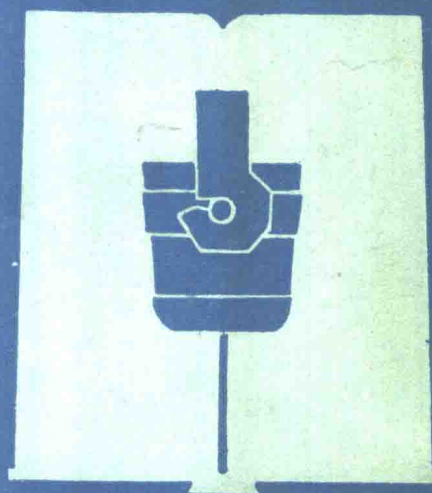
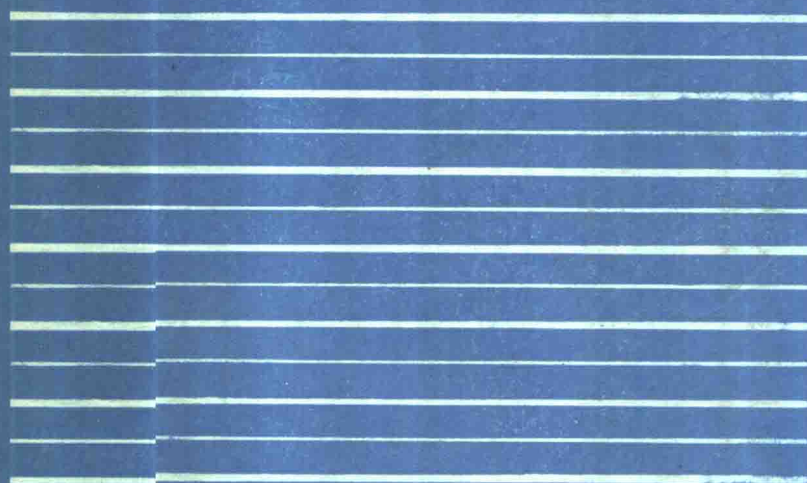


• 高等学校教学用书 •

结构力学的电子计算机 计算原理及程序设计

GAODENG XUEXIAO JIAOXUE YONGSHU



冶金工业出版社

参5087 高等学校教学用书

结构力学的电子 计算机计算原理 及程序设计

西安冶金建筑学院 沈锦英 编

冶金工业出版社

中

高等学校教学用书
结构力学的电子计算机计算原理及程序设计
西安冶金建筑学院 沈锦英 编

冶金工业出版社出版

(北京北河沿大街嵩祝院北巷35号)

新华书店北京发行所发行

冶金工业出版社印刷厂印刷

787×1092 1/16 印张 16 字数 382 千字

1988年11月第一版 1988年11月第一次印刷

印数00,001~3,500册

ISBN 7-5024-0291-8

TU·11(课)定价3.15元

前 言

《结构力学的电子计算机计算原理和程序设计》一书是根据1987年冶金高等院校工业与民用建筑专业结构力学教学大纲编写的，适用于工业与民用建筑专业和其它有关专业教学之用，亦可供工程技术人员参考。

本书是结构力学中应用电子计算机的新内容。书中结合电子计算机计算实际讲述结构矩阵分析的理论和方法，使结构矩阵分析立足于电子计算机计算；介绍各种贮存情况下杆系结构静力分析的粗细框图和相应的BASIC语言程序，读者若使用其它算法语言时，仍可按书中框图进行描述。学习本书内容时，应注意掌握电子计算机计算原理、了解电子计算机计算流程和程序设计方法，以便举一反三。

参加本书审稿工作的有李德健、钟朋、王荫长、刘铮、蔡西生、马禹川、韩振泰、李崇仁等同志。他们对本书初稿提出了许多宝贵意见和建议，在此表示深切的谢意。

限于编者水平，书中的错误和不足之处，务请读者批评指正。

编 者

1988年1月

目 录

第一章 结构矩阵分析概论	1
§ 1-1 概述	1
§ 1-2 柔度法	2
§ 1-3 刚度法概念	9
习题	13
第二章 单元刚度矩阵	14
§ 2-1 两种直角坐标系	14
§ 2-2 杆件坐标系中平面等截面直杆单元刚度矩阵	16
§ 2-3 结构坐标系中的等截面直杆单元刚度矩阵	22
§ 2-4 带刚域的变截面直杆单元刚度矩阵	32
* § 2-5 考虑剪切变形的单元刚度矩阵	37
习题	40
第三章 结构刚度矩阵	42
§ 3-1 形成结构刚度矩阵的原理、方法	42
§ 3-2 直接刚度法形成总刚度矩阵的步骤	49
§ 3-3 总刚度矩阵的特性及其应用	64
§ 3-4 处理边界条件的两种方法	69
习题	74
第四章 直接刚度法形成总刚度矩阵的框图及程序	77
§ 4-1 满阵贮存	77
§ 4-2 等带宽半带二维贮存(后处理法)	80
§ 4-3 等带宽半带二维贮存(先处理法)	87
习题	99
第五章 综合结点荷载矩阵	101
§ 5-1 等效结点荷载	101
§ 5-2 杆件坐标中的单元固端力矩阵	103
§ 5-3 综合结点荷载矩阵	109
§ 5-4 形成综合结点荷载矩阵的框图	119
§ 5-5 形成平面刚架综合结点荷载矩阵的程序和算例	122
习题	128
第六章 结点位移矩阵与杆端内力矩阵	130
§ 6-1 线性方程组的矩阵解法	130
* § 6-2 半带消去法求结点位移矩阵	140
§ 6-3 单元杆端内力矩阵	147
§ 6-4 求杆端内力矩阵的框图和程序	155
习题	158
第七章 直接刚度法全过程及结构分析程序设计	160

§ 7-1 结构分析中的几个问题	160
§ 7-2 直接刚度法全过程举例	164
§ 7-3 结构分析程序设计概述	187
§ 7-4 连续梁程序设计	189
§ 7-5 平面桁架程序设计	196
§ 7-6 平面刚架程序设计	203
习题	219
★第八章 聚缩矩阵及其应用	221
§ 8-1 变截面单元分析	221
§ 8-2 子结构的应用	227
§ 8-3 聚缩矩阵的其它应用	232
习题	236
附录 I 空间等截面直杆单元刚度矩阵	238
附录 II 变带宽一维贮存的总刚度矩阵及其 LDLT 解法	243
参考文献	250

第一章 结构矩阵分析概论

§ 1-1 概 述

电子数字计算机的出现给力学领域带来了变革。以往在使用简单计算工具的条件下,解高次超静定结构需要花费大量人力和时间,不仅速度低,精度也差,对于大型复杂结构更难计算。电子数字计算机问世后,为人们提供了高速度、高精度的计算工具。于是,在结构分析中,特别是在大型结构的计算中,广泛采用了数值计算的矩阵分析方法。矩阵方法不仅可以用紧凑而简洁的符号代替传统的数学表达式,更重要的是矩阵运算的规律性和单一性便于编制电子计算机的程序,从而实现自动的高速运算。这种用数学上的矩阵理论来分析结构力学问题的方法,称作结构矩阵分析。结构矩阵分析是随着电子数字计算机的出现而发展起来的一种新的结构分析方法。

结构矩阵分析的基本思路是把连续的实际结构离散化,先离散,后组合(图1-1),以等效的数学模型代替真实结构进行计算,以便从简单问题入手,解决复杂问题。所谓离散化,就是把实际结构分解成若干个有限数目的单元体。在杆系结构中,每根杆件就是一个单元。离散单元的分析是结构矩阵分析的基础。所谓组合,就是利用变形协调条件和静力平衡条件,把各单元体在有关结点上互相连接起来,进行组合,形成等效的数学模型。对杆系结构来讲,此等效数学模型就是真实结构。不论杆系结构的组成如何复杂,其组合方法都是一致的。在这一分一合、先离散后组合的过程中,把复杂结构的计算问题转化为简单单元的分析 and 集合问题,从而达到了由简单问题入手解决复杂问题的目的。在结构矩阵分析中,从单元分析到整体组合的全部计算过程,一律采用矩阵方法。因此,在电算时,从原始数据的输入到计算结果的输出,都可以由电子计算机自动完成,从而大大提高计算的速度和精度,使人们得以从繁重的“手算”工作中解放出来。目前,复杂杆系结构的静力、动力和稳定性的计算以及连续体的计算,普遍采用这一方法。

在结构矩阵分析中,沿用传统结构力学的基本假定、基本原理和基本方法。在线弹性体系中,假定材料是完全弹性且服从虎克定律,结构只产生小变形,杆件轴力对弯曲的影响可以忽略。因此,作用力和位移之间呈线性关系,可以应用迭加原理。迭加原理是结构矩阵分析的基础。结构矩阵分析的基本方法是矩阵力法和矩阵位移法,在线弹性体中分别称为柔度法和刚度法。

柔度法是以超静定结构的多余未知力作为基本未知量,其基本结构是去掉多余约束的静定结构。各种不同的超静定结构,其基本结构和多余力各不相同。即使同一超静定结构,也可选择多种不同的基本结构和相应的多余未知力。所以,用柔度法计算要较多地结合结构物的具体情况,难以编制各类结构的通用程序。

刚度法是以结构的自由结点位移为基本未知量,其基本结构是加上结点位移约束后的约束结构。在一定的变形条件下,同一结构中结点位移和约束结构的形式是确定不变的。各种不同结构除单元分析的表达式和原始数据不同之外,其单元分析、整体组合过程和计算方法是相同的。各种不同结构,不论静定结构或超静定结构,都可用同样方法实现自动运算,因而便于编制通用程序。在刚度法中,由于离散单元组成整体结构的方法不同,又有

刚度法和直接刚度法之分。在直接刚度法中,总刚度矩阵的元素可以由各单元刚度矩阵元素按照一定的规则直接形成,不仅运算简单,还能节省大量计算机贮存单元,最适合于“电算”。目前国内外普遍采用直接刚度法进行结构矩阵分析。本书将着重研究直接刚度法,对柔度法只作简单讨论。

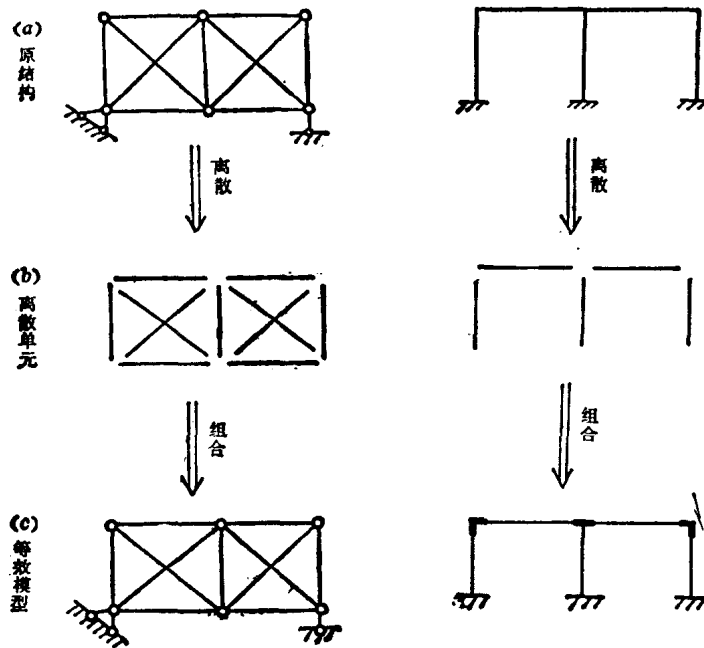


图 1-1

§ 1-2 柔 度 法

柔度法就是线性弹性体系中的矩阵力法,其计算原理和传统的力法相同,也是以超静定结构的多余未知力为基本未知量,以去掉多余约束的静定结构为基本结构,从而根据变形条件建立柔度法方程并求得多余未知力。求出多余未知力后,就可以按静定结构计算其余的内力、反力和位移。

本节介绍柔度法概念,研究结点位移的矩阵表达式和建立柔度法方程。

一、柔度法概念

为了对柔度法有一个粗略而清晰的了解,我们以图1-2中的两跨等截面连续梁为例,介绍柔度法的思路和解题过程。两跨连续梁 ABC 受均布荷载 q 作用,其结构情况如图1-2a所示,其中各跨的 EI 为常数。用柔度法求此连续梁内力的全过程如下:

1. 确定超静定次数,选择基本结构和多余未知力

由图1-2a可知,一端铰支、另一端固定的两跨连续梁 ABC 的超静定次数为2。现选择中间支座处截面 B 和固定端截面 C 的弯矩为多余未知力,如图1-2b所示。

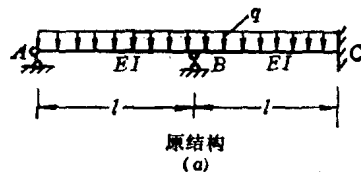
2. 划分单元求杆端位移

以 A 、 B 、 C 为结点,连续梁可划分(1)、(2)两个简支式单元,图1-2b描述了单元划分情况。

当只考虑弯曲变形时,简支式单元的柔度系数为:

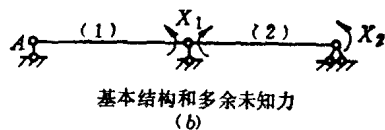
$X_1=1$ 作用时 (图1-2c)

$$\left. \begin{array}{l} \text{单元 (1)} \quad f_{11}^{(1)} = \frac{l}{3EI} \\ \text{单元 (2)} \quad \left. \begin{array}{l} f_{11}^{(2)} = \frac{l}{3EI} \\ f_{21}^{(2)} = \frac{l}{6EI} \end{array} \right\} \end{array} \right\} \quad (a)$$



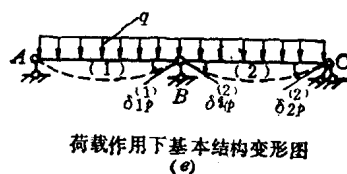
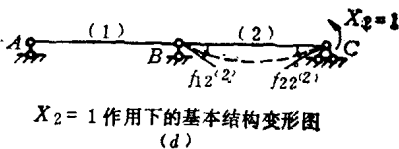
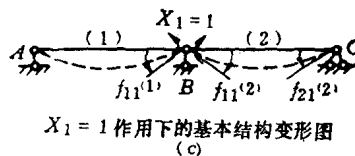
$X_2=1$ 作用时 (图1-2d)

$$\left. \begin{array}{l} \text{单元 (2)} \quad \left. \begin{array}{l} f_{12}^{(2)} = \frac{l}{6EI} \\ f_{22}^{(2)} = \frac{l}{3EI} \end{array} \right\} \end{array} \right\} \quad (b)$$



考虑弯曲变形在均布荷载 q 作用下的各杆端位移 (图1-2e) 为:

$$\left. \begin{array}{l} \text{单元 (1)} \quad \delta_{1p}^{(1)} = \frac{ql^3}{24EI} \\ \text{单元 (2)} \quad \left. \begin{array}{l} \delta_{1p}^{(2)} = \frac{ql^3}{24EI} \\ \delta_{2p}^{(2)} = \frac{ql^3}{24EI} \end{array} \right\} \end{array} \right\} \quad (c)$$



以上各单元柔度系数和荷载作用下杆端位移的正负号, 均以多余未知力的正向为正, 反向为负。其右上角圆括号内的数字代表单元的序号。

3. 求多余未知力方向上的位移, 建立柔度法方程

基本结构在多余力 X_1 、 X_2 和荷载的共同作用下, 沿 X_1 和 X_2 方向上的位移应该和原结构的实际位移 Δ_1 和 Δ_2 相等, 故

$$\begin{aligned} (f_{11}^{(1)} + f_{11}^{(2)}) X_1 + f_{12}^{(2)} X_2 + (\delta_{1p}^{(1)} + \delta_{1p}^{(2)}) &= \Delta_1 \\ f_{21}^{(2)} X_1 + f_{22}^{(2)} X_2 + \delta_{2p}^{(2)} &= \Delta_2 \end{aligned} \quad (d)$$

式 (d) 又可写为

$$\begin{aligned} f_{11} X_1 + f_{12} X_2 + \Delta_{1p} &= \Delta_1 \\ f_{21} X_1 + f_{22} X_2 + \Delta_{2p} &= \Delta_2 \end{aligned} \quad (e)$$

式 (e) 可用矩阵形式表示如下:

$$\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta_{1p} \\ \Delta_{2p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{bmatrix} \quad (1-1)$$

式中 f_{11} 、 f_{12} 、 f_{21} 、 f_{22} 都是此连续梁的柔度系数。 f_{12} 是基本结构上沿多余力 X_1 方向上由 $X_2=1$ 单独作用时所产生的位移, f_{21} 是基本结构上沿多余力 X_2 方向上由 $X_1=1$ 单独作用时所产生的位移, Δ_{1p} 和 Δ_{2p} 分别是基本结构上沿多余力 X_1 和 X_2 方向由荷载作用所产生的位移。

图 1-2

式 (1-1) 可简写为

$$[f]\{X\} + \{\Delta_P\} = \{\Delta\} \quad (1-2)$$

式 (1-2) 就是柔度法方程, 其中

$[f]$ ——结构柔度矩阵;

$\{X\}$ ——多余未知力矩阵;

$\{\Delta_P\}$ ——基本结构上, 沿多余未知力方向由荷载产生的位移矩阵;

$\{\Delta\}$ ——原结构在多余未知力方向上的位移矩阵。

4. 求多余未知力矩阵

解式 (1-2) 的线性方程组, 可求得未知力矩阵 $\{X\}$ 。由图 1-2a 知, $\{\Delta\} = \{0\}$, 故

$$\{X\} = -[f]^{-1}\{\Delta_P\} \quad (1-2a)$$

对比式 (e) 和 (d), 并将 (a)、(b)、(c) 代入式 (1-2a), 可得

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} &= - \begin{bmatrix} \frac{l}{3EI} + \frac{l}{3EI} & \frac{l}{6EI} \\ \frac{l}{6EI} & \frac{l}{3EI} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{ql^3}{24EI} + \frac{ql^3}{24EI} \\ \frac{ql^3}{24EI} \end{Bmatrix} \\ &= -\frac{36EI}{7l} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{ql^3}{12EI} \\ \frac{ql^3}{24EI} \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

即

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = ql^2 \begin{Bmatrix} -\frac{3}{28} \\ -\frac{1}{14} \end{Bmatrix}$$

5. 求各单元杆端力矩阵

已知多余未知力之后, 可用下式求各单元的杆端力:

$$\{A_M\}_{sm \times 1} = \{A_{MP}\}_{sm \times 1} + [A_{MX}]_{sm \times n} \{X\}_{n \times 1} \quad (1-3)$$

式中 n ——多余未知力数;

sm ——结构中各单元的杆端力总数, 等于结构中的单元数与每个单元的杆端力数之乘积;

$\{A_M\}_{sm \times 1}$ ——实际结构上由荷载引起的诸单元杆端力矩阵;

$\{A_{MP}\}_{sm \times 1}$ ——基本结构上由荷载引起的诸单元杆端力矩阵;

$[A_{MX}]_{sm \times n}$ ——基本结构上由各个单位多余力单独作用时所引起的诸单元杆端力矩阵。

在 $\{A_M\}$ 、 $\{A_{MP}\}$ 和 $[A_{MX}]$ 中, 各杆端力按单元序号 (1, 2, ..., m) 自上而下依次排列, 其中每一单元的杆端力按先左后右的次序排列。杆端弯矩以顺时针为正, 逆时针为负。由图 1-3a 知

$$\{A_{MP}\}_{4 \times 1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{4 \times 1}$$

$$X_1 = 1 \quad X_2 = 1$$

$$[A_{MX}]_{4 \times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}_{4 \times 2}$$

将 $\{A_{MP}\}$, $[A_{MX}]$ 和 $\{X\}$ 代入式 (1-3). 则

$$\begin{aligned} \{A_M\}_{4 \times 1} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{3}{28} \\ -\frac{1}{14} \end{pmatrix} q l^2 \\ &= q l^2 \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{28} \\ -\frac{3}{28} \\ \frac{1}{14} \end{pmatrix}_{4 \times 1} \end{aligned}$$

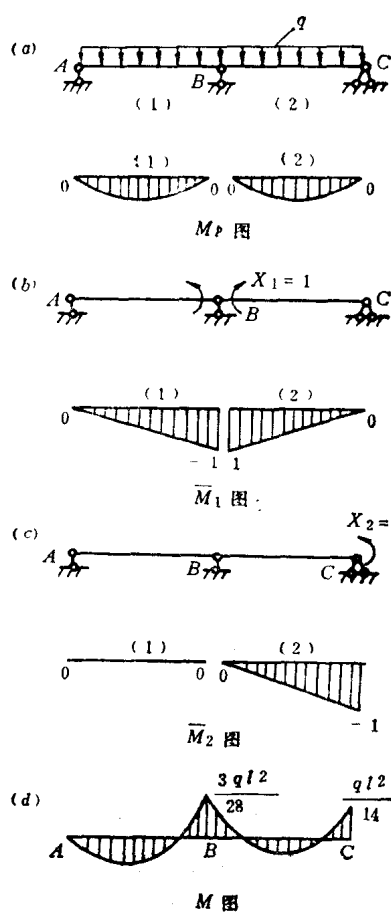


图 1-3

有了各单元杆端弯矩, 就可用简支梁迭加法画出此连续梁的弯矩图, 如图1-3d所示。

由以上连续梁的解题过程可知, 用柔度法分析超静定结构时, 首先要确定超静定次数, 选择多余未知力和基本结构; 其次将基本结构离散化, 分成若干个单元, 利用平衡条件和物理条件分析单元的杆端内力和位移关系; 然后, 利用变形协调条件将离散单元在结点上组合, 建立柔度法方程; 最后, 解此方程, 求出多余未知力。有了多余未知力, 就可按静定结构进行计算, 求出各杆端内力。可见柔度法是对基本结构进行离散与组合, 先分后合, 从简单问题入手解决复杂问题, 计算过程可以采用矩阵形式进行运算。

* 二、结点位移矩阵和柔度法方程

由式 (1-2) 可以看出, 用柔度法求出多余未知力的关键, 是研究如何形成基本结构的柔度矩阵 $[f]$ 和由荷载作用产生的结点位移矩阵 $\{\Delta_P\}$ 。在前面连续梁的简单例子中, 我们直接用各单元的杆端位移写出了基本结构上的 $[f]$ 和 $\{\Delta_P\}$ 。但是, 在一般情况下, $[f]$ 和 $\{\Delta_P\}$ 的形成需要经过一定的矩阵运算。下面先讨论结点位移的矩阵表达式, 再讨论 $[f]$ 和 $\{\Delta_P\}$ 的形成和柔度法方程的建立。

1. 结点位移的矩阵表达式

我们以桁架为例进行讨论。桁架在荷载作用下的位移计算公式为

$$\Delta_{KP} = \sum \frac{\bar{N}_K N_P l}{EA} \quad (f)$$

式中 Δ_{KP} ——桁架在荷载作用下沿 K 方向上所产生的位移；

$\bar{N}_K$ ——桁架某一杆由单位荷载所引起的轴力；

N_P ——桁架某一杆由实际荷载所引起的轴力。 $\bar{N}_K$ 和 N_P 都以杆件受拉为正。

为了使导出的方程和其它结构类型的方程一致起见，式 (f) 可以改用杆端力表达式。桁架杆只有两个可能的杆端力，即作用于其两端的轴力，推导公式时可任取一个。令由实际荷载引起的杆端力为 A_{MP} ，由单位荷载引起的杆端力为 A_{MK} ，则式 (f) 可改写为

$$\Delta_{KP} = \sum \frac{A_{MK} A_{MP} l}{EA} \quad (g)$$

用 f_M 表示杆件柔度，二力杆的轴向柔度为

$$f_M = \frac{l}{EA}$$

将 f_M 代入式 (g) 并稍加改变各项的次序，则

$$\Delta_{KP} = \sum A_{MK} f_M A_{MP} \quad (h)$$

将式 (h) 展开成

$$\Delta_{KP} = A_{MK}^{(1)} f_M^{(1)} A_{MP}^{(1)} + A_{MK}^{(2)} f_M^{(2)} A_{MP}^{(2)} + \cdots + A_{MK}^{(m)} f_M^{(m)} A_{MP}^{(m)} \quad (i)$$

式中 右上角圆括号内的数字为杆件单元的序号， m 为杆件的总数。

为了用矩阵形式表达计算位移的公式，特引入以下3个矩阵，即基本结构上由一个单位荷载引起的杆端力矩阵 $\{A_{MK}\}$ ，基本结构上由荷载引起的杆端力矩阵 $\{A_{MP}\}$ ，以及由各单元柔度矩阵自上而下沿主对角线排列的拟对角矩阵 $[f_M]$ 。其中

$$\{A_{MK}\} = \begin{pmatrix} A_{MK}^{(1)} \\ A_{MK}^{(2)} \\ \vdots \\ A_{MK}^{(m)} \end{pmatrix}_{m \times 1} \quad (1-4)$$

$$\{A_{MP}\} = \begin{pmatrix} A_{MP}^{(1)} \\ A_{MP}^{(2)} \\ \vdots \\ A_{MP}^{(m)} \end{pmatrix}_{m \times 1} \quad (1-5)$$

$$[f_M] = \begin{pmatrix} f_M^{(1)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f_M^{(2)} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & f_M^{(m)} \end{pmatrix}_{m \times m} \quad (1-6)$$

$$\text{则 } \{A_{MK}\}^T [f_M] \{A_{MP}\} = A_{MK}^{(1)} f_M^{(1)} A_{MP}^{(1)} + A_{MK}^{(2)} f_M^{(2)} A_{MP}^{(2)} + \cdots + A_{MK}^{(m)} f_M^{(m)} A_{MP}^{(m)} \quad (j)$$

比较式 (i) 与 (j), 知此两方程式的右端完全相同, 故荷载作用下结点位移可用矩阵形式表示如下:

$$\Delta_{KP} = \{A_{MK}\}^T [f_M] \{A_{MP}\} \quad (1-7)$$

式中 $\{A_{MK}\}$ 和 $\{A_{MP}\}$ 都是由静力平衡条件求得的杆端力矩阵, 称为静力转换矩阵。

2. $[f]$ 和 $\{\Delta_P\}$ 的形成以及柔度法方程

当多余未知力的个数为 n 时, 就需计算柔度法方程中对应于 n 个多余力方向的位移。由于计算 n 个位移与计算一个位移的原理相同, 故由式 (1-7) 可导出计算基本结构上由荷载引起的 n 个多余力方向上的位移矩阵 $\{\Delta_P\}$ 。

$$\{\Delta_P\} = [A_{MX}]^T [f_M] \{A_{MP}\} \quad (1-8)$$

式中 $[A_{MX}]$ ——基本结构上由各单位多余力单独作用时所引起的单元杆端力矩阵。

同理, 可求得基本结构在 n 个多余未知力的单位值单独作用下沿各个未知力方向的位移矩阵 $[f]$ 。

$$[f] = [A_{MX}]^T [f_M] [A_{MX}] \quad (1-9)$$

由式 (1-9) 知, $[f]$ 不仅与各单元的刚度有关, 而且与各单元在结构中的位置有关, 故称为结构柔度矩阵。它是基本结构的一个特性。由式 (1-6) 知, $[f_M]$ 只和各单元的刚度有关, 而与各单元在结构中的位置无关, 故拟对角矩阵 $[f_M]$ 称做未装配结构的柔度矩阵。

由式 (1-8、9) 可知, 有了 $\{A_{MP}\}$ 和 $[A_{MX}]$, 可求得 $\{\Delta_P\}$ 和 $[f]$, 再由式 (1-2) 可求出多余未知力矩阵 $\{X\}$; 又由式 (1-3) 知, 有了 $\{A_{MP}\}$ 和 $[A_{MX}]$ 就可求得各单元杆端力矩阵 $\{A_M\}$ 。可见, 在柔度法中, 不论是求多余未知力还是求各单元杆端力, 都离不开静力

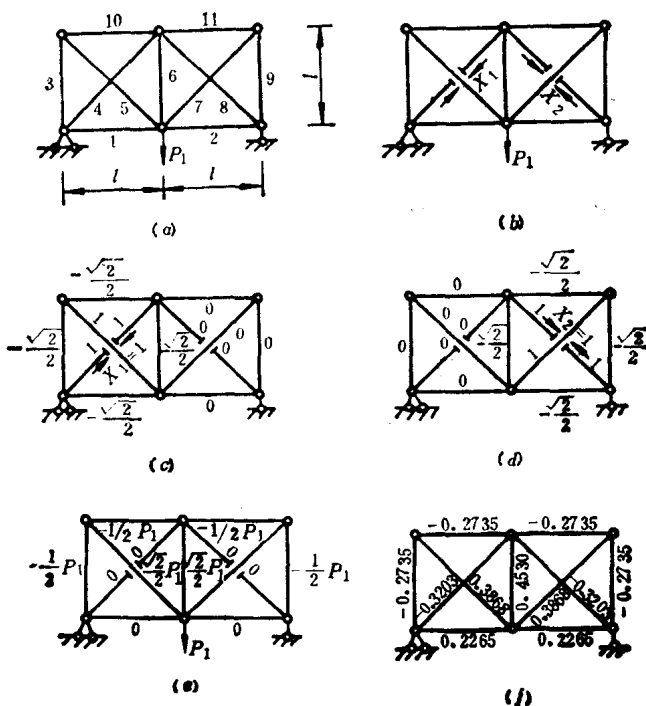


图 1-4

转换矩阵 $\{A_{MP}\}$ 和 $[A_{MX}]$ ，而 $\{A_{MP}\}$ 和 $[A_{MX}]$ 与基本结构密切相关。故柔度法必须结合结构的具体情况进行分析。在连续梁结构中，可统一采用如图1-2b所示的基本结构，其中 $\{A_{MP}\}$ 和 $[A_{MX}]$ 的计算简单而有规律，故连续梁用柔度法计算是合适的。铰接排架用柔度法也是方便的。但对于一般结构的 $\{A_{MP}\}$ 和 $[A_{MX}]$ ，则应根据结构的具体条件而定，没有统一规律，计算也不简单。所以，用柔度法难以编制计算各类结构的通用程序，但可编制某些结构的专用程序。

三、柔度法例题

图1-4a中的桁架是2次超静定桁架，已知各杆的 EA 均为常数。图a中标出了桁架各单元的序号，图b描述了桁架的基本结构和多余未知力 X_1 和 X_2 。图c和d中分别给出了 $X_1=1$ 和 $X_2=1$ 单独作用时，基本结构上各单元的内力值。图e画出了荷载 P_1 作用时，基本结构上各单元的内力值。由图1-4c、d和e可分别写出静力转换矩阵 $[A_{MX}]$ 和 $\{A_{MP}\}$ 。

$$[A_{MX}]_{11 \times 2} = \begin{matrix} & \begin{matrix} X_1=1 & X_2=1 \end{matrix} & \begin{matrix} \text{单元号} \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & -\sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \end{pmatrix} & , \quad \{A_{MP}\}_{11 \times 1} = P_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1/2 \\ 0 \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \\ -1/2 \\ -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

已知桁架各杆件的 EA 为常数，因此未装配结构的柔度矩阵为

$$[f_M] = \frac{l}{EA} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & & \\ & & & \sqrt{2} & & & & & & & \\ & & & & \sqrt{2} & & & & & & \\ & & & & & 1 & & & & & \\ & & & & & & \sqrt{2} & & & & \\ & & & & & & & \sqrt{2} & & & \\ & & 0 & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}_{11 \times 11}$$

将以上 $[A_{MX}]$ ， $\{A_{MP}\}$ 和 $[f_M]$ 代入式(1-9)和(1-8)，则

$$[f] = [A_{MX}]^T [f_M] \{A_{MX}\} = \frac{l}{EA} \begin{pmatrix} 2+2\sqrt{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 2+2\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\{\Delta_P\} = [A_{MX}]^T [f_M] \{A_{MP}\} = \frac{P_1 l}{EA} \begin{pmatrix} 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

将以上 $\{\Delta_P\}$ 和 $[f]$ 代入式 (1-2a), 则

$$\{X\} = -[f]^{-1} \{\Delta_P\} = -P_1 \begin{pmatrix} 0.3203 \\ 0.3203 \end{pmatrix}$$

将 $\{X\}$ 代入式 (1-3), 则

$$\{A_M\}_{11 \times 1} = P_1 \begin{pmatrix} 0.2265 \\ 0.2265 \\ -0.2735 \\ -0.3203 \\ 0.3868 \\ 0.4530 \\ 0.3868 \\ -0.3203 \\ -0.2735 \\ -0.2735 \\ -0.2735 \end{pmatrix}$$

各杆轴力系数见图1-4f。

由以上柔度法概念、方程和例题可以看出, 用柔度法分析超静定结构的步骤是:

- i. 确定超静定次数, 选择多余未知力和基本结构。
- ii. 将基本结构离散化, 并对离散单元进行分析。
- iii. 将离散单元进行组合, 求柔度矩阵 $[f]$ 和右端项 $\{\Delta_P\}$, 建立柔度法方程:

$$[f]\{X\} + \{\Delta_P\} = \{\Delta\}$$

IV. 解线性方程组, 求多余未知力矩阵 $\{X\}$ 。

V. 求各单元杆端内力矩阵 $\{A_M\}$ 。

§ 1-3 刚度法概念

刚度法就是线弹性体系中的矩阵位移法。其计算原理与传统的位移法相同, 也是以结构的未知结点位移为基本未知量, 以加上人为约束后的约束结构为基本结构, 从而根据结点平衡条件建立刚度法方程, 求得未知结点位移。有了各个结点位移, 就可求得各杆端内力和位移。

为了对刚度法有一个粗略而清晰的了解, 我们以图1-5a中的两跨等截面连续梁为例, 介绍刚度法的思路和解题过程。两跨连续梁ABC受均布荷载 q 作用, 结构情况如图1-5a

所示, 其中 EI 为常数。用刚度法求此连续梁内力的全过程如下:

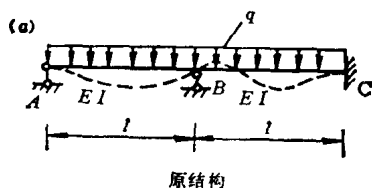
1. 确定未知结点位移

如图1-5a所示, 带有一个固定端的两跨连续梁 ABC , 当忽略轴向变形并考虑边界条件时, 有两个未知结点位移, 即结点 A 和 B 的转角位移 Δ_1 和 Δ_2 。在结点 A 和 B 的转角位移方向施加人为约束, 则原结构变成约束结构(也叫动定结构), 此约束结构是连续梁的基本结构。基本结构和基本未知量如图1-5b所示。

2. 划分单元, 求出各单元的杆端力

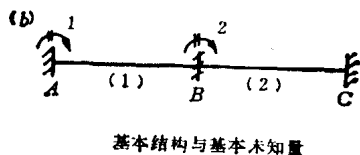
以 A 、 B 、 C 为结点, 连续梁 ABC 可划分为(1)、(2)两个单元, 见图1-5b。考虑弯曲变形时, 各单元的刚度系数为:

$\Delta_1 = 1$ 单独作用时(图1-5c)

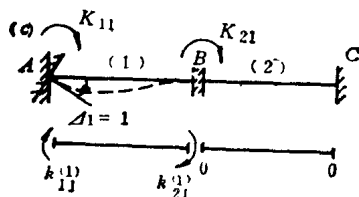


$$\text{单元 (1)} \quad \left. \begin{aligned} k_{11}^{(1)} &= \frac{4EI}{l} \\ k_{21}^{(1)} &= \frac{2EI}{l} \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

$\Delta_2 = 1$ 单独作用时(图1-5d)



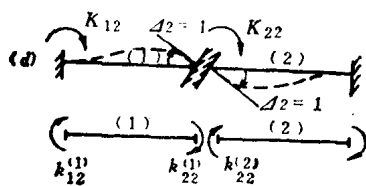
$$\text{单元 (1)} \quad \left. \begin{aligned} k_{12}^{(1)} &= \frac{2EI}{l} \\ k_{22}^{(1)} &= \frac{4EI}{l} \end{aligned} \right\} \quad (b)$$



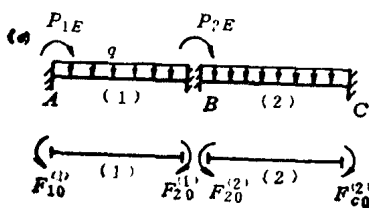
$$\text{单元 (2)} \quad \left. \begin{aligned} k_{22}^{(2)} &= \frac{4EI}{l} \end{aligned} \right\}$$

只考虑弯曲变形时, 在均布荷载 q 作用下的各单元固端力(图1-5e)为

$$\text{单元 (1)} \quad \left. \begin{aligned} F_{10}^{(1)} &= -\frac{ql^2}{12} \\ F_{20}^{(1)} &= \frac{ql^2}{12} \end{aligned} \right\} \quad (c)$$



$$\text{单元 (2)} \quad \left. \begin{aligned} F_{20}^{(2)} &= -\frac{ql^2}{12} \\ F_{c0}^{(2)} &= \frac{ql^2}{12} \end{aligned} \right\} \quad (d)$$



以上各单元刚度系数和固端力的正负号均以未知结点位移的正向为正, 反向为负, 即顺时针为正, 逆时针为负。其右上角圆括号内的数字代表单元序号。

3. 求未知结点位移方向上的结点力并建立结点力平衡方程

基本结构在未知结点位移 Δ_1 、 Δ_2 和荷载共同作

图 1-5

用下沿 Δ_1 和 Δ_2 方向的结点力,可由迭加原理求得:

$$\left. \begin{aligned} k_{11}^{(1)} \Delta_1 + k_{12}^{(1)} \Delta_2 + F_{10}^{(1)} &= P_{1D} \\ k_{21}^{(1)} \Delta_1 + (k_{22}^{(1)} + k_{22}^{(2)}) \Delta_2 + (F_{20}^{(1)} + F_{20}^{(2)}) &= P_{2D} \end{aligned} \right\} \quad (1-10)$$

式中 P_{1D} 和 P_{2D} 是直接作用在结点1和结点2上的结点荷载,在图1-5a中, $P_{1D} = P_{2D} = 0$ 。以上沿 Δ_1 、 Δ_2 方向上的结点力可改为如下形式:

$$\left. \begin{aligned} K_{11} \Delta_1 + K_{12} \Delta_2 &= P_{1D} + P_{1E} \\ K_{21} \Delta_1 + K_{22} \Delta_2 &= P_{2D} + P_{2E} \end{aligned} \right\} \quad (1-11)$$

式中 K_{11} 、 K_{12} 、 K_{21} 、 K_{22} 是连续梁的刚度系数。 K_{21} 是连续梁的基本结构上,由 $\Delta_1 = 1$ 单独作用时,在 Δ_2 方向上所产生的结点力; K_{22} 是由 $\Delta_2 = 1$ 单独作用时,在 Δ_2 方向上所产生的结点力。 P_{1E} 、 P_{2E} 是由各单元的节间荷载产生的沿 Δ_1 、 Δ_2 方向上的结点力,称做等效结点荷载。

令

$$P_1 = P_{1D} + P_{1E}$$

$$P_2 = P_{2D} + P_{2E}$$

则式(1-11)可用矩阵形式表示:

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} \quad (1-12)$$

式(1-12)可简写为

$$[K]\{\Delta\} = \{P\} \quad (1-13)$$

式(1-13)就是刚度法方程。其中

$[K]$ ——结构刚度矩阵(也叫总刚度矩阵);

$\{\Delta\}$ ——结点位移矩阵;

$\{P\}$ ——综合结点荷载矩阵。

4. 求未知结点位移矩阵

由式(1-13)知,刚度法方程是线性方程组。解此线性方程组,可求得未知结点位移矩阵 $\{\Delta\}$ 。若用逆矩阵求解,则

$$\{\Delta\} = [K]^{-1}\{P\} \quad (1-13a)$$

将式(a)、(b)、(c)、(d)代入式(1-10),再将式(1-12)代替式(1-10)并代入式(1-13a),可求得图1-5a中连续梁的 $\{\Delta\}$ 为

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{EI} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4+4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{ql^2}{12} \\ -\frac{ql^2}{12} + \frac{ql^2}{12} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{28EI} \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{ql^2}{12} \\ 0 \end{bmatrix} \\ \text{即} \quad \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{bmatrix} &= \frac{ql^3}{168EI} \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$