

江苏省农业初級中学試用課本

代 数

下 册

江苏人民出版社

江苏省农业初级中学試用課本

代 数

下 册

江苏教育学院編

*

江苏省书刊出版业許可証出〇〇一号

江 苏 人 民 出 版 社 出 版

南 京 湖 南 路 十 三 号

江苏省新华书店发行 江苏新华印刷厂印刷

*

开本 787×1092 1/32 印張 4 9/16 字數 95,000

一九六五年六月第一版

一九六五年十二月南京第三次印刷

印数 87,001—117,000

統一書号: K7100·1730

定 价: 三 角 二 分

目 录

第五章	多项式的因式分解.....	1
第六章	分式和分式方程.....	31
I	分式	31
II	分式方程	50
第七章	数的开方.....	73
第八章	一元二次方程.....	94
I	一元二次方程.....	94
II	列出方程解应用题	106
附 录		
I	抽样测产的方法	118
II	劳力安排.....	133

第五章 多項式的因式分解

5.1 因式分解的意义 在算术里学习分数的时候,常常要进行約分和通分,因此,常常要把一个数分解因数.例如,把42分成 $42 = 2 \times 3 \times 7$.

在代数里学习分式的时候,也常常需要进行約分和通分,因此,也就常常需要把一个多項式化成几个整式的积.

几个整式相乘,每一个整式都叫做它們的积的**因式**.例如, $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$, $a+b$ 和 $a-b$ 都是它們的积 $a^2 - b^2$ 的因式.把一个多項式化成几个整式的积的形式,叫做多項式的**因式分解**.

多項式的因式分解是和乘法运算相反的,从 $(a+b)(a-b)$ 求得 $a^2 - b^2$ 是乘法运算;反过来,从 $a^2 - b^2$ 求得 $(a+b)(a-b)$ 就是因式分解.

因为单項式本身就是几个整式的积,例如, $-3x^2$ 就是 $-3 \cdot x \cdot x$; ab 就是 $a \cdot b$,也就是 $1 \cdot a \cdot b$,所以因式分解都是对多項式来说的.

例1 根据 $a(x-y) = ax - ay$, $3x^2(x+y) = 3x^3 + 3x^2y$,把 $ax - ay$, $3x^3 + 3x^2y$ 分解因式.

解 $ax - ay = a(x - y)$,
 $3x^3 + 3x^2y = 3x^2(x + y)$.

例2 下列演算,对于等式左边的式子来说,哪些是因式分解,哪些不是?

$$(1) (x+1)(x-1)=x^2-1;$$

$$(2) x^2-1=(x+1)(x-1);$$

$$(3) x^2-1+y^2=(x+1)(x-1)+y^2.$$

解 (1) $(x+1)(x-1)=x^2-1$ 是乘法运算,不是因式分解;

(2) $(x+1)(x-1)$ 是两个整式的积的形式,所以 $x^2-1=(x+1)(x-1)$ 是因式分解;

(3) $(x+1)(x-1)+y^2$ 是两个整式的积与一个整式的和的形式,不是几个整式的积的形式,所以 $x^2-1+y^2=(x+1)(x-1)+y^2$ 不是因式分解。

练习

1. 下列演算,对于等式左边的式子来说,哪些是乘法运算,哪些是因式分解?

$$(1) m(a-b+c)=am-bm+cm;$$

$$(2) ax+bx-cx=x(a+b-c);$$

$$(3) (a+b)^2=a^2+2ab+b^2;$$

$$(4) x^2-y^2=(x+y)(x-y).$$

2. 把 $x^2-y^2-z^2$ 化成 $(x+y)(x-y)-z^2$ 是不是因式分解? 为什么?

5.2 提取公因式法 我们来看,怎样把多项式

$$am+bm-cm$$

分解因式。根据多项式和单项式相乘的法则，有

$$m(a+b-c)=am+bm-cm,$$

反过来，就得到

$$am+bm-cm=m(a+b-c).$$

这个式子中的 m 是多项式的各项都含有的因式，叫做多项式各项的**公因式**。

从上面这个例子可以看出：

如果一个多项式的各项含有公因式，就可以提取这个公因式，把它写在括号外面，作为这个多项式的一个因式，用这个公因式去除这个多项式，把所得的商写在括号里面，作为另一个因式。

例 1 把 $bx-by$ 分解因式。

解 $bx-by=b(x-y).$

例 2 把 $5mx+5my-5mz$ 分解因式。

解 $5mx+5my-5mz=5m(x+y-z).$

例 3 把 $40x^3y-25x^2y^2+5x^2y$ 分解因式。

解 因为 $40x^3y=2\cdot 2\cdot 2\cdot 5\cdot x\cdot x\cdot x\cdot y,$

$$-25x^2y^2=-5\cdot 5\cdot x\cdot x\cdot y\cdot y,$$

$$5x^2y=5\cdot x\cdot x\cdot y,$$

可以看出，这个多项式的各项的公因式是 $5\cdot x\cdot x\cdot y=5x^2y$ ，把 $5x^2y$ 提出来，得

$$40x^3y-25x^2y^2+5x^2y=5x^2y(8x-5y+1).$$

从这个例子可以看出，提取多项式各项的公因式时，取各项

系数的最大公约数作为公因式的系数，取各项都含有的字母作为公因式含有的字母，这些字母的指数取各项中这个字母最小的指数。

例 4 把 $-12a^3b^2 - 16a^2b^3 + 28a^2b^2c$ 分解因式。

$$\begin{aligned}\text{解} \quad & -12a^3b^2 - 16a^2b^3 + 28a^2b^2c \\ & = -4a^2b^2(3a + 4b - 7c).\end{aligned}$$

练 习

1. 把下列各式分解因式：

$$(1) ax + bx; \quad (2) cx + cy + cz;$$

$$(3) 7ab + 7ac + 7abc;$$

$$(4) -40a^2b^3c^4 + 8a^2c^3 - 24a^2b^2c^2.$$

2. 计算： $357 \times 83 + 357 \times 49 + 357 \times 168$ 。

例 5 把 $2a(b+c) - (b+c)$ 分解因式。

$$\text{解} \quad 2a(b+c) - (b+c) = (b+c)(2a-1).$$

例 6 把 $3(a+b)(a-b)(x+y) - (a+b)(a-2b)(x+y)$ 分解因式。

$$\begin{aligned}\text{解} \quad & 3(a+b)(a-b)(x+y) - (a+b)(a-2b)(x+y) \\ & = (a+b)(x+y)[3(a-b) - (a-2b)] \\ & = (a+b)(x+y)(2a-b).\end{aligned}$$

例 7 把 $2m(x-3)^2 + (3-x)(a+b)$ 分解因式。

解 因为 $3-x = -(x-3)$ ，所以我们可以把这个式子变形后再分解因式。

$$2m(x-3)^2 + (3-x)(a+b)$$

$$\begin{aligned}
&= 2m(x-3)^2 - (x-3)(a+b) \\
&= (x-3)[2m(x-3) - (a+b)] \\
&= (x-3)(2mx - 6m - a - b).
\end{aligned}$$

练习

1. 在等号右边的括号前面填上适当的正号或者负号:

$$(1) y-x = (x-y); \quad (2) d+c = (c+d);$$

$$(3) (b-a)^2 = (a-b)^2;$$

$$(4) (b-a)(y-x) = (a-b)(x-y).$$

2. 把下列各式分解因式:

$$(1) x(a+b)+y(a+b); \quad (2) a^2b(a-b)+3ab(a-b);$$

$$(3) (a-b)^2+(b-a);$$

$$(4) (a-b)(x-y)(a-2b)-(b-a)(y-x)(a+b).$$

5.3 分组分解法 我们来看, 怎样把多项式

$$ax+ay+bx+by$$

分解因式。这个式子的各项没有公因式, 所以不能直接应用提取公因式法来分解。但是, 这个式子的前面两项有公因式 a , 后面两项有公因式 b , 所以我们可以把它的各项先分成两组来看一看:

$$(ax+ay)+(bx+by).$$

第一组提取公因式 a , 第二组提取公因式 b 后, 它们的另一个因式都是 $x+y$:

$$a(x+y)+b(x+y);$$

这样就可以提取公因式 $(x+y)$ 作为全式的一个因式, 得

$$(x+y)(a+b).$$

从上面的例子可以看出，如果能够把一个多项式的各项适当的分组，使分组后各组之间有公因式（如上面例子中的 $x+y$ ），那么这个多项式就可以用分组的方法来分解因式。

例1 把 $a(m+n)+bm+bn$ 分解因式。

$$\begin{aligned}\text{解} \quad & a(m+n)+bm+bn \\ &= a(m+n)+(bm+bn) \\ &= a(m+n)+b(m+n) \\ &= (m+n)(a+b).\end{aligned}$$

例2 把 $m^2+mn-5m-5n$ 分解因式。

$$\begin{aligned}\text{解} \quad & m^2+mn-5m-5n \\ &= (m^2+mn)-(5m+5n) \\ &= m(m+n)-5(m+n) \\ &= (m+n)(m-5).\end{aligned}$$

例3 把 $3ax-4by-4ay+3bx$ 分解因式。

解 这里按照各项原来的顺序分成两组，每组都不能提取公因式，需要把某些项的位置适当地交换再行分组。

$$\begin{aligned}& 3ax-4by-4ay+3bx \\ &= 3ax+3bx-4ay-4by \\ &= 3x(a+b)-4y(a+b) \\ &= (a+b)(3x-4y).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{又解} \quad & 3ax-4by-4ay+3bx \\ &= 3ax-4ay+3bx-4by \\ &= a(3x-4y)+b(3x-4y) \\ &= (3x-4y)(a+b).\end{aligned}$$

练 习

1. 说明下面哪几种分组方法,可以把原式分解成因式,哪几种分组方法不可以,为什么?

$$(1) 4mx - 4nx - m + n = (4mx - m) - (4nx - n);$$

$$(2) 4mx - 4nx - m + n = (4mx - 4nx) - (m - n);$$

$$(3) 4mx - 4nx - m + n = (4mx + n) - (4nx + m).$$

2. 把下列各式分解因式:

$$(1) ax - ay - bx + by; \quad (2) ab - a - b + 1;$$

$$(3) a^2 + 3b - 3ab - a; \quad (4) 3ay - 2bx + 2by - 3ax.$$

例 4 把 $2(a^2 - 3mn) + a(4m - 3n)$ 分解因式.

这里分成的两组之间没有公因式,可以去括号后重行分组再看一看.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & 2(a^2 - 3mn) + a(4m - 3n) \\ &= 2a^2 - 6mn + 4am - 3an \\ &= 2a^2 + 4am - 3an - 6mn \\ &= 2a(a + 2m) - 3n(a + 2m) \\ &= (a + 2m)(2a - 3n). \end{aligned}$$

例 5 把 $max + mbx + may + mby$ 分解因式.

因为各项有公因式 m , 应先提取这个公因式,另一个因式如果还能分解,那么就继续分解.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & max + mbx + may + mby \\ &= m(ax + bx + ay + by) \\ &= m[x(a + b) + y(a + b)] \\ &= m(a + b)(x + y). \end{aligned}$$

练习

把下列各式分解因式:

1. $2(a^3+3)-a(3a+4)$.

2. $2(x^2+6ab)-x(3a+8b)$.

3. $4a^2+4ab-4ac-4bc$.

4. ax^3-ax^2+ax-a .

习题二十一

1. 举例说明什么叫做因式、公因式和因式分解.

2. 写出已经学过的乘法公式, 根据因式分解和乘法的关系把下列各式分解因式:

(1) a^2-b^2 ;

(2) $a^2+2ab+b^2$;

(3) $a^2-2ab+b^2$.

3. 在下列各式的括号内, 填入适当的代数式:

(1) $3ax+3bx-3cx=3x(\quad)$;

(2) $3ax+3bx-3cx=-3x(\quad)$;

(3) $-7abx-14aby+49abz=-7ab(\quad)$;

(4) $-7abx-14aby+49abz=7ab(\quad)$.

4. 把下列各式分解因式:

(1) $at-bt+ct$;

(2) $15a^3+5a^2$;

(3) x^2y-xy^2 ;

(4) $3x^3y^2+15x^2y^3$;

(5) $a^2b^2-3ab+5a^3b$;

(6) $-4x^3y+6x^2y^2-8x^4y^2$;

(7) $5m(a+b)+4n(a+b)$;

(8) $a(x-y)-b(x-y)-c(x-y)$;

(9) $p(x-y)-q(y-x)$;

(10) $(x-a)^3+a(a-x)$;

$$(11) 2x(2x-y)^2 - y(y-2x)^2;$$

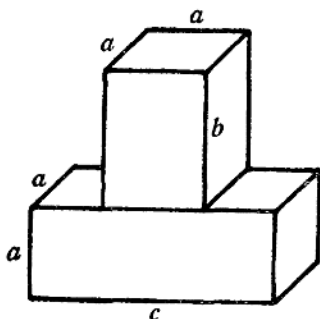
$$(12) (a-b)^2(a+b)^3 - (b-a)^2(b+a)^2.$$

5. 計算:

$$(1) 23.4 \times 12 + 26.6 \times 12;$$

$$(2) 24\frac{10}{13} \times 125 - 20\frac{1}{13} \times 125 + 35\frac{4}{13} \times 125.$$

6. (1) 計算如图所示工件的体积 V ; (2) 把所得工件的体积的式子分解因式; (3) 当 $a=5$ 厘米, $b=9$ 厘米, $c=12$ 厘米时, 这工件的体积是多少立方厘米?



(第6題)

7. 一台甲种电犁每小时耕地 2.4 亩, 一台乙种电犁每小时耕地 2.1 亩, 甲种电犁耕地 21 小时, 乙种电犁耕地 16 小时, 一共能耕多少亩?

8. 把下列各式分解因式:

$$(1) 2y(x-y) - x + y;$$

$$(2) ac + bc + a(a+b);$$

$$(3) ac + bc + 2a + 2b;$$

$$(4) a^2 - ab - 3a + 3b;$$

$$(5) 10ay - bx - 5by + 2ax;$$

$$(6) 4x^2 + 3z - 4xz - 3x;$$

$$(7) 30ax - 34bx - 15a + 17b;$$

$$(8) ac + bd - (bc + ad);$$

$$(9) x^2 + (a+b)x + ab;$$

$$(10) 15x^2 - (21a + 25b)x + 35ab;$$

$$(11) 4xy + 4xz + 4y + 4z;$$

$$(12) 7axy^2 - 3by - abxy + 21y^2.$$

9. 計算:

$$(1) 199^2 + 199 + 200;$$

$$(2) 31\frac{3}{4} \times 1\frac{4}{7} + 10\frac{1}{2} \times 14\frac{3}{7} - 21\frac{1}{4} \times 1\frac{4}{7}.$$

5.4 应用公式法

(1) 平方差公式 我們来看,怎样把多项式

$$a^2 - b^2$$

分解因式。在乘法公式里我們知道

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2,$$

反过来,就得到:

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b).$$

这就是说,两个数的平方差,等于这两个数的和与这两个数的差的积。遇到形式是两数平方差的式子,就可以用上面的公式来分解因式。

例1 把 $9a^2 - \frac{1}{4}$ 分解因式。

$$\text{解 } 9a^2 - \frac{1}{4} = (3a)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(3a + \frac{1}{2}\right)\left(3a - \frac{1}{2}\right).$$

例2 把 $a^4 - 16$ 分解因式。

$$\begin{aligned} \text{解 } a^4 - 16 &= (a^2)^2 - 4^2 = (a^2 + 4)(a^2 - 4) \\ &= (a^2 + 4)(a + 2)(a - 2). \end{aligned}$$

例3 計算 $5.6^2 - 4.4^2$.

解 $5.6^2 - 4.4^2 = (5.6 + 4.4)(5.6 - 4.4)$
 $= 10 \times 1.2 = 12.$

练习

1. 在下列括号內填入适当的單項式(系数是正的).

(1) $25m^2 = (\quad)^2$; (2) $81x^4y^2 = (\quad)^2$;

(3) $0.64m^2y^2 = (\quad)^2$; (4) $\frac{36}{49}a^2 = (\quad)^2$.

2. 把下列各式分解因式:

(1) $m^2 - \frac{1}{25}n^2$; (2) $9p^2 - 16q^2$;

(3) $x^4 - \frac{1}{16}y^4$; (4) $\frac{4}{25}x^2 - \frac{36}{49}y^2$.

3. 計算:

(1) $175^2 - 25^2$; (2) $(5\frac{1}{2})^2 - (3\frac{1}{2})^2$.

例4 把 $x^2 - (y-z)^2$ 分解因式.

解 $x^2 - (y-z)^2 = [x + (y-z)][x - (y-z)]$
 $= (x + y - z)(x - y + z).$

例5 把 $16(2m-n)^2 - 9(2m+n)^2$ 分解因式.

解 $16(2m-n)^2 - 9(2m+n)^2$
 $= [4(2m-n)]^2 - [3(2m+n)]^2$
 $= [4(2m-n) + 3(2m+n)][4(2m-n) - 3(2m+n)]$
 $= (8m - 4n + 6m + 3n)(8m - 4n - 6m - 3n)$
 $= (14m - n)(2m - 7n).$

例6 把 $3x^3 - 27x$ 分解因式。

解 $3x^3 - 27x = 3x(x^2 - 9) = 3x(x+3)(x-3)$ 。

练习

把下列各式分解因式：

1. $(a+b)^2 - 9$ 。

2. $m^2 - (a+b-c)^2$ 。

3. $9a^2 - (b+c)^2$ 。

4. $25(2x+3)^2 - 4(x-1)^2$ 。

(2) 完全平方公式 我们在乘法公式里学过

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2;$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

反过来,就得到:

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2;$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2.$$

这就是说,两个数的平方和加上(或者减去)这两个数的积的2倍,等于这两个数的和(或者差)的平方。遇到形式是两数平方和加上(或者减去)这两数的积的2倍的式子,就可以用上面的公式来分解因式。

例1 把 $a^2 + 6a + 9$ 分解因式。

解 $a^2 + 6a + 9$

$$= (a)^2 + 2(a)(3) + (3)^2$$

$$= (a+3)^2.$$

例2 把 $x^4 - 4x^2 + 4$ 分解因式。

解 $x^4 - 4x^2 + 4$

$$=(x^2)^2-2(x^2)(2)+(2)^2$$

$$=(x^2-2)^2.$$

例3 把 $25x^2-30xy+9y^2$ 分解因式.

解 $25x^2-30xy+9y^2$

$$=(5x)^2-2(5x)(3y)+(3y)^2$$

$$=(5x-3y)^2.$$

练 习

1. 把下列各式分解因式(口答):

$$(1) m^2+2mn+n^2; \quad (2) p^2-12p+36.$$

2. 代数式 $x^2+2xy-y^2$ 能不能用完全平方公式来分解因式? x^2+xy+y^2 呢?

3. 在下列各式的括号内填上适当的单项式,使所得的多项式可以应用完全平方公式来分解因式.

$$(1) y^2-(\quad)+z^2; \quad (2) 4x^2+(\quad)+9;$$

$$(3) 25x^2+(\quad)+1; \quad (4) x^4-(\quad)+49.$$

4. 把下列各式分解因式.

$$(1) 25x^2+10xy+y^2; \quad (2) 4a^2-12ab+9b^2.$$

例4 把 $(x+y)^2-4(x+y)b^2+4b^4$ 分解因式.

$$\text{解 } (x+y)^2-4(x+y)b^2+4b^4$$

$$=(x+y)^2-2(x+y)(2b^2)+(2b^2)^2$$

$$=[(x+y)-2b^2]^2$$

$$=(x+y-2b^2)^2.$$

例5 把 $a^2+2ab+b^2-c^2$ 分解因式.

把前三項作為一組，全式就可以利用平方差公式來分解因式。

$$\begin{aligned}\text{解 } a^2 + 2ab + b^2 - c^2 \\ &= (a+b)^2 - c^2 \\ &= (a+b+c)(a+b-c).\end{aligned}$$

练习

把下列各式分解因式：

1. $(a+b)^2 + 2(a+b) + 1$.
2. $9(x+y)^2 + 6(x+y)c + c^2$.
3. $x^2 - a^2 + 2ab - b^2$.
4. $2ab - a^2 - b^2 + 1$.

习题二十二

1. 把下列各式分解因式：

- (1) $36p^2 - 25$;
- (2) $16m^2 - 9n^2$;
- (3) $\frac{1}{4}x^2 - \frac{16}{25}y^2$;
- (4) $\frac{1}{9}a^2 - \frac{1}{16}b^2$;
- (5) $(x-1)^2 - 4x^2y^6$;
- (6) $(x+y)^2 - 36z^2$;
- (7) $(x-y)^2 - (a-b)^2$;
- (8) $(a-2b)^2 - (x-3y)^2$;
- (9) $4(a+2b)^2 - 25(a-b)^2$;
- (10) $16(x+y)^2 - 64(x-y)^2$;
- (11) $a^5 - ab^4$;
- (12) $4a^3b - 4ab^3$.

2. 計算：

- (1) $49.6^2 - 50.4^2$;
- (2) $\left(86\frac{4}{7}\right)^2 - \left(13\frac{3}{7}\right)^2$.