初等数学疑难问题讲解

曲线的切线和切线方程

周玉刚
陈肇曾

内蒙古人民出版社

QU XIAN DE QIE XIAN HE QIE XIAN FANG CHENG

曲线的切线和切线方程

周玉刚　陈肇曾　编著

*

内蒙古人民出版社出版

（呼和浩特市新城西街82号）

内蒙古新华书店发行

通辽教育印刷厂印刷

开本：787×1092　1/32　印张：7.625　字数：159千

1982年11月第一版　1982年12月第1次印刷

印数：1—12,000册

统一书号：7089·22　每册：0.67元

出版说明

《初等数学疑难问题讲解丛书》是为自学数学的社会青年讲解初等数学中的疑难问题而编辑出版的，它是由疑难问题较多的篇章中选择《曲线的切线和切线方程》、《异面直线与多面角》、《参数方程及其应用》、《复数与初等数学》、《三角函数式和差积商的周期》、《排列组合及其应用》、《解题分析与解题技巧》、《容易错的概念、容易错的方法》等书组成。

这套丛书的特点是，对所撰写的专题知识及其文字都比较细致、通俗、准确，并适当地注意了内文的趣味性，具有使读者易懂爱读解决问题的特点；对所用的示范例题，皆有详细分析，同时指明了解题要点，疏通了解题思路，力求使青年同志掌握运用知识，分析题目和解题方法；对综合性多解题，采用了不同知识的多种解法，以使青年学生增进对综合性多解题的解题能力。

因此这套丛书，可供为广大社会青年同志自学数学的辅导读物，也可作为在校中学生的课外辅助读物，对于中学数学教师也是较好的教学参考资料。

内蒙古人民出版社

一九八二年二月

前　言

在中学平面解析几何里，圆锥曲线的切线问题是我们一个重点研究的课题。这是因为在研究圆锥曲线的切线时，会涉及到曲线与方程、直线、圆锥曲线等多方面的知识，对于我们沟通解析几何各部分知识之间的内在联系，培养我们综合运用数学知识的能力有很大的帮助。同时圆锥曲线的切线性质在物理学、几何学以及生产实际中的应用也很广泛，因此彻底搞清圆锥曲线的切线问题的来龙去脉，全面解决这个问题的各种数学方法，对于我们进一步学习数学知识，或者从事生产实践活动都有十分重要的意义。

在这本小册子里，我们以圆锥曲线的切线为中心，对曲线的切线和切线方程作了比较详细的阐述。在第一章里，阐述了有关直线方程的一些重要知识，这些知识是学习后面几章内容的重要基础。第二章阐述了圆的切线概念、性质和切线方程的求法，作为圆的切线方程的应用，这里介绍了相关的重要知识：根轴和它的性质。第三章和第四章是本书的主要部分。在这两章里，讨论了圆锥曲线的切线的两种定义和它的等价性，圆锥曲线的切线数的多少，切线方程的各种求法，切线和法线的几何性质，切线的几何作图以及切线在研究曲线位置关系、轨迹方程、极值问题等方面的应用。在第五章里，运用微分工具对一般曲线的切线方程的求法作了讨论，阐述了坐标平移在求代数曲线的切线方程中的应用。

本书里的各个章节中都精选了一些有代表性的例题，并且根据知识内容的阐述，编写了一定数量的习题并附有解答，试图通过这些例题和习题来说明一些思考问题的方法，与各章节的知识相配合，使读者便于阅用。

在本书的编写过程中，我们还参考了近年来一些数学杂志上发表的关于圆锥曲线的切线问题的研究成果，在此谨向有关作者表示谢意。

由于时间的匆促和限于我们的水平，书中的缺点和错误恐怕不少，敬请广大读者批评指正。

作者1981．11．于上海

目　　录

一　直线方程

在研究曲线的切线问题时，需要用到直线方程和性质，因此在这一章里先来简略地叙述一下有关直线方程的基础知识。

1. 直线的倾斜角与斜率

在直角坐标系里，一条直线与 x 轴相交，它的向上方向和 x 轴的正方向所成最小的正角叫做这条直线的**倾斜角**或**倾角**。如图1·1里的α_1、α_2，当直线和 x 轴平行时，我们规定它的倾角为0，因此，任意一条直线的倾角α的范围是$0\leqslant\alpha<\pi$。

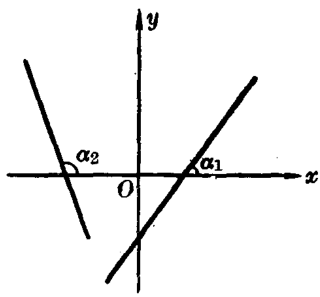

图1·1

一条直线的倾角 α 的正切叫做这条直线的**斜率**，通常用 k 来表示，即

$$k=\operatorname{tg}\alpha.$$

设直线上任意两点$P_1(x_1, y_1)$、$P_2(x_2, y_2)$，那末这条直线的斜率

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.$$

必须注意，当$x_1=x_2$时，直线的倾角是$\frac{\pi}{2}$，斜率k不存在。

根据直线的倾角和斜率的定义，可以得到平面上两条直线的平行与垂直的条件。

定理1 两条直线（不和x轴垂直）平行的充分与必要条件（简称充要条件）是它们的斜率相等。

定理2 两条直线互相垂直的充要条件是它们的斜率的乘积等于-1。

这两个定理的证明可在解析几何书里找到，这里略去不证。

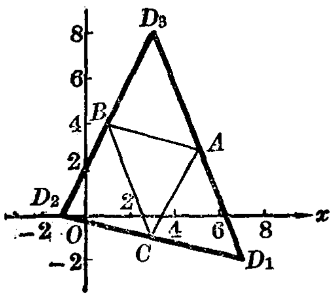

图1·2

例1 已知$\triangle ABC$的三个顶点是$A(5,3)$、$B(1,4)$、$C(3,-1)$，在坐标平面内求一点，使它与A、B、C三点组成平行四边形。

解 设所求点的坐标为(x,y)，由图1·2可知，这点与A、B、C三点组成平行四边形，可以分成下面三种情况：

（1）如果以AB、BC为邻边组成$\square ABCD_1$，则

$$k_{AB}=k_{CD_1},\quad k_{BC}=k_{AD_1}.$$

$$\because\quad k_{AB}=-\frac{1}{4},\quad k_{BC}=-\frac{5}{2},\quad k_{CD_1}=\frac{y+1}{x-3},$$

$$k_{AD_1}=\frac{y-3}{x-5}.$$

$$\therefore \quad \begin{cases} \dfrac{y+1}{x-3} = -\dfrac{1}{4}, \\ \dfrac{y-3}{x-5} = -\dfrac{5}{2}. \end{cases}$$

解这方程组，得

$$x=7, \quad y=-2.$$

（2）以AC、AB为邻边组成▱ABD_2C，则

$$k_{CD_2}=k_{AB}, \quad k_{BD_2}=k_{AC}.$$

$\because \quad k_{AC}=2,$

$$\therefore \quad \begin{cases} \dfrac{y+1}{x-3} = -\dfrac{1}{4}, \\ \dfrac{y-4}{x-1} = 2. \end{cases}$$

解这方程组，得

$$x=-1, \quad y=0.$$

（3）以BC、AC为邻边组成▱$ACBD_3$，则

$$k_{BD_3}=k_{AC}, \quad k_{AD_3}=k_{BC}.$$

$$\therefore \quad \begin{cases} \dfrac{y-4}{x-1} = 2, \\ \dfrac{y-3}{x-5} = -\dfrac{5}{2}. \end{cases}$$

解这方程组，得

$$x=3, \ y=8.$$

由(1)、(2)、(3)可知，所求的点的坐标为

$$D_1(7,-2)、D_2(-1,0)和D_3(3,8).$$

注意：在这例中，我们利用“平行四边形的对边互相平行”的关系，求出了D_1、D_2、D_3的坐标。实际上也可以利

用平行四边形的其它性质（例如，对边平行且相等、对角线互相平分等等）以及解析几何中的两点距离公式、中点公式等关系，求出D_1、D_2、D_3的坐标，请读者自行解答。

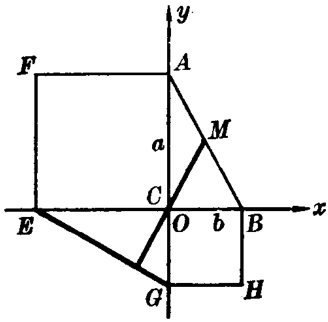

图1·3

例2 在$\triangle ABC$中、$\angle C=90^\circ$，分别以AC、BC为边长在这三角形外侧作正方形$ACEF$、$BCGH$，连结EG（图1·3），M为AB的中点，求证：$CM\perp EG$。

证明 以CB为x轴、CA为y轴、C为原点建立直角坐标系。设$|CA|=a$，$|CB|=b$，则A、B、M、E、G各点的坐标分别为$(0,a)$，$(b,0)$、$\left(\frac{b}{2},\ \frac{a}{2}\right)$、$(-a,0)$、$(0,-b)$。

$$\because\quad k_{CM}=\frac{a}{b},\quad k_{EG}=\frac{-b-0}{0-(-a)}=-\frac{b}{a},$$

$$\therefore\quad k_{CM}\cdot k_{EG}=-1,$$

$$CM\perp EG.$$

例3 证明在平面直角坐标系中，任何正三角形的三个顶点不能全部为有理点（横、纵坐标都是有理数的点）。

证明 （1）我们先来证明“正三角形的一个顶点在原点时，则另外两个顶点不可能都为有理点”。

假定有这样的正$\triangle OAB$，三个顶点的坐标为$O(0,0)$、$A(a,b)$、$B(c,d)$，且a、b、c、d都为有理数（图1·4）。

设OA的倾角为α，则OB的倾角为$\alpha+60^\circ$，

$$k_{OA}=\text{tg}\alpha=\frac{b}{a},$$

$$k_{OB}=\text{tg}\ (\alpha+60^\circ)\ =\frac{d}{c}.$$

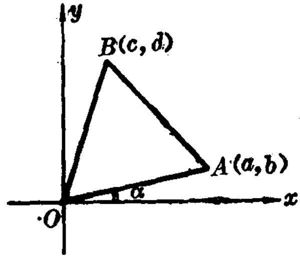

图1·4

$\because$ $\text{tg}(\alpha+60^\circ)=$

$$\frac{\text{tg}\alpha+\text{tg}60^\circ}{1-\text{tg}\alpha\text{tg}60^\circ}=\frac{\frac{b}{a}+\sqrt{3}}{1-\frac{a}{b}\sqrt{3}},$$

$$\therefore\quad \frac{d}{c}=\frac{\frac{b}{a}+\sqrt{3}}{1-\frac{b}{a}\sqrt{3}}.$$

由上式化简，得

$$\sqrt{3}=\frac{ad-bc}{ac+bd}.$$

在这个等式中，

$\because$ a、b、c、d是有理数，

$\therefore$ $\dfrac{ad-bc}{ac+bd}$是有理数.

而$\sqrt{3}$是无理数，所以上面等式是不可能成立的. 矛盾. 因此，A、B不可能都是有理点.

（2）我们再来证明“任何正三角形的三个顶点，不可能都为有理点”.

实际上，若存在三个顶点都为有理点的正三角形，如果把坐标原点移到这个正三角中任何一个顶点，那末它的其余两个顶点在新坐标系中仍是有理点（因两个有理数之和或差仍为有理数）. 根据(1)，这是不可能的.

由(1)、(2)可知，在平面直角坐标系中，任何正三角形的三个顶点不能全部为有理点。

2. 直线方程的各种形式

平面上一条直线，可以由不同的条件来确定，因此表示这条直线的方程也将会有几种不同的表示形式。

(1) **点斜式** 已知直线l过点$P_1(x_1,y_1)$，它的斜率是k，那末直线l的方程为

$$y-y_1=k(x-x_1).$$

这个式子叫做直线方程的**点斜式**。

(2) **截斜式** 已知直线l在y轴上的截距（纵截距），b，斜率k，那末直线l的方程为

$$y=kx+b.$$

这个式子叫做直线方程的**截斜式**。

上面两种形式的直线方程，都是过定点、有定斜率的直线方程的形式。应当注意，当直线平行于y轴时，它的斜率不存在，因此不能用点斜式或截斜式来求出它的方程。

对于平行于y轴的直线，如果它通过点$(a,0)$，那末根据曲线方程的概念，可以得到它的方程为

$$x=a.$$

(3) **两点式** 已知直线l经过点$P_1(x_1,y_1)$和$P_2(x_2,y_2)$，那末直线l的方程为

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}.$$

这个式子叫做直线方程的**两点式**。

应当**注意**，当 $x_1=x_2$ 即直线l平行y轴时，不能用 $\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$的形式来求出直线的方程。

直线的两点式方程还可以表示成下面行列式的形式：

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

（4）**截距式** 已知直线 l 在 x 轴上的截距（横截矩）是a，在 y 轴上的截距是$b(a\neq 0, b\neq 0)$，那末直线 l 的方程为

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$$

这个式子叫做直线方程的**截距式**。

注意，当直线过原点（0，0）时，$a=0, b=0$，不能采用截距式方程；当直线平行于 x 轴或 y 轴时，也不能采用截距式方程。

（5）**直线方程的一般式** 利用曲线方程的概念，可以证明下面的结论（本书不证）：

平面内任何一条直线方程都是关于 x 和 y 的一次方程，任何一个关于 x 和 y 的一次方程，它的图象（曲线）都是一条直线。

根据上面结论，得到直线的一般式方程为

$$Ax+By+C=0,$$

这里，A、B不同时为零。

（6）**直线方程的法线式**

设直线 l 不经过原点，从原点引一条射线 n 和直线 l 垂

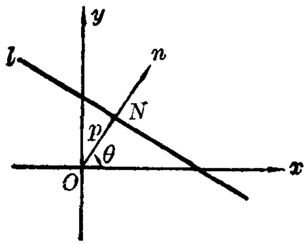

图1·5

直，交l于N点(图1·5)，这条射线n叫做直线l的法线。规定法线n的正方向是从原点O到垂足N的方向。线段ON的长$|ON|$用p表示，从x轴的正方向到法线的正方向所成的角叫做法线的幅角，用θ表示，这时$p>0$，$0\leqslant\theta<2\pi$。当直线l经过原点(图1·6)，规定法线的正方向向上，当直线l和y轴重合时，规定法线的正方向向右，这时$p=0$，$0\leqslant\theta<2\pi$。

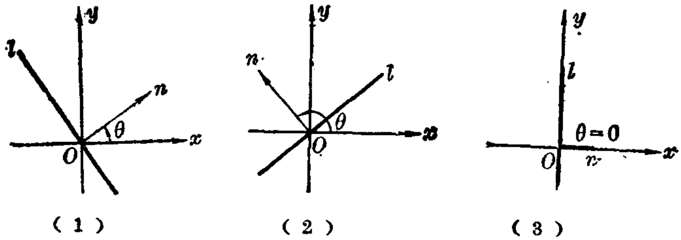

图1·6

已知原点O到直线l的距离是p，直线l的法线的幅角是θ，那末直线l的方程为

$$x\cos\theta+y\sin\theta-p=0.$$

这个式子叫做直线方程的法线式。

应当注意，直线的法线式方程有两个特点：

① x和y的系数的平方和等于1；

② 常数项“$-p$”是一个负值或零。如果常数项是零，那末y的系数是正数或者是零；如果y的系数也是零，

那末 x 的系数是1.

根据这两个特点，可以判别已知直线的方程是不是法线式.

利用直线方程的法线式，可得推得点到直线的距离公式. 点$P(x_0,y_0)$到直线$x\cos\theta+y\sin\theta-p=0$的距离是

$$d=|x_0\cos\theta+y_0\sin\theta-p|.$$

如果直线方程采用一般式$Ax+By+C=0$，那末点$P(x_0,y_0)$到这直线的距离是

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

请读者自行推证这两个公式.

(7) **直线方程的参数式** 已知直线 l 经过点 $P_1(x_1,y_1)$,倾角为α，那末直线 l 的方程为

$$\begin{cases}x=x_1+t\cos\theta,\\ y=y_1+t\sin\theta.\end{cases}$$

这个式子叫做直线方程的**参数式**. 其中t为参数,它的几何意义是: $|t|$是直线 l 上点 P 与定点 P_1 之间的距离(图1·7). 当P在P_1的上方时, t 是正值，当P在P_1的下方时，t 为负值.

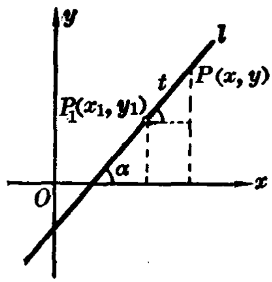

图1·7

上面简要地叙述了直线方程的各种形式. 它们之间是互相联系的. 一般可以根据需要由一种形式化为另一种形式. 特别是将一般式化为截斜式、截距式、法线式，或者由直线方程的其它形式化为一般式. 例如，直线方程 $Ax+By+C=0$ 化成法线式

就是

$$\frac{Ax+By+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}=0,$$

式中的

$$\lambda=\frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$$

称为法线化因子．这里 λ 的“±”号取法是：当 $C\neq0$ 时，取和 C 异号；当 $C=0$、$B\neq0$ 时，取和 B 同号；当 $C=0$、$B=0$ 时，取和 A 同号．

直线方程的一般式 $Ax+By+C=0$ 可以化成 $x+\frac{B}{A}y+\frac{C}{A}=0(A\neq0)$ 或 $\frac{A}{B}x+y+\frac{C}{B}=0$ $(B\neq0)$ 的形式，这两个方程的共同特点是它们都只有两个独立的常数 $\left(\frac{B}{A}、\frac{C}{A}\text{或}\frac{A}{B}、\frac{C}{B}\right)$，有了两个独立的条件，并且只需两个独立的条件，利用待定系数法，就可以决定这两个常数的值．因此

两个独立的条件确定一直线．

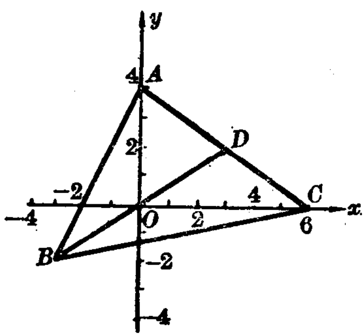

图1·8

例1 已知三角形的三个顶点是 $A(0,4)$、$B(-3,-2)$ 和 $C(6,0)$，求△ABC 三边和 AC 边上的中线 BD 所在的直线方程（图1·8）．

解 直线 AB 在 y 轴上的截距 $b=4$，它的斜率