同济大学新编数学辅导丛书

工程硕士入学辅导
数学习题全解

线性代数

函数、极限与连续

一元函数积分学

一元函数微分学

向量代数与空间解析几何

无穷级数

常微分方程

多元函数微分学

多元函数积分学

肖亚兰等 编

同济大学出版社

同济大学新编数学辅导丛书

工程硕士入学辅导

数学习题全解

肖亚兰等 编

同济大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

工程硕士入学辅导数学习题全解/肖亚兰等 编. —上海:同济大学出版社,2002.5

ISBN 7-5608-2410-2

Ⅰ. 工… Ⅱ. 肖… Ⅲ. 高等数学—研究生—入学考试—解题 Ⅳ. 013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 019468 号

书 名 工程硕士入学辅导
数学习题全解

作 者 肖亚兰等编

责任编辑 李炳钊 责任校对 徐春莲 装帧设计 陈益平

出版发行 同济大学出版社

(上海四平路 1239 号 邮编 200092 电话 021-65985622)

经 销 全国各地新华书店

印 刷 江苏启东印刷厂印刷

开 本 850mm×1168mm 1/32

印 张 11

字 数 316 800

印 数 1—6 000

定 价 20.00 元

版 次 2002 年 5 月第 1 版 2002 年 5 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 7-5608-2410-2/O·208

前　　言

为了进一步规范工程硕士研究生的招生和教学工作，全国工程硕士专业学位教育指导委员会组织有关专家制定了《全国工程硕士研究生入学考试数学考试大纲》，并根据考试大纲的要求，编写了考前辅导教材. 本书是考前辅导教材全部习题的解答.

工程硕士专业学位从 1997 年开始在全国进行试点招生，受到工矿企业的欢迎，规模亦不断扩大，并从 2001 年开始实行全国联考. 由全国工程硕士专业学位教育指导委员会编写的《全国工程硕士研究生入学考试数学考试大纲及考前辅导教材》是应试者复习和备考的重要参考资料. 但对于绝大多数的应考者来说，由于参加工作时间较长，数学知识遗忘较多；特别是由于身处工矿企业，图书、资料较为缺乏. 因此，很需要这样一本习题全解，用以判断自己对知识掌握的程度和复习的好坏，以达到温故知新的目的. 本书就是根据这一需要而编写的. 为方便读者，书中对选择题和填空题也给出了解答. 书末附有《2001 年在职攻读硕士学位全国联考数学试题》及参考解答.

参加本书编写的有西北工业大学肖亚兰、吕全义、王禧玹，西安石油学院郝华宁，深圳大学赵冰，长安大学龚芳. 限于作者水平，加之时间仓促，错误及不足之处在所难免，恳请读者批评指正.

编者

2001 年 10 月

目　　录

第一篇　高等数学

第 1 章　函数、极限与连续

习题 1 …………………………………………………… (1)

第 2 章　一元函数微分学

习题 2 …………………………………………………… (20)

第 3 章　一元函数积分学

习题 3 …………………………………………………… (52)

第 4 章　向量代数与空间解析几何

习题 4 …………………………………………………… (85)

第 5 章　多元函数微分学

习题 5 …………………………………………………… (106)

第 6 章　多元函数积分学

习题 6 …………………………………………………… (141)

第 7 章　无穷级数

习题 7 …………………………………………………… (170)

第 8 章　常微分方程

习题 8 …………………………………………………… (199)

第二篇　线性代数

第 9 章　行列式

习题 9 …………………………………………… (264)
第 10 章　矩阵
习题 10 …………………………………………… (280)
第 11 章　线性相关与线性无关
习题 11 …………………………………………… (301)
第 12 章　线性方程组
习题 12 …………………………………………… (313)
附录
2001 年在职攻读硕士学位全国联考工程硕士数学甲试题
…………………………… (329)
2001 年在职攻读硕士学位全国联考工程硕士数学乙试题
…………………………… (341)

第一篇　高等数学

第1章　函数、极限与连续

习题 1

1. 下述函数 $f(x)$,$g(x)$是否相等,为什么?

(1) $f(x)=x$, $g(x)=(\sqrt{x})^2$;

(2) $f(x)=\sin(\arcsin x)$, $g(x)=\arcsin(\sin x)$.

解　(1) 不相等.因为 $f(x)$和 $g(x)$的定义域不同. $f(x)$的定义域是$(-\infty,+\infty)$,而 $g(x)$的定义域是$[0,+\infty)$.

(2) 不相等.因为 $f(x)$和 $g(x)$的定义域不同. $f(x)$的定义域是$[-1,1]$,而 $g(x)$的定义域是$(-\infty,+\infty)$.

2. 设 $f(x)=\begin{cases}|\sin x|, & |x|<1,\\ 0, & |x|\geqslant 1.\end{cases}$ 求 $f(1)$,$f(-2)$,$f\left(\frac{\pi}{4}\right)$,$f\left(-\frac{\pi}{4}\right)$.

解　$f(1)=0$, $f(-2)=0$,

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\left|\sin\frac{\pi}{4}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2},\ f\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\left|\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

3. 作下列函数的图形.

(1) $y=|\sin x+\cos x|$;　　(2) $y=\begin{cases}2-x^2, & |x|\leqslant 1,\\ x^{-1}, & |x|>1.\end{cases}$

解　(1) 见图 1-1;(2) 见图 1-2.

4. 已知 $f(x)$是线性函数,即 $f(x)=ax+b$,且 $f(-1)=2$,

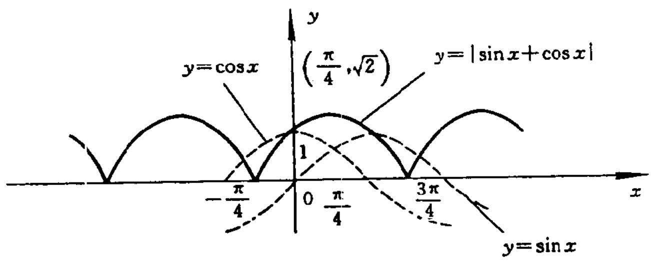

图 1-1

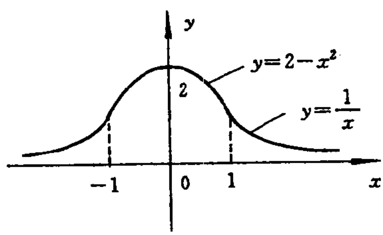

图 1-2

$f(2)=-3$,求 $f(5)$.

解 由 $f(-1)=2, f(2)=-3$ 可得

$$\begin{cases}-a+b=2,\\ 2a+b=-3.\end{cases}$$

解之得 $a=-\frac{5}{3}, b=\frac{1}{3}$. 故 $f(x)=-\frac{5}{3}x+\frac{1}{3}$,于是 $f(5)=-8$.

5. 求下列函数定义域.

(1) $y=\frac{1}{|x|-x}$;　　(2) $y=\sqrt{\sin x}+\sqrt{16-x^2}$;

(3) $y=\sqrt{x^2-x}\arcsin x$;　　(4) $y=\arccos\sqrt{\lg(x^2-1)}$.

解 (1) 令 $|x|-x\neq 0$,即 $|x|\neq x$,满足不等式的 $x\in(-\infty,0)$,故函数的定义域为 $D=(-\infty,0)$.

(2) $\begin{cases}\sin x\geqslant 0,\\ 16-x^2\geqslant 0,\end{cases}$ 解之得

$$\begin{cases}x\in[2k\pi,(2k+1)\pi],k=0,\pm1,\cdots,\\ |x|\leqslant 4.\end{cases}$$

故函数的定义域为 $D=[-4,-\pi]\cup[0,\pi]$.

(3) $\begin{cases}x^2-x\geqslant 0,\\ |x|\leqslant 1.\end{cases}$ 解之得 $\begin{cases}x\geqslant 1 \text{ 或 } x\leqslant 0,\\ |x|\leqslant 1,\end{cases}$

故函数的定义域为 $[-1,0]$ 和 $x=1$.

(4) $\begin{cases}x^2-1>0,\\ 0\leqslant \lg(x^2-1)\leqslant 1,\end{cases}$ 解之得 $\begin{cases}|x|>1,\\ \sqrt{2}\leqslant|x|\leqslant\sqrt{11},\end{cases}$

故函数的定义域为 $[-\sqrt{11},-\sqrt{2}]\cup[\sqrt{2},\sqrt{11}]$.

6. 若函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0,1]$，分别求 $f(\ln x)$ 和 $f(x+a)+f(x-a)\left(0<a<\dfrac{1}{2}\right)$ 的定义域.

解 根据函数复合的法则，应有

$$0\leqslant\ln x\leqslant 1,\text{解之得 } 1\leqslant x\leqslant \mathrm{e}.$$

故 $f(\ln x)$ 的定义域为 $[1,\mathrm{e}]$.

同理，应有

$$\begin{cases}0\leqslant x+a\leqslant 1,\\ 0\leqslant x-a\leqslant 1.\end{cases}\text{解之得}\begin{cases}-a\leqslant x\leqslant 1-a,\\ a\leqslant x\leqslant 1+a.\end{cases}$$

由 $0<a<\dfrac{1}{2}$ 得，$a\leqslant x\leqslant 1-a$. 即 $f(x+a)+f(x-a)$ 的定义域为 $[a,1-a]$.

7. 建立函数关系.

(1) 在一个半径为 r 的球内，嵌入一内接圆柱，试求圆柱体的体积 V 与圆柱高 h 的函数关系，并求出此函数的定义域.

(2) 在底 $AC=b$、高 $BD=h$ 的三角形 ABC 中，内接矩形 $KLMN$，其高记为 x，将矩形周长 p 和面积 S 表为 x 的函数.

(3) 长为 l 的弦，两端固定，在点 C 处将弦提高 h，设提高时弦上各点仅沿着垂直于两端点连线方向移动，以 x 表示弦上点的原来位置，y 表示 x 点处升高的高度，建立 x 与 y 间的函数关系.

(4) 机械中常用的一种既可改变运动方向又可调整运动速度的滑块机构. 现设滑块 A，B 与 O 点的距离分别为 x 与 y，$\angle AOB=\alpha$(定值)，连接滑块 A 与 B 的杆长为 l(定值)，试建立 x 与 y 之间的函数关系.

(5) 某运输公司规定货物的吨公里运价为：在 a 公里以内每公里 k 元；超过 a 公里时，超过的部分每公里为 $0.8k$ 元，求运价 m 和里程 x 的函数关系.

解 (1) 圆柱体的体积

$$V=\pi\cdot\left(\sqrt{r^2-\left(\frac{h}{2}\right)^2}\right)^2\cdot h=\pi h\left[r^2-\left(\frac{h}{2}\right)^2\right].$$

函数的定义域为 $(0,2r)$.

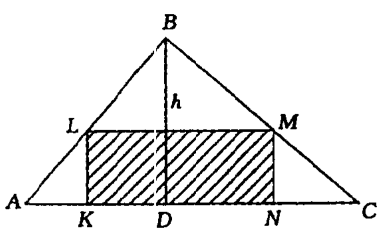

图 1-3

(2) 设矩形另一边长为 y，则由图 1-3，三角形 AKL 相似于三角形 ADB，可得

$$\frac{AK}{AD}=\frac{x}{h},$$

即 $\quad x\cdot AD=h\cdot AK,$

同理，$x\cdot DC=h\cdot NC$，两式相加可得

$$x\cdot(AD+DC)=h\cdot(AK+NC),\quad 即\quad x\cdot b=h\cdot(b-y),$$

于是，$y=b-\frac{b}{h}x$，矩形的周长 p 和面积 S 分别为

$$p=2(x+y)=\frac{2}{h}[hb+(h-b)x],$$

$$S=xy=\frac{b}{h}(h-x)x,\quad 0<x<h.$$

(3) 如图 1-4，设 (x,y) 为形变后的弦上任意一点，C 点坐标为 $(c,0)$，则当 $0\leqslant x\leqslant c$ 时，

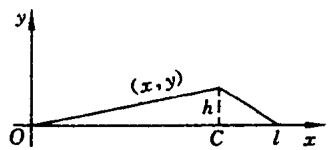

图 1-4

$$\frac{h}{c}=\frac{y}{x},\quad 即\quad y=\frac{h}{c}x.$$

当 $c<x\leqslant l$ 时，

$$\frac{h}{l-c}=\frac{y}{l-x},\quad 即\quad y=\frac{h}{l-c}(l-x).$$

故 x 与 y 间的函数关系为

$$y=\begin{cases}\frac{h}{c}x, & 0\leqslant x\leqslant c,\\ \frac{h}{l-c}(l-x), & c<x\leqslant l.\end{cases}$$

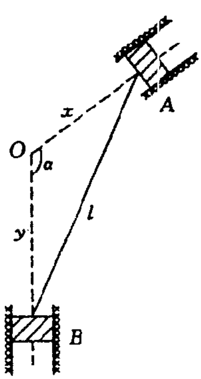

图 1-5

(4) 如图 1-5，由余弦定理可得 x,y,α,l 间的关系：

$$x^2+y^2-2xy\cos\alpha=l^2.$$

(5) 易得

$$m=\begin{cases}kx, & 0<x\leqslant a,\\ ka+0.8k(x-a), & x>a.\end{cases}$$

8. 指出下列函数中的奇偶函数和周期函数.

(1) $y=|\sin x|$; (2) $y=2+\tan\pi x$;

(3) $y=3^{-x}(1+3^{x})^{2}$.

解 (1) $y(x+\pi)=|\sin(x+\pi)|=|\sin x|=y(x)$，故 $y=|\sin x|$ 是以 π 为周期的周期函数.

(2) $y(x+1)=2+\tan\pi(x+1)=2+\tan(\pi x+\pi)=2+\tan\pi x=y(x)$，故 $y=2+\tan\pi x$ 是以 1 为周期的周期函数.

(3)
$$\begin{aligned}y(-x)&=3^{x}\times(1+3^{-x})^{2}=3^{x}\times[3^{-x}(3^{x}+1)]^{2}\\&=3^{x}\times3^{-2x}(1+3^{x})^{2}=3^{-x}\times(1+3^{x})^{2}=y(x),\end{aligned}$$

故 $y=3^{-x}(1+3^{x})^{2}$ 是偶函数.

9. 指出下列函数的单调区间及有界性.

(1) $y=\dfrac{1}{x}$; (2) $y=\arctan x$;

(3) $y=\ln(1+x)$; (4) $y=\sqrt{a^{2}-x^{2}}$.

解 (1) $y=\dfrac{1}{x}$ 在 $(-\infty,0)$ 及 $(0,+\infty)$ 均单调递减，且无界.

(2) $y=\arctan x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调增，且有界：

$$|y|\leqslant\frac{\pi}{2},\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

(3) $y=\ln(1+x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上单调增，且无界.

(4) $y=\sqrt{a^{2}-x^{2}}$ 在 $[-a,0]$ 上单调增，在 $[0,a]$ 上单调减. 函数在 $[-a,a]$ 上有界：$|y|\leqslant a$.

10. 求下列函数的反函数.

(1) $y=\dfrac{2^{x}}{1+2^{x}}$; (2) $y=\ln(x+\sqrt{x^{2}+1})$.

解 (1) 由 $y=\dfrac{2^{x}}{1+2^{x}}$ 可得 $2^{x}=\dfrac{y}{1-y}$，故 $x=\log_{2}\dfrac{y}{1-y}$.

又由 $y=\dfrac{2^{x}}{1+2^{x}}$ 可知 $0<y<1$，故函数 $y=\dfrac{2^{x}}{1+2^{x}}$ 的反函数为

$$y=\log_2\frac{x}{1-x},\quad 0<x<1.$$

(2) 由 $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ 可解得 $x=\frac{e^y-e^{-y}}{2}$. 又由 $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ 可知 $-\infty<y<+\infty$,故函数 $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ 的反函数为

$$y=\frac{e^x-e^{-x}}{2},\quad -\infty<x<+\infty.$$

11. 设 $y=f(x)$ 是以 2π 为周期的函数,当 $-\pi\leqslant x<\pi$ 时,$f(x)=x$,求函数 $f(x)$.

解 对于 $(-\infty,+\infty)$ 内任意一点 x,假设 $(2k-1)\pi\leqslant x<(2k+1)\pi$,则 $x=2k\pi+x_0$, $-\pi\leqslant x_0<\pi$,由 $y=f(x)$ 以 2π 为周期可得

$$f(x)=f(2k\pi+x_0)=f(x_0)=x_0=x-2k\pi.$$

故函数 $f(x)=x-2k\pi$, $(2k-1)\pi\leqslant x<(2k+1)\pi$.

12. 设 $f(x)$ 是奇函数,当 $x>0$ 时,$f(x)=x-x^2$,求 $f(x)$.

解 因为 $f(x)$ 是奇函数,所以 $-f(-x)=f(x)$. 而

$$-f(-x)=-(-x-x^2)=x+x^2.$$

故
$$f(x)=\begin{cases}x-x^2, & x>0,\\ x+x^2, & x<0.\end{cases}$$

13. 下列函数是由哪些基本初等函数复合的?

(1) $y=\sin^3\frac{1}{x}$;　　(2) $y=2^{\arcsin x^2}$;

(3) $y=\lg\lg\lg\sqrt{x}$;　　(4) $y=\arctan e^{\cos x}$.

解 (1) $y=\sin^3\frac{1}{x}$ 是由 $y=u^3$, $u=\sin v$, $v=x^{-1}$ 复合而成

的.

(2) $y=2^{\arcsin x^2}$ 是由 $y=2^u$，$u=\arcsin v$，$v=x^2$ 复合而成的.

(3) $y=\lg\lg\lg\sqrt{x}$是由 $y=\lg u$，$u=\lg v$，$v=\lg w$，$w=x^{\frac{1}{2}}$复合而成的.

(4) $y=\arctan e^{\cos x}$是由 $y=\arctan u$，$u=e^v$，$v=\cos x$ 复合而成的.

14. 设 $f(x)=\sin x$，$f[\varphi(x)]=1-x^2$，且$|\varphi(x)|\leqslant 1$，求$\varphi(x)$及其定义域.

解 $f[\varphi(x)]=\sin\varphi(x)=1-x^2$，

所以 $$\varphi(x)=\arcsin(1-x^2).$$

又因为$|\varphi(x)|\leqslant 1$，所以有$|\arcsin(1-x^2)|\leqslant 1$，解之得$\sqrt{1-\sin 1}\leqslant x\leqslant\sqrt{1+\sin 1}$. 故有

$$\varphi(x)=\arcsin(1-x^2)\quad x\in[\sqrt{1-\sin 1},\sqrt{1+\sin 1}]$$

15. 已知 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{x^2}{x^4+1}$，求 $f(x)$.

解 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1}{x^2+\dfrac{1}{x^2}}=\dfrac{1}{\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2}$，

令 $x+\dfrac{1}{x}=u$，得 $f(u)=\dfrac{1}{u^2-2}$，故 $f(x)=\dfrac{1}{x^2-2}$.

16. 设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 4,\\ e^x, & x>4,\end{cases}$ $\varphi(x)=\begin{cases}1+x, & x\leqslant 0,\\ \ln x, & x>0,\end{cases}$ 求$\varphi[f(x)]$.

解 $\varphi[f(x)]=\begin{cases}1+f(x), & f(x)\leqslant 0\\ \ln f(x), & f(x)>0\end{cases}$

$$=\begin{cases}1, & x=0,\\ \ln x^2, & x<0 \text{ 或 } 0<x\leqslant 4,\\ \ln e^x, & x>4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}1, & x=0,\\ \ln x^2, & x<0 \text{ 或 } 0<x\leqslant 4,\\ x, & x>4.\end{cases}$$

17. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2+2x+5}{x^2+1}$;　　(2) $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{(x+h)^2-x^2}{h}$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}\right)$;　　(4) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$;

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})$;　　(6) $\lim\limits_{x\to-8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$;

(7) $\lim\limits_{n\to\infty}[(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2^n})]\ |x|<1$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2+2x+5}{x^2+1}=\dfrac{1-2+5}{1+1}=2.$

(2) $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{(x+h)^2-x^2}{h}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{2hx+h^2}{h}$

$=\lim\limits_{h\to0}(2x+h)=2x.$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\dfrac{1}{2}}=2.$

(4) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+x+1-3}{1-x^3}$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)(x+2)}{(1-x)(1+x+x^2)}=-\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x+2}{1+x+x^2}=-1.$

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+1-(x^2-1)}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}$

$=2\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}=0.$

(6) $\lim\limits_{x\to-8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}=\lim\limits_{x\to-8}\dfrac{(1-x-9)(4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}{(8+x)(\sqrt{1-x}+3)}$

$$=-\lim_{x\to-8}\frac{4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{1-x}+3}=-\frac{4+4+4}{3+3}=-2.$$

(7) 注意到$|x|<1$，$\lim\limits_{n\to\infty}[(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2^n})]$

$$=\frac{1}{1-x}\lim_{n\to\infty}[(1-x)(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2^n})]$$

$$=\frac{1}{1-x}\lim_{n\to\infty}[(1-x^2)(1+x^2)\cdots(1+x^{2^n})]$$

$$=\frac{1}{1-x}\lim_{n\to\infty}(1-x^{2^{n+1}})=\frac{1}{1-x}.$$

18\. 已知$\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{x^2+1}{x+1}-(ax+b)\right]=0$，求常数$a,b$.

解 由 $0=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{x^2+1}{x+1}-(ax+b)\right]$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(1-a)x^2-(a+b)x+1-b}{x+1}$$

可知，$1-a=0$，$a+b=0$，解之得$a=1$，$b=-1$.

19\. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sin^2\sqrt{x}}{x}$； (2) $\lim\limits_{x\to n\pi}\dfrac{\sin x}{x-n\pi}$；

(3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 2x}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}$； (4) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{1-2\cos x}{\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)}$；

(5) $\lim\limits_{x\to0}(1-3x)^{\frac{1}{x}}$； (6) $\lim\limits_{x\to0}(1+\tan x)^{\frac{1}{\sin x}}$；

(7) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x$； (8) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{x}{n}+\dfrac{x^2}{2n^2}\right)^{-n}$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sin^2\sqrt{x}}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2=1.$

(2) $\lim\limits_{x\to n\pi}\dfrac{\sin x}{x-n\pi}\xlongequal{x-n\pi=t}\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin(n\pi+t)}{t}$

$=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{(-1)^n\sin t}{t}=(-1)^n.$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x\cdot(\sqrt{x+2}+\sqrt{2})}{x+2-2}$

$=4\sqrt{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{2x}=4\sqrt{2}.$

(4) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{1-2\cos x}{\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)}\xlongequal{x-\frac{\pi}{3}=t}\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1-2\cos\left(\dfrac{\pi}{3}+t\right)}{\sin t}$

$=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1-2\left[\cos\dfrac{\pi}{3}\cos t-\sin\dfrac{\pi}{3}\sin t\right]}{\sin t}$

$=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1-\cos t+\sqrt{3}\sin t}{\sin t}=\lim\limits_{t\to 0}\left[\dfrac{1-\cos t}{\sin t}+\sqrt{3}\right]$

$=\sqrt{3}+\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{2\sin^2\dfrac{t}{2}}{2\sin\dfrac{t}{2}\cos\dfrac{t}{2}}=\sqrt{3}+\lim\limits_{t\to 0}\tan\dfrac{t}{2}=\sqrt{3}.$

(5) $\lim\limits_{x\to 0}(1-3x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\left[(1-3x)^{\frac{1}{-3x}}\right]^{-3}=\mathrm{e}^{-3}.$

(6) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\tan x)^{\frac{1}{\sin x}}=\lim\limits_{x\to 0}\left[(1+\tan x)^{\cot x}\right]^{\frac{1}{\cos x}}=\mathrm{e}.$

(7) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+x}{x}\right)^{-x}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x\right]^{-1}=\mathrm{e}^{-1}.$

(8) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{x}{n}+\dfrac{x^2}{2n^2}\right)^{-n}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{x}{n}+\dfrac{x^2}{2n^2}\right)^{\frac{1}{\frac{x}{n}+\frac{x^2}{2n^2}}}\right]^{\left(\frac{x}{n}+\frac{x^2}{2n^2}\right)\cdot(-n)}$