得悬了些,其实并不过分。《教与学整体设计·高考总复习分册》就是从"教与学"的角度出发,做到"有讲有练,讲练结合,由浅入深,从易到难,一步一个台阶,一阶一个测试。"讲、练、测一体化,考点设计一条龙。

翻开丛书,你会发现,丛书体例设计别出心裁,充分体现了精讲多练的教学思想。再者,对于一些较小的考点而言,基础的东西举足轻重。如果捡了芝麻,丢了西瓜,则是得不偿失的。那么,训练分两步走,第一步抓基础,第二步促能力,应该说是最科学的做法。

对于一些大考点来说,比如语文科的阅读、写作,可讲的东西多些,所设课时讲授也就多些。也有一些考点,则不宜空讲,设几课时专门说说所考能力点也就够了。更奏效的应是做题、讲题。边讲题边具体说明所考内容及答题思路,则是最好的复习方法。

此外,丛书设计优点就是顺应高考复习新动向。两年多来,一头扎在教材里。如今要高考了,高考究竟考些什么呢？概念与规律将各个考点进行归纳与疏理,使你实现知识上的完备与整合。然而,"锅"毕竟是铁打的。在经过一次"基础训练"后,你又作何感想呢？课堂上名师重点与难点的突破,思想与方法的展示,促进你能力的迅速提升。讲究一点"策略",传授一点方法,启迪你的智慧,迎接新的挑战。

老师们注意:当你翻开学生用书发现"教学单元阶段测试"不翼而飞时,那是因为我们已经把它单独装订成卷了。哈哈！

"积土成山,风雨兴焉;积水成渊,蛟龙生焉。"《教与学整体设计·高考总复习分册》,名师帮你"积土"、"积水",是"鱼"便可跨过龙门。何况,尊师又是那样的聪明,坚信,"东海神针变如意,千钧铁棒掌中轻。"

愿广大同仁千万莫失良机。谁不愿自己的弟子跨入大学的门槛？谁不愿在这千载难逢的年代留下光辉的足迹？

《教与学整体设计》主编

雨　辰

2003年6月

编 写 说 明

《教与学整体设计·高考总复习数学分册》根据人民教育出版社试验修订版教材,2002 年新颁布的教学大纲及 2003 年高考《考试说明》编写。本书专门为高考总复习第一轮而设计,由【教师参考用书】、【学生复习用书】、【教学单元检测】(活页卷)三部分配套组成。

【教师参考用书】内容丰富,系统全面,设有备选、备讲内容,讲解细腻,所有习题均有详细的解题过程;【学生复习用书】、【教学单元检测】两者是在【教师参考用书】的基础上按需取舍,内容简明精练,实用够用,所选训练题难度适中,突出方法和效果。本书既注重教与学的同步性,更体现教与学的互动性,从而使教、学、练、考成为一个严谨而实用的整体。

本书既有自身独到的体例,又吸纳了众多教辅图书的精华及最新的科研成果,从实际出发,从实用出发,以实效为目的,既尊重客观规律,又勇于创新,既注意了基础知识、基本解题思路和方法的培养,又表达了"联系实际,联系生活,联系高科技"的新的教学理念,符合高考命题的发展趋势,更有利于能力的培养及提高。

本书每章结构设计如下:

【知识网络】从整体复习出发,明确各知识点之间的内在联系。

【考试内容】疏理本章考点内容,反映高考最新动态。

【考试要求】明确高考对各章的知识要求与能力要求。

【命题研究】综述近年高考对本章知识点的考查重点、考查频率及考题形式,有效指导复习工作,做到有的放矢,少走弯路,切实提高复习实效。

【复习策略】细化知识点,概括高考复习的成功经验,卓有成效的指导学生的复习。

本书每节结构设计如下:

【知识笔记】简明扼要地概括复习内容和知识规律及解题要点,清晰要领,破解疑惑。

【基础自测】熟悉内容,熟知要点,熟练方法,夯实双基,点点击破。

【讲解设计】通过例题从重点和难点上下功夫,掌握重点,突破难点。

【能力进阶】通过例题分析讲解,培养学生科学的思维方法和逻辑思维推理能力,以及运用所学知识解决问题的能力。

【备用选题】为适应 3 + X 考试,对考查的要求,精选典型例题,培养创新意识,选例注重情景的创设,注意激发学生思维的创造性,注意与现代社会特点、科学成果、自然环境和现实生活的联系,体现知识的拓展、综合及渗透的无限空间。本栏目只限于教师用书,供教师在实际教学中依据学生的实际情况选用。

【走向赛场】以能力立意为导向,精选习题,优化训练,练中学、练中悟,检查对照、查漏补缺、积累解题经验,提高解题技巧,提高实战效果。

《教与学整体设计·高考总复习数学分册》渗透了编写者的辛勤汗水和一片真情,精心编排,精心设计。能够使学生更快、更牢固、更多的掌握基本方法、基本技能,提高分析问题解决问题的能力。尊重认知规律、实践、认识、再实践再认识是本书编写的最新理念。

本书充分体现了《新教学大纲》和《2003 年考试说明》的要求,从内容的删减到一些知识点要求的降低,都做了不折不扣,落实到位的整合,目的是让学生少走弯路,不浪费学生的一点时间。只有落实好新大纲,把握好新考纲,也只有这样,才能更好的帮助学生挑战复习极限。

我们坚信——真正实用,才是最好!

编 者

2003 年 6 月

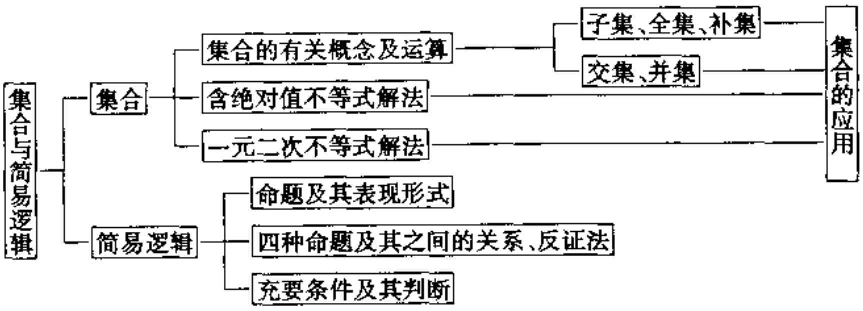
目　录

第一章　集合与简易逻辑

今天教育的内容百分之八十以上都应该是方法……方法比事实更重要.

——联合国教科文组织总干事纳依曼

知识网络



考试内容

集合、子集、补集、交集、并集、逻辑联结词、四种命题和充要条件.

考试要求

(1)理解集合、子集、补集、交集、并集的概念.了解空集和全集的意义.了解属于、包含、相等关系的意义.掌握有关的术语和符号,并会用它们正确表示一些简单的集合.

(2)理解逻辑联结词"或"、"且"、"非"的含义.理解四种命题及其相互关系.掌握充要条件的意义.

命题研究

考试热点之一是集合,主要考查以下两方面:一是对集合基本概念的认识和理解水平,如集合的表示法,元素与集合的关系,集合与集合的关系,集合的运算;二是考查对集合知识的应用水平.如求不等式和不等式组的解集,列不等式或不等式组,用集合解决相关问题.

在考查集合知识的同时突出考查准确使用数学语言的能力和用数形结合思想解决问题的能力.

考试热点之二是命题,主要考查两方面:一是命题的四种表式及原命题与逆否命题的等价性,二是充要条件的判定.

在考查命题知识的同时主要考查命题转换、逻辑推理和分析问题的能力.

复习策略

1.把握本章的复习重点

(1)应用本章知识要解决的数学问题主要有两类:第一类是运用集合语言、符号和或、且、非等逻辑联结词来解答有关集合和简易逻辑的基本概念问题;第二类是解含绝对值的不等式,一元二次不等式以及能化为一元一

次或一元二次不等式的特殊高次不等式和分式不等式.

(2)要提高解答上面两类问题的能力,一是要深刻理解、准确掌握集合、元素、子、交、并、补、命题、充要条件等基本概念和"或"、"且"、"非"等逻辑联结词的含义,这样才能准确地解答有关集合、简易逻辑的基本概念问题,才能对有关命题做出恰当的判断.二是强化数形结合思想,自觉利用韦恩图、数轴、函数图像帮助分析和理解,提高形象思维能力.

2.重视数学思想方法的复习

本章体现的主要数学思想有数形结合思想、逻辑划分思想、函数方程思想、等价转换思想,而配方法、判别式法、图像法、反证法等数学方法在本章也得到广泛应用.

1.1 集 合

知识笔记

概念与规律

1.集合中元素的特性:确定性、互异性、无序性.

2.集合的表示方法:列举法、描述法、韦恩图法.

3.元素与集合的关系:若元素 x 是集合 A 的元素,则 $x\in A$;否则 $x\notin A$.

4.集合之间的关系

子集:若集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素,则称 A 是 B 的子集,记作 $A\subseteq B$(或 $B\supseteq A$).

真子集:若 $A\subseteq B$,且 B 中至少有一个元素不属于 A,则称 A 是 B 的真子集,记作 $A\subsetneqq B$(或 $B\supsetneqq A$).

相等:若 $A\subseteq B$,且 $B\supseteq A$,则称集合 A 与 B 相等,记作 $A=B$.

5.集合的运算

交集:$A\cap B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\in B\}$.

并集:$A\cup B=\{x\mid x\in A$ 或 $x\in B\}$.

补集:$\complement_U A=\{x\mid x\in U$ 且 $x\notin A\}$.

6.集合的性质

子集的性质:$A\subseteq A,\varnothing\subseteq A,A\cap B\subseteq A,A\cap B\subseteq B$,传递性(即,如果 $A\subseteq B,B\subseteq C$,那么 $A\subseteq C$).

交集的性质:$A\cap A=A,A\cap\varnothing=\varnothing,A\cap B=B\cap A$.

并集的性质 $A\cup A=A,A\cup\varnothing=A,A\cup B=B\cup A$.

补集的性质:$A\cup\complement_U A=I,A\cap\complement_U A=\varnothing,\complement_U(\complement_U A)=A$.

7.对常用集合的元素的认识

(1)对于集合 $A=\{x\mid x^2+x-1=0\}$,A 中的元素是方程 $x^2+x-1=0$ 的根,A 即为方程的解集.

(2)对于集合 $B=\{x\mid\sqrt{x+1}\leqslant 3-x\}$,$B$ 中的元素是不等式$\sqrt{x+1}\leqslant 3-x$ 的解,B 即为不等式的解集.

(3)对于集合 $C=\{y\mid y=x^2-2x+5,0\leqslant x\leqslant 3\}$,$C$ 中的元素是函数 $y=x^2-2x+5,0\leqslant x\leqslant 3$ 的函数值,C 即为函数的值域.

(4)对于集合 $D=\{x\mid y=\sqrt{x^2-3x+2}\}$,$D$ 中的元素是函数 $y=\sqrt{x^2-3x+2}$的自变量 x 的取值,D 为函数的定义域.

(5)对于集合 $M=\{(x,y)\mid x^2+y^2=9\}$,$M$ 中的元素可以看成关于 x、y 的方程的解,M 为方程的解集;也可看成方程 $x^2+y^2=9$ 的解为坐标的点,M 为点的集合,是一个圆.

8.识记以下重要结论

$A\cap B=A\Leftrightarrow A\subseteq B$.

$A\cup B=A\Leftrightarrow A\supseteq B$.

$\complement_U(A\cap B)=\complement_U A\cup\complement_U B$.

$\complement_U(A\cup B)=\complement_U A\cap\complement_U B$.

基础自测

识记与理解

1.已知 $M=\{x\mid x\leqslant 2\sqrt{3},x\in\mathbf{R}\}$,$a=\sqrt{11}$,$b=\sqrt{12}$,则 ( )

(A)$a\in M$ 且 $b\notin M$ (B)$a\notin M$ 且 $b\in M$

(C)$a\in M$ 且 $b\in M$ (D)$a\notin M$ 且 $b\notin M$

答案:(C)

解析:$\because a=\sqrt{11}\leqslant 2\sqrt{3},b=\sqrt{12}\leqslant 2\sqrt{3}$,

$\therefore a\in M$ 且 $b\in M$.

2.满足关系 $\{1,2\}\subseteq A\subseteq\{1,2,3,4,5\}$ 的集合 A 的个数为 ( )

(A)4 (B)6

(C)8 (D)10

答案:(C)

解析:这样的集合共有 8 个,它们是 $\{1,2\}$, $\{1,2,3\}$, $\{1,2,4\}$, $\{1,2,5\}$, $\{1,2,3,4\}$, $\{1,2,3,5\}$, $\{1,2,4,5\}$, $\{1,2,3,4,5\}$.

3.设集合 $M=\{x\mid x^2>4\}$, $N=\{x\mid x<3\}$,则下列选项中正确的是 ( )

(A) $M\cup N=\{x\mid x<3\}$

(B) $M\cap N=\{x\mid 2<|x|<3\}$

(C) $M\cap N=\{x\mid 2<x<3\}$

(D) $M\cup N=\mathbf{R}$

答案:(D)

解析:由 $x^2>4$,得 $x<-2$ 或 $x>2$.

在数轴上将集合 M、N 表示出来,则可看出 $M\cup N=\mathbf{R}$.

4.设全集 $U=\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 8, x\in\mathbf{N}^*\}$,则满足 $\{1,3,5,7,8\}\cap\complement_U B=\{1,3,5,7\}$ 的所有集合 B 的个数是 ( )

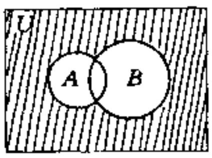
(A)1 (B)4

(C)5 (D)8

答案:(D)

解析:$\because U=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$.集合 B 不含 1,3,5,7,但集合 B 一定含有 8,这样的集合 B 为 $\{8\}$, $\{8,2\}$, $\{8,4\}$, $\{8,6\}$, $\{8,2,4\}$, $\{8,2,6\}$, $\{8,4,6\}$, $\{8,2,4,6\}$ 共 8 个.

5.如图所示,U 表示全集,用 A、B 表示阴影部分,正确的是 ( )



(A) $A\cup B$

(B) $\complement_U A\cup\complement_U B$

(C) $\complement_U(A\cap B)$

(D) $\complement_U(A\cup B)$

答案:(D)

解析:图中空白部分为 $A\cup B$,则阴影部分为 $\complement_U(A\cup B)$.

6.已知集合 $A=\{a+2,(a+1)^2,a^2+3a+3\}$,且 $1\in A$,则实数 a 的值为________.

答案:$a=0$.

解析:分别令集合中的三个数为 1,得 $a=0$ 或 $a=-1$ 或 $a=-2$.根据集合中元素的互异性将 a 值代回检验可排除 $a=-1$ 或 $a=-2$,故 $a=0$.

讲解设计

重点与难点

例 1 判定下列集合之间的包含关系或相等关系:

(1) $A=\{x\mid x=2m-1, m\in\mathbf{Z}\}$,
$B=\{x\mid x=4n\pm1, n\in\mathbf{Z}\}$;

(2) $A=\{x\mid x=2m, m\in\mathbf{Z}\}$,
$B=\{x\mid x=4n\pm2, n\in\mathbf{Z}\}$;

(3) $A=\{x\mid x=-a^2-4, a\in\mathbf{R}\}$,
$B=\{y\mid y=-b^2-3, b\in\mathbf{R}\}$;

(4) $A=\{x\mid\sqrt{x+1}=x-1\}$,
$B=\{x\mid x+1=(x-1)^2\}$;

(5) $A=\{(x,y)\mid x+y>0, x\in\mathbf{R}, y\in\mathbf{R}\}$,
$B=\{(x,y)\mid x>0, y>0, x,y\in\mathbf{R}\}$.

思路 先分析集合中元素的属性并化简,然后再判断.

解析 $\because A=\{$奇数$\}$, $4n\pm1(n\in\mathbf{Z})$必是奇数,

$\therefore B\subseteq A$.

又$\because$当 m 为偶数时,设 $m=2n(n\in\mathbf{Z})$,则 $2m-1=4n-1$;当 m 为奇数时,设 $m=2n+1(n\in\mathbf{Z})$,则 $2m-1=4n+1$.

由此可见,不论 m 是何整数,$2m-1\in B$.

故 $A\subseteq B$.综上所述,$A=B$.

(2)易知 $B\subseteq A$, $\because 0\in A$,但 $0\notin B$, $\therefore B\subsetneqq A$.

(3) $\because -a^2-4\leqslant-4$, $-b^2-3\leqslant-3$,

$\therefore A=\{x\mid x\leqslant-4\}$, $B=\{y\mid y\leqslant-3\}$.

$\therefore A\subsetneqq B$.

(4)由 $\sqrt{x+1}=x-1$,得 $x+1=(x-1)^2$,

即 $x^2-3x=0$,解得 $x_1=3$, $x_2=0$.

经检验 $x_1=3$ 是 $\sqrt{x+1}=x-1$ 的解,而 $x_2=0$ 是增根.$\therefore A=\{3\}$.

由 $(x+1)=(x-1)^2$,得 $x_1=3$, $x_2=0$,

$\therefore B=\{0,3\}$. $\therefore A\subsetneqq B$.

(5) $\because$若 $x>0$, $y>0$,则必有 $x+y>0$, $\therefore B\subseteq A$.

又$\because$若 $x=-1$, $y=2$ 时,$x+y>0$,

$\therefore(-1,2)\in B$.

又$\because x=-1<0$，$\therefore(-1,2)\notin B$，

$\therefore B\subsetneqq A$.

点评 ①如果要证明$A=B$，只要证明$A\subseteq B$与$B\subseteq A$同时成立即可.

②已知$A\subseteq B$，说明$A\subsetneqq B$，并不需要将属于B而不属于A的所有元素无一遗漏地全部列出.

③注意集合表示的意义，它与表示集合时采用字母的名称无关.

例2 设$A=\{x\mid x^2+4x=0\}$，$B=\{x\mid x^2+2(a+1)x+a^2-1=0\}$.(1)若$A\cap B=B$，求$a$的值；(2)若$A\cup B=B$，求$a$的值.

思路 关注条件"$A\cap B=B$"和"$A\cup B=B$"，并将条件进行转化$A\cap B=B\Leftrightarrow B\subseteq A$；$A\cup B=B\Leftrightarrow A\subseteq B$.再行求解.

解析 由已知$A=\{x\mid x^2+4x=0\}$，得

$$A=\{-4,0\}.$$

(1)$B=\{x\mid x^2+2(a+1)x+a^2-1=0\}$.

$\because A\cap B=B$，$\therefore B\subseteq A$.

①若$0\in B$，则$a^2-1=0$，解得$a=\pm1$.

当$a=1$时，$B=A$；

当$a=-1$时，$B=\{0\}$.

②若$-4\in B$，则$a^2-8a+7=0$，

解得$a=7$或$a=1$.

当$a=7$时，$B=\{-12,-4\}$，$B\nsubseteq A$.

③若$B=\varnothing$，则$\Delta=4(a+1)^2-4(a^2-1)<0$，解得

$$a<-1.$$

由①②③得$a=1$，或$a\leqslant-1$.

(2)$\because A\cup B=B$，$\therefore A\subseteq B$.

$\because A=\{-4,0\}$，B至多有两个元素，

$\therefore A=B$.由(1)知，$a=1$.

点评 (1)优先化简集合是解答集合问题的常用策略，化简集合一般表现为解方程或不等式.

(2)$B\subseteq A$包含$B=\varnothing$或$B\neq\varnothing$两种情况，不能遗漏.解题过程中要注意结果的检验.

能力进阶

思想与方法

例3 已知$M=\{(x,y)\mid x^2+2x+y^2=0\}$，$N=\{(x,y)\mid y=x+a\}$，且$M\cap N\supset\varnothing$，求实数$a$的取值范围.

思路 $M\cap N\supset\varnothing$说明$M\cap N$非空，方程组$\begin{cases}x^2+2x+y^2=0,\\y=x+a\end{cases}$有解.

解析 $M\cap N\supset\varnothing\Leftrightarrow$方程组$\begin{cases}x^2+2x+y^2=0,\\y=x+a\end{cases}$有解$\Leftrightarrow$圆$(x+1)^2+y^2=1$与直线$x-y+a=0$有公共点$\Leftrightarrow\left|\dfrac{-1-0+a}{\sqrt2}\right|\leqslant1\Leftrightarrow1-\sqrt2\leqslant a\leqslant1+\sqrt2$.

故a的取值范围是$[1-\sqrt2,1+\sqrt2]$.

点评 (1)本题解题过程的每一步，都运用了等价转化的数学思想.

(2)由方程组有解到圆与直线有公共点这一步，又运用了数形结合思想.

例4 已知集合$A=\{x\mid |x^2-2x|\leqslant x\}$，$B=\left\{x\,\middle|\,\left|\dfrac{x}{1-x}\right|=\dfrac{x}{1-x}\right\}$，$C=\{x\mid ax^2-x+b>0\}$，且$(A\cup B)\cap C=\varnothing$，$(A\cup B)\cup C=\mathbf{R}$，求$a,b$的值.

思路 在A、B、C三个集合中，A、B能化简，我们可将A、B先求出来.

解析 对于A，由于$|x^2-2x|\leqslant x$，

$-x\leqslant x^2-2x\leqslant x$，

有$\begin{cases}x^2-3x\leqslant0,\\x^2-x\geqslant0.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0\leqslant x\leqslant3,\\x\leqslant0\text{ 或 }x\geqslant1.\end{cases}$

$\therefore1\leqslant x\leqslant3$或$x=0$.

对于B，由$\left|\dfrac{x}{1-x}\right|=\dfrac{x}{1-x}$，

可得$\dfrac{x}{1-x}\geqslant0$，

即：$x(x-1)\leqslant0$，且$x\neq1$.

$\therefore0\leqslant x<1$.

$\therefore A\cup B=\{x\mid0\leqslant x\leqslant3\}$.

而由题设中的条件：

$(A\cup B)\cap C=\varnothing$，$(A\cup B)\cup C=\mathbf{R}$，

$\therefore C=\{x\mid x<0\text{或}x>3\}$.

而已知$C=\{x\mid ax^2-x+b>0\}$，

$\therefore ax^2-x+b=ax(x-3)$，且$a>0$.

即$ax^2-x+b=ax^2-3ax$.

比较系数，得$a=\dfrac13$，$b=0$.

点评 在解题过程中蕴含着方程思想，并运用了待定系数法.

备用选题

综合与渗透

例5 设 $f(x)=x^2+px+q$, $A=\{x|x=f(x)\}$, $B=\{x|f[f(x)]=x\}$.

(1)求证 $A\subseteq B$;

(2)如果 $A=\{-1,3\}$,求 B.

思路 本例是涉及集合、函数和方程的综合题.依据子集的概念,要证 $A\subseteq B$,只要证对任意 $x_0\in A$,均有 $x_0\in B$ 成立;由 $A=\{-1,3\}$ 知,方程 $x=f(x)$ 有二实根 -1 和 3,从而应用韦达定理可求出 p、q 的值,也就确定出 $f(x)$ 的解析式,再解方程 $x=f[f(x)]$,就可求出 B 中的所有元素.

解析 (1)设 x_0 是集合 A 中的任一元素,

即有 $x_0\in A$.

$\because A=\{x|x=f(x)\}$, $\therefore x_0=f(x_0)$,

即有 $f[f(x_0)]=f(x_0)=x_0$,

$\therefore x_0\in B$,故 $A\subseteq B$.

(2) $\because A=\{-1,3\}=\{x|x^2+px+q=x\}$,

$\therefore$方程 $x^2+(p-1)x+q=0$ 有两根 -1 和 3,应用韦达定理,得

$$\begin{cases}-1+3=-(p-1),\\(-1)\times 3=q\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}p=-1,\\q=-3.\end{cases}$$

$\therefore f(x)=x^2-x-3$.

于是集合 B 的元素是方程 $f[f(x)]=x$,也即 $(x^2-x-3)^2-(x^2-x-3)-3=x(*)$的根.

将方程$(*)$变形,得$(x^2-x-3)^2-x^2=0$,

即$(x^2-2x-3)(x^2-3)=0$,

解得 $x=-1,3,\sqrt{3},-\sqrt{3}$.

故 $B=\{-\sqrt{3},-1,\sqrt{3},3\}$.

点评 本解法说明在思维过程中,应当自觉脱去集合符号和抽象函数符号的"外衣",显出最本质的数量关系,不断实施解题语言的转换.语言是思维的载体,丝毫马虎不得.

走向赛场

能力与测试

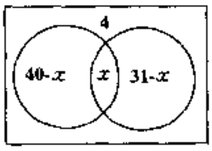
(时间:45 分钟　分值:68 分)

一、选择题:本大题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

1.已知 50 名学生参加跳远和铅球两项测验,跳远和铅球两项及格的分别是 40 人和 31 人,二项检测均不及格的有 4 人,那么二项检测部分都及格的人数是 ( )

(A)35　(B)25

(C)28　(D)15



答案:(B)

解析:画出韦恩图知,

$31+40+4-50=25$.

2.若集合 $M=\{y|y=2^x,x\in\mathbf{R}\}$, $N=\{y|y=x^2,x\in\mathbf{R}\}$,则 ( )

(A) $M\cap N=\{2,4\}$　(B) $N\supsetneqq M$

(C) $M\supsetneqq N$　(D) $M\cap N=\{4,16\}$

答案:(B)

解析:由 M 知 $2^x>0$, $\therefore M=\{y|y>0\}$.由 N 知 $x^2\geqslant 0$, $\therefore N=\{y|y\geqslant 0\}$,故 $N\supsetneqq M$.

3.(2003 年春季高考题·北京卷)

若集合 $M=\{y|y=2^{-x}\}$, $P=\{y|y=\sqrt{x-1}\}$,则 $M\cap P=$ ( )

(A) $\{y|y>1\}$　(B) $\{y|y\geqslant 1\}$

(C) $\{y|y>0\}$　(D) $\{y|y\geqslant 0\}$

答案:(C)

解析: $M=\{y|y=2^{-x}\}=\{y|y>0\}$,

$P=\{y|y=\sqrt{x-1}\}=\{y|y\geqslant 0\}$.

故 $M\cap N=\{y|y>0\}$.

4.已知 $M=\{(x,y)|y=\sqrt{9-x^2}\}$, $N=\{(x,y)|y=x+b\}$,且 $M\cap N=\varnothing$,则 b 应满足的条件是 ( )

(A) $|b|\geqslant 3\sqrt{2}$　(B) $0<b<\sqrt{2}$

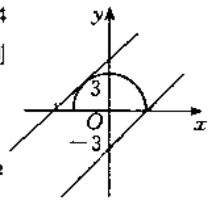
(C) $-3\leqslant b\leqslant 3\sqrt{2}$　(D) $b>3\sqrt{2}$ 或 $b<-3$

答案:(D)

解析:如图所示,由 $y=\sqrt{9-x^2}$ 知 $x^2+y^2=9(y\geqslant 0)$,图像是半圆.当直线 $y=x+b$ 与半圆无公共点时,截距 $b>3\sqrt{2}$ 或 $b<-3$.

二、填空题:本大题共 3 小题,每小题 4 分,共 12 分.

5.已知 $A=\{x\mid x^2+2(m+2)x+4=0,x\in\mathbf{R}\}$,若 $A\cap\mathbf{R}^+=\varnothing$,则实数 m 的取值范围是________.



答案:$\{m\mid m>-4\}$.

解析:由 $A\cap\mathbf{R}^+=\varnothing$ 得方程 $x^2+2(m+2)x+4=0$ 无正数根,就是该方程有负根,零根或无实根.

即 $\begin{cases}\Delta=(m+2)^2-4\geqslant0\\-(m+2)\leqslant0\end{cases}$ 或 $\Delta=(m+2)^2-4<0$.

解得 $m\geqslant0$,或 $-4<m<0$.即 $m>-4$.

另解:先求 $A\cap\mathbf{R}^+\neq\varnothing$ 时 m 的范围.

要使 $A\cap\mathbf{R}^+\neq\varnothing$ 应使 $\begin{cases}\Delta\geqslant0\\-\dfrac{2(m+2)}{2}>0\end{cases}$

解得 $m\leqslant-4$,∴使 $A\cap\mathbf{R}^+=\varnothing$ 时,m 的范围是 $m>-4$.

6.已知 $A=\left\{(x,y)\left|\dfrac{1-y}{x+1}=3\right.\right\}$,$B=\{(x,y)\mid y=kx+3\}$,并且 $A\cap B=\varnothing$,则 k 的值是________.

答案:2 或 -3.

解析:由 A 得 $y=-3x-2$,则当 $k=-3$ 时,二直线平行,即 $A\cap B=\varnothing$.又因为 $(-1,1)\notin A$,故当 $(-1,1)\in B$ 时,即 $1=-k+3$,$k=2$ 时,$A\cap B=\varnothing$.

7.若集合 $M=\{x\mid x^2+x-6=0\}$,$N=\{x\mid ax+2=0,a\in\mathbf{R}\}$ 且 $N\subsetneqq M$,则 a 的取值集合是________.

答案:$\left\{0,\dfrac{2}{3},-1\right\}$.

解析:$M=\{-3,2\}$,N 中元素是什么,需要对 a 的情况分类讨论.要掌握这一重要的思想和方法.

若 $a=0$,则 $N=\varnothing$,满足 $N\subsetneqq M$.

若 $a\neq0$,则 $N=\left\{-\dfrac{2}{a}\right\}$,则 $N\subsetneqq M$,有 $-\dfrac{2}{a}=-3$ 或 $-\dfrac{2}{a}=2$,可得 $a=\dfrac{2}{3}$ 或 $a=-1$.

所以 a 的取值集合是 $\left\{0,\dfrac{2}{3},-1\right\}$.

三、解答题:本大题共 3 小题,满分 36 分.解答应写出文字说明,证明过程或演算步骤.

8.已知 $A=\{x\mid x^3+2x^2-x-2>0\}$,
$B=\{x\mid x^2+ax+b\leqslant0\}$,$A\cup B=\{x\mid x+2>0\}$,
$A\cap B=\{x\mid 1<x\leqslant3\}$,求实数 a、b 的值.

解析:由 $x^3+2x^2-x-2>0$,得 $(x-1)(x+1)(x+2)>0$,∴$A=(-2,-1)\cup(1,+\infty)$.由 $B=\{x\mid x^2+ax+b\leqslant0\}$,设 $B=[x_1,x_2]$,∵$A\cup B=(-2,+\infty)$,$A\cap B=(1,3]$,∴$B=[-1,3]$,从而 $x_1=-1$,$x_2=3$.由二次方程根与系数的关系,得 $a=-(x_1+x_2)=-2$,$b=x_1x_2=-3$.

9.已知集合 $A=\{x\mid x^2+3x+2\geqslant0\}$,$B=\{x\mid mx^2-4x+m-1>0,m\in\mathbf{R}\}$,若 $A\cap B=\varnothing$,且 $A\cup B=A$,求 m 的取值范围.

解析:由已知 $A=\{x\mid x^2+3x+2\geqslant0\}$,得

$$A=\{x\mid x\leqslant-2,\text{或 }x\geqslant-1\}.$$

由 $A\cap B=\varnothing$,得

(1)∵$A\neq\varnothing$,∴$B=\varnothing$;

(2)∵$A=\{x\mid x\leqslant-2,\text{或 }x\geqslant-1\}$,
 ∴$B=\{x\mid -2<x<-1\}$.

另一方面,$A\cup B=A$,∴$B\subsetneqq A$,于是上面的(2)不成立,否则 $A\cup B=\mathbf{R}$,与题设 $A\cup B=A$ 矛盾.

由上面分析,知 $B=\varnothing$.

由已知 $B=\{x\mid mx^2-4x+m-1>0,m\in\mathbf{R}\}$,结合 $B=\varnothing$,得:对一切 $x\in\mathbf{R}$,$mx^2-4x+m-1\leqslant0$ 恒成立,

于是,有 $\begin{cases}m<0\\16-4m(m-1)\leqslant0\end{cases}$,解得 $m\leqslant\dfrac{1-\sqrt{17}}{2}$.

∴m 的取值范围是 $\left\{m\left|m\leqslant\dfrac{1-\sqrt{17}}{2}\right.\right\}$.

注:范围问题统一用集合或区间表示.

10.已知集合 $M=\{a+2\cos\theta,a+\cos\theta,a\}$,集合 $N=\{a,a\sin\theta,a\sin^2\theta\}$,且 $M=N$,求实数 a 和 θ 的值.

解析:显然有 $\sin\theta\neq1$,$a\neq0$.∵$M=N$,

$$\therefore\begin{cases}a+2\cos\theta=a\sin\theta,\\a+\cos\theta=a\sin^2\theta,\end{cases}\quad①$$

$$\text{或}\begin{cases}a+2\cos\theta=a\sin^2\theta,\\a+\cos\theta=a\sin\theta,\end{cases}\quad②$$

由①,得 $a=2a\sin^2\theta-a\sin\theta$,

即 $2\sin^2\theta-\sin\theta-1=0$,

∴$\sin\theta=-\dfrac{1}{2}$,或 $\sin\theta=1$(舍去),

$$\therefore\begin{cases}\theta=2k\pi-\dfrac{\pi}{6},(k\in\mathbf{Z}),\\a=-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}.\end{cases}\text{或}$$

$$\begin{cases}\theta=2k\pi-\dfrac{5}{6}\pi,(k\in\mathbf{Z}),\\a=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}.\end{cases}$$

经检验适合题意.

又由②,得 $a=2a\sin\theta-a\sin^2\theta$,

即 $\sin^2\theta-2\sin\theta+1=0$,解得 $\sin\theta=1$(舍去).

故 $\begin{cases} a=-\frac{2}{3}\sqrt{3}, \\ \theta=2k\pi-\frac{\pi}{6}, (k\in\mathbf{Z}), \end{cases}$

或 $\begin{cases} a=\frac{2}{3}\sqrt{3}, \\ \theta=2k\pi-\frac{5}{6}\pi, (k\in\mathbf{Z}). \end{cases}$

教学札记

反馈与小结

____

____

____

____

____

1.2 含绝对值的不等式解法

知识笔记

概念与规律

1.关于 $|x|<a$, $|x|>a(a>0)$ 型不等式

一般地,不等式 $|x|<a(a>0)$ 的解集是 $\{x|-a<x<a\}$;不等式 $|x|>a(a>0)$ 的解集是 $\{x|x>a$,或 $x<-a\}$.

2.对于 $|ax+b|<c$, $|ax+b|>c(c>0)$ 型不等式,只需将 $ax+b$ 看成一个整体,即可化成 $|x|<a$, $|x|>a(a>0)$ 型不等式求解.

一般地,不等式 $|ax+b|<c(c>0)$ 的解集 $\{x|-c<ax+b<c\}$,依此再求出原不等式的解集;不等式 $|ax+b|>c(c>0)$ 的解集是 $\{x|ax+b>c$,或 $ax+b<-c\}$,依此再求出原不等式的解集.

3.解含绝对值不等式的基本思想是去掉绝对值符号,使不等式变为不含绝对值符号的不等式,而后,其解法就与解一般不等式或不等式组相同.

4.解绝对值不等式的关键是去掉绝对值符号,而去绝对值符号的方法有很多,其中常用的方法有:

(1)依据绝对值的意义:

$$|x|=\begin{cases} x & (x\geqslant 0), \\ -x & (x<0), \end{cases}$$

(2)利用不等式的性质转化为基本型 $|x|<c$ 或 $|x|>c(c>0)$ 来解.

(3)"零点分段法".

所谓"零点分段法"是指:设数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是分别使含有 $|x-x_1|$, $|x-x_2|$, $\cdots$, $|x-x_n|$ 的代数式中相应的一个绝对值为零,称 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为相应绝对值的零点,零点 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 将数轴分为 $n+1$ 段,利用绝对值的意义化去绝对值符号,从而得到代数式在各段上的简化式,进而化为不含绝对值的不等式组来解.这种方法就叫做"零点分段法",通常用于含有两个及其以上的绝对值符号的不等式.

(4)平方法

此种方法适用于两边均为正数的不等式.

基础自测

识记与理解

1.不等式 $|x-2|>1$ 的解集是 ( )

(A) $\{x|1<x<3\}$

(B) $\{x|x>3$,或 $x<-3\}$

(C) $\{x|-3<x<3\}$

(D) $\{x|x>3$,或 $x<1\}$

答案:(D)

解析:由$|x-2|>1$,得$x-2>1$或$x-2<-1$,

解得$x>3$或$x<1$.

2.不等式$|3x-2|>0$的解集是　　(　　)

(A)$\varnothing$　　(B)$\mathbf{R}$

(C)$\left\{x \middle| x\in\mathbf{R},且\ x\neq\frac{2}{3}\right\}$　　(D)$\left\{\frac{2}{3}\right\}$

答案:(C)

解析:由$|3x-2|>0$得$3x-2\neq0$,

解得　　$x\neq\frac{2}{3}$,且$x\in\mathbf{R}$.

3.不等式$1\leqslant|2x-1|<2$的解集是　　(　　)

(A)$\left\{x \middle| -\frac{1}{2}<x\leqslant0,或\ 1\leqslant x<\frac{3}{2}\right\}$

(B)$\left\{x \middle| -\frac{1}{2}<x\leqslant0,或\ 1<x\leqslant\frac{3}{2}\right\}$

(C)$\left\{x \middle| -\frac{1}{2}\leqslant x<0,或\ 1<x\leqslant\frac{3}{2}\right\}$

(D)$\left\{x \middle| -\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant0,或\ 1\leqslant x\leqslant\frac{3}{2}\right\}$

答案:(A)

解析:$\because 1\leqslant|2x-1|<2$

$$\Rightarrow\begin{cases}1\leqslant2x-1<2\\-2<2x-1\leqslant-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}1\leqslant x<\frac{3}{2}\\-\frac{1}{2}<x\leqslant0\end{cases}$$

故应选(A).

4.不等式$\left|1-\frac{1}{2}x\right|<1$的解集是________.

答案:$\{x|0<x<4\}$.

解析:由$\left|1-\frac{1}{2}x\right|<1$,得$-1<1-\frac{1}{2}x<1$,

化简得$0<\frac{1}{2}x<2$,解得$0<x<4$.

5.设$2<x<3$,化简$|3-2x|-|3x-10|=$________.

答案:$5x-13$.

解析:$\because 2<x<3$,$\therefore 4<2x<6$,

$\therefore 3-2x<0$,$\therefore |3-2x|=2x-3$.

又$6<3x<9$,故$3x-10<0$,从而$|3x-10|=10-3x$.

所以$|3-2x|-|3x-10|=2x-3-(10-3x)$

$=5x-13$.

6.不等式$\left|\frac{1}{x}\right|\geqslant2$的解为________.

答案:$-\frac{1}{2}\leqslant x<0$,或$0<x\leqslant\frac{1}{2}$.

解析:由$\left|\frac{1}{x}\right|\geqslant2$,知当$x>0$时,$\frac{1}{x}\geqslant2$,解得$0<x\leqslant\frac{1}{2}$;当$x<0$时,$-\frac{1}{x}\geqslant2$,解得$-\frac{1}{2}\leqslant x<0$.

综合可知,不等式$\left|\frac{1}{x}\right|\geqslant2$的解为$-\frac{1}{2}\leqslant x<0$或$0<x\leqslant\frac{1}{2}$.

讲解设计

重点与难点

例1　解不等式$3\leqslant|x-2|<9$.

思路　将联立不等式转化为独立不等式组,再去掉绝对值符号.

解析　原不等式等价于不等式组

$$\begin{cases}|x-2|\geqslant3 & ①\\|x-2|<9 & ②\end{cases}$$

由①得$x-2\geqslant3$,或$x-2\leqslant-3$,

解得$x\geqslant5$,或$x\leqslant-1$.

由②得$-9<x-2<9$,

解得$-7<x<11$.

所以,原不等式的解集是$\{x|-7<x\leqslant-1$,或$5\leqslant x<11\}$.

点评　①解$m<|ax+b|<n(m,n>0)$类型不等式,仍然要紧紧抓住由绝对值的意义向一元一次不等式转化的这一"关键".

②本题若把$|x-2|$看成是数轴上的点到2的距离,则$3\leqslant|x-2|<9$的几何意义是求数轴上到2的距离小于9且不小于3的点的集合.所以,原不等式等价于:$3\leqslant x-2<9$,或$-9<x-2\leqslant-3$.一般情况下,不等式$m<|ax+b|<n(m,n>0)$等价于$m<ax+b<n$,或$-n<ax+b<-m$.

例2　解不等式$|2x+1|+|x-2|>4$.

思路　用零点分段法去掉绝对值符号,分段求解,然后合成.

解析　当$x\geqslant2$时,由$2x+1+x-2>4$,

得$x>\frac{5}{3}$.$\therefore x\geqslant2$.

当$-\frac{1}{2}<x<2$时,由$2x+1-x+2>4$,

得$x>1$.$\therefore 1<x<2$.

当$x\leqslant-\frac{1}{2}$时,由$-2x-1-x+2>4$,

得 $x<-1$. ∴ $x<-1$.

综上所述,得原不等式的解集为

$\{x|x>1$, 或 $x<-1\}$.

点评 ①本题各段的解集要求并集.

②解绝对值不等式的基本思路是化去绝对值符号,其主要途径有:

1°根据实数绝对值的涵义;

2°划分区域讨论法;

3°平方法.

能力进阶

思想与方法

例3 解不等式 $\frac{1}{4}(3|2x-1|-1)\leqslant\frac{1}{2}|2x-1|+3$.

思路 本题可先利用不等式的基本性质和解不等式的基本步骤,将原不等式看做是关于 $|2x-1|$ 为变量的不等式,从而转化为 $|ax+b|>c$ 或 $|ax+b|<c$ 的基本型不等式来解.

解析 原不等式可化为

$\frac{3}{4}|2x-1|-\frac{1}{4}\leqslant\frac{1}{2}|2x-1|+3$,

整理得: $\frac{1}{4}|2x-1|\leqslant\frac{13}{4}$,

即 $|2x-1|\leqslant13$.

解这个不等式得 $-6\leqslant x\leqslant7$.

∴原不等式的解集为 $\{x|-6\leqslant x\leqslant7\}$.

点评 本题将 $|2x-1|$ 看成一个整体,其实质是换元.在具体解题时,为了加快解题进程,一般策略是换元而不设元.

例4 解不等式 $|x-|2x+1||>1$.

思路 这是含多重绝对值符号的不等式,可以从"外"向"里",反复应用解答绝对值不等式类型的方法,去掉绝对值符号,逐次化解.

解析 原不等式等价于

$x-|2x+1|>1$ 或 $x-|2x+1|<-1$.

由 $x-|2x+1|>1$ 得 $|2x+1|<x-1$,

∴ $\begin{cases}2x+1\geqslant0\\2x+1<x-1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}2x+1<0,\\-(2x+1)<x-1,\end{cases}$

即 $\begin{cases}x\geqslant-\frac{1}{2}\\x<-2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x<-\frac{1}{2}\\x>0\end{cases}$ 均无解

由 $x-|2x+1|<-1$ 得 $|2x+1|>x+1$,

∴ $\begin{cases}2x+1\geqslant0\\2x+1>x+1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}2x+1<0,\\-(2x+1)>x+1,\end{cases}$

即 $\begin{cases}x\geqslant-\frac{1}{2}\\x>0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x<-\frac{1}{2},\\x<-\frac{2}{3}.\end{cases}$

∴ $x>0$ 或 $x<-\frac{2}{3}$.

综上讨论,原不等式的解集为

$\left\{x\middle|x<-\frac{2}{3}\text{或}x>0\right\}$.

点评 $|f(x)|\leqslant g(x)\Leftrightarrow-g(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x)$;

$|f(x)|\geqslant g(x)\Leftrightarrow f(x)\geqslant g(x)$ 或 $f(x)\leqslant-g(x)$.

用此结论解答本题更为方便,请读者不妨试一试.

用图像解本题也方便.

备用选题

综合与渗透

例5 若关于 x 的不等式 $|x-1|+|x+2|>a$ 对任意实数恒成立,求 a 的取值范围.

思路 将不等式恒成立问题转化为函数最值问题.

解析 ∵ $x\in\mathbf{R}$, $|x-1|+|x+2|>a$ 恒成立,

∴可令 $f(x)=|x-1|+|x+2|$,问题转化为 a 应小于 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上的最小值问题.

由绝对值的定义可知, $[f(x)]_{min}=3$,故 $a<3$.

点评 关于不等式的恒成立命题一般解题思路都是转化为函数最值问题处理.

走向赛场

能力与测试

(时间:45分钟 分值:68分)

一、选择题:本大题共4小题,每小题5分,共20分.

1.(2003年春季高考题·北京卷)

若不等式 $|ax+2|<6$ 的解集为 $(-1,2)$,则实数 a 等于 ( )

(A)8 (B)2

(C) -4 (D) -8

答案:(C)

解析:由 $|ax+2|<6$,得 $-8<ax<4$.