代數函數論

上　册

Н. Г. 捷波塔廖夫著

高等教育出版社

代　數　函　數　論

上　册

H. Г. 捷波塔遼夫著
戴執中　夏定中譯

高等教育出版社

本書係根據蘇聯技術理論書籍出版社（Государственное издательство технико-теоретической литературы 出版的捷波塔遼夫(Н. Г. Чеботарёв)著"代數函數論"(Теория алгебраических функций) 1948 年版譯出的。

本書可作為大學生和研究生的選修課的教材，或數學研究工作者的參考書。

代 數 函 數 論

上 冊

Н. Г. 捷波塔遼夫著

戴執中　夏定中譯

高 等 教 育 出 版 社 出 版

北京琉璃廠一七〇號

(北京市書刊出版業營業許可證出字第〇五四號)

商務印書館上海廠印刷　新華書店總經售

書號 513(科 5)　開本 850×1168 1/32　印張 8　字數 203,000

一九五六年一月上海第一版

一九五六年一月上海第一次印刷

印數：1—2,500　　定價：(8) ¥1.21

序

這本小書的問世，是由於希望填補我們書籍中關於代數函數論方面的空白而引起的。這一個廣博的方向，在前世紀的後半期中曾佔有了很多最卓越的數學家的心思，其後有一個時候彷彿像是被遺忘了，現在則又以現代的形式復興起來，並且，牽連着一些新的重要的問題。以前我們也曾有過一些致力於代數函數論的專家，例如多爾伯雅(Долбня)(阿貝爾積分的有限形式積分法)，潑克洛夫斯基(Покровский)(超橢圓函數論)，我們曾經有過切霍曼特里茲基(Тихомандрицкий)的很詳盡的教科書和埃爾馬可夫(Ермаков)的簡明教程，固然，其中不免有錯誤的地方。但是目前這方面的理論及其敍述的方式其面貌已經改變到這樣的程度，使得上面所列舉的那些書都應當被認爲是陳舊過時的了。

不過，我們應當預先作一個重要的聲明：在實際上代數函數論是根本沒有單一的形式的。牠的表現可以分成截然不同的三個方向，各具有幾乎是不同流派的特性：函數論的，幾何的和算術的，在這三個方向中，不論推理的方法，或所用的術語都是完全不同的。我將主要地遵循算術的方向來敍述，這個理論的算術的敍述，具有特殊的優美性與完善性。但是也不能因此便忽視下述事實；就是，有大部份結果是由另外兩個方向所得到的，並且，在函數論方向的那些結果中，有一些根本不可能用其他兩個方向的方法來得到。另一方面，現代的研究已經不局限於所考慮的代數函數其係數所在的數體是代數的閉體那種情形了。這就使得在提出代數函數論的現代問題時，算術方向的方法是不能缺少的。

是代數函數論的這種特色，造成了在牠的敍述上的特有困難。爲

了要儘可能地使讀者認識到這理論成果的富麗起見，我效法漢塞(Heusel)和朗特斯拜格(Landsberg)的先例，放棄了在全書中純粹施行算術方法的打算，在第六章至第八章中敍述了黎曼面的理論以及與牠有關的一些結果的基本部份。在本書的開始幾章中，我遵循代德金(Dedekind)和韋柏(Weber)的"古典"敍述遠甚於遵循施米提特(F. K. Schmidt)所用的現代的"抽象"敍述，這是爲了非從事代數工作的讀者的緣故。至於新近的那些結果，我就把牠們集中放在特別的幾節中：第15, 21, 以及27諸節，也有些放入第十章。

第一章是關於體的一般理論的，一個不是學代數的人㊀，可以跳過牠不讀而不致於妨礙對後面內容的理解。

在第二章到第五章中，敍述了代數函數的算術理論及其基本的應用。對這些應用本書給了比漢塞-朗特斯拜格書中更多的篇幅，只有幾何的應用除外，這在我的書中幾乎沒有提到。同時，算術的方法的純粹性，在我的書中也遠較漢塞-朗特斯拜格的書中保持得多。

第六章到第八章是關於函數論方向的方法與結果的，這需要一些解析函數論的預備知識。由於對這些知識的敍述不是本書的基本任務，所以我只限於作概括的敍述，對此，我在書的篇幅上也作了一定的限制。

第九章和第十章包含了進一步的結果，以及這理論的古典與現代的概述。在這裏，篇幅的限制也使我不可能把這些資料像我所希望的那樣來加以發揮，而不得不只限於表述結果和引徵文獻。

在書的末尾，我安放了一個"文獻綜述"，牠的任務是幫助希望更詳細地認識代數函數論的那些讀者，去理解現有的書籍和雜誌上的論文。其次還附加了一個"文獻索引"，在本文中引徵牠的時候放在小括弧[ ]內。

㊀ 譯者於此有些不同的看法：他們認爲，對一個不是學代數的人來說，第一章是必需要看的，反之，對一個已經具備近世代數學知識的讀者，這一章是可以跳過的——譯者。

我用下述的期望來安慰自己：這本書對於大學生的選修課或習明納耳的開始，對於研究生的培養，以及作爲寫學術論文時的參考書，都會顯得是有用的。

最後，我要認爲是自己的愉快的責任，來對烏茲可夫(А. И. Узков)表示深摯的謝忱，爲了他特別愼重地審閱了原稿，以及他的一系列寶貴的批判性的指示。

尼·捷波塔遼夫

喀山　八月，一九四五年。

上 册 目 錄

導　言

代數函數論的研究對象,是以代數關係式

(1) $$f(x,\ y)=0$$

聯繫着的兩個變量 x,y 的有理函數 $\varphi(x,\ y)$,其中 $f(x,\ y)$ 是這兩個變量 x 與 y 的多項式。這理論在歷史上是由企圖把形如

(2) $$\int \varphi(x,\ y)dx$$

的積分用有限的形式積出而發生的。爲了尊敬開始研究其理論的偉大挪威數學家阿貝爾(N. H. Abel, 1802—1829),形式如(2)的那一類積分就被稱作阿貝爾積分。

關於把這類積分積出成有限形式的問題,關連着如何來適當地選擇形如

(3) $$x=\psi_1(u,\ v),\quad y=\psi_2(u,\ v)$$

的變換,其中 ψ_1, ψ_2 都是有理函數,而使得經這變換以後,積分(2)就變成對於一個變量的有理函數的積分。積分(2)可以被積出成有限形式這一個性質,並不依賴於對牠所作的那個任意的變換(3)。因此,從如何把積分積出成有限形式這個問題中,便產生了一個普遍念頭,要研究與函數 $\varphi(x,y)$ 有關的,對於各種(3)型變換都不變的性質和量。在特別重要的情形下,即當變換(3)是有理可逆的時候,這種變換稱爲雙有理變換。因此,代數函數論可以被表徵爲研究在雙有理變換下的不變量的科學。這使得我們有理由把牠看作在克萊茵 (F. Klein) 意義下的一種幾何學系統,克萊茵曾經規定:幾何學是研究在某一種變換羣下的不變量的科學(見 §28, 也見 §8)。

爲了使代數函數論基本問題的提法更加確切與更加簡化，我們照下面的方式來陳述牠。給定兩個(1)型的方程式：

$$f_1(x, y)=0, \quad f_2(x, y)=0。$$

求出一組有限多個量，使牠們以這兩個方程式中的每一個相關連，並且具有下述性質：要有一個(3)型的變換存在，把其中的一個方程式變換成另一個，其充分且必要的條件是，所得到的這組量對於這兩個方程式來說是重合的。

被陳述成這樣形式的問題，一直到現在還不曾獲得解決。現在已經知道了關係式(1)的一個最重要的不變量——非負整數 ρ，稱爲方程式的[或者，照幾何學上的說法，曲線(1)的]虧格數(жанр, Geschlecht)。此外，也已經知道了，當 $\rho>1$ 時，虧格數等於 ρ 的方程式，依賴於 $3\rho-3$ 個不變參數，黎曼(B. Riemann, 1824—1866)稱這些參數是曲線(1)的模；可是，現在還不曾對牠們給出什麼方便而明顯的表示法。

代數函數論在歷史上曾經沿着其他的路線發展過，並且是獨立地就幾個不同的方向發展的，其中的一個方向——函數論的方向——是創自阿貝爾，而由黎曼給出了完整的形式。不是在平面上，而是在一種特殊的多層曲面——這種曲面已經獲得了黎曼面的名稱——上來表示多值的複變函數。這一個天才的觀念，就是屬於黎曼的。黎曼原先在代數函數的最簡單的情形下來研究這類黎曼面，後來這種曲面已經成爲在研究廣泛的各種普通函數與許多特殊函數(模函數，自守函數，線性微分方程的積分等)時的基本工具了。

差不多與黎曼同時，維爾斯特拉斯(K. Weierstrass, 1815—1897)也在相近的方向上發展了代數函數論，他用把多值函數展開成冪級數的方法，研究了多值函數的性質。後來，在獲悉了黎曼的那些結果之後，他修改了自己的講義，在其中引進了黎曼面的概念。

在上世紀中葉，由於普遍嗜好綜合幾何學的緣故，大批的幾何學家用純粹幾何學的方法來從事代數曲線的系統研究，這樣就在代數函數

論中發生了幾何學的方向，也稱作代數幾何學。從牠的那些創始人中間，我們必須舉出普呂克(Plücker)，克萊伯虛(A. Clebsch)，戈當(P. Gordan)，勃立爾(A. Brill)和略特(M. Noether)。現在，這個方向爲意大利學派的幾何學家所繼承[伽斯太留佛(Castelnuovo)，恩利格斯(F. Enriques)，塞梵利(F. Severi)等等]，他們把注意力轉移到代數曲面上，並且得到了代數曲面的許多有基本意義的結果。

代數函數論的算術方向，牠的基礎是代德金所奠立的，他是伊德耶(идеал)理論的創始人之一，與韋柏合寫了一篇重要的論文。所有那些在"絕對的黎曼面"上的某一個位處變成零的 $\varphi(x, y)$ 型的函數集合，構成一個素伊德耶；從這事實出發，代德金與韋柏獲得了把函數 $\varphi(x, y)$ 表成素伊德耶乘積的單值表示法(更確切地說，表成素伊德耶的乘積的商式的形狀)。

單變量的有理函數可以被表成一次因式的乘積的商式，卽，可以用給出使牠變成 0 與變成 ∞ 的那些值的方法來規定牠，恰和這個相仿，代數函數也可以被表成素伊德耶的乘積的商式，並且，分子和分母含有相同個數的素因子(都是同一階數的伊德耶)。二者間的主要區別在於，任意給定有理函數的零點與無限大點(極點)之後，我們總可以求出這個函數，但代數函數的零位與無限大位則不能完全任意地給定。轉到在數論中所得出的同等伊德耶和伊德耶類的概念上去，我們可以說，並非任何有同一階數的伊德耶都是同等的。還有，同等的類構成一些線性族，代德金和韋柏還確定了在階數與由這伊德耶所成的那個類的維數(卽在這個類中線性獨立的伊德耶的最大數)之間的關係。他們在引進了與阿貝爾積分密切相關的微分類這一概念後，就以純粹算術的方法達到了全部理論的核心結果——黎曼-諾赫定理。一般地講，算術的代數函數論使我們可以用純粹算術上的，並且是完全普遍的方法，來導出並表明阿貝爾積分的理論與代數曲線的理論中的大部分結果。算術的代數函數論與幾何的代數函數論比較起來，其基本的優點在於，在

算術的代數函數論中所得到的那些結果有完全的普遍性，而在幾何的代數函數論中，則必須引進曲線（1）所可能有的那些關於異點的特性的限制。

晚近，算術的代數函數論的一種新的，並且是十分原則性的優越性已經被闡明了。現在已經知道可以把牠擴充到這樣的代數函數上去，牠們的係數，不像在古典理論中所作的那樣是任意複數，而是任何一個已知數體中的元素（例如，是有理數，或者，甚至是關於某一個素數的合同類）。研究這種代數函數的重要性，當企圖應用代數函數論來求出滿足方程式（1）的 x, y 的各組有理值時，卽，當企圖解最普遍形式的丟芳圖方程式時，就看出來了。所說的這個問題，是那些表徵代數函數論中現代方向的最突出的問題之一，雖然不是唯一的一個。

第一章　體的理論

§1. 體與環的概念

所謂體是一個在其上確定了兩種運算的若干對象(這些對象我們就稱作是這個體的元素)的集合。和在算術中相類似，這兩種運算，我們將稱之為加法與乘法。並且，這兩種運算應當服從下面的規律：

I. 加法　確立一種規律，使得體內的任何兩個元素 a, b 都有第三個元素同牠們對應，這第三個元素稱為元素 a 與 b 的和，記作 $a+b$。並且：

加法是可以結合的：

$$(a+b)+c=a+(b+c), \tag{1}$$

可以交換的：

$$a+b=b+a, \tag{2}$$

以及是單值可逆的。最後這句話是說，對於任意的元素 a, b，總可以定出體內的一個元素，而且也僅僅祇有一個元素 x，使得

$$a+x=b\ 。 \tag{3}$$

特別是，有這樣的一個元素 y 存在，使得

$$a+y=a\ 。 \tag{4}$$

我們現在證明，這個元素 y 是與元素 a 的選擇無關的。為此，我們只須在等式(4)的兩端都加上一個由(3)式所規定的元素 x。於是根據(1)與(2)，便有

$$b+y=b,$$

這裏的 b 是體內任意的一個元素。這樣所規定的元素 y，叫做零元素，

記作 0。

由等式(3)所規定的那個元素 x，叫做元素 b 與 a 的差，記作 $b-a$。特別是，差 $0-a$ 叫做 a 的負元素，簡記作 $-a$。

由此容易導出對於帶括號的運算的通常規律，對於減法的結合律，等等。

II. 乘法　確立另外一種使得對於體中任意兩個元素 a,b 總有第三個元素與之對應的規律，這第三個元素稱做元素 a 與 b 的積，記作 $a\cdot b$。並且：

乘法是可以結合的：

$$(ab)c=a(bc); \tag{5}$$

是可以交換的：

$$ab=ba; \tag{6}$$

末了，加法與乘法服從分配律：

$$(a+b)c=ac+bc。 \tag{7}$$

我們要注意，右端的表達式可能會引起誤會，因爲其中並沒有指明應當先進行那種運算。有鑒於此，通常總約定，在運算的順序不曾用括號來指明的時候，應當先進行乘法的運算，然後再進行加法與減法的運算。

不難證明，分配律也可以推廣到減法上：

$$(a-b)c=ac-bc。 \tag{8}$$

從分配律可以導出對零元素的乘法的規律：

$$a\cdot 0=a(b-b)=ab-ab=0。 \tag{9}$$

滿足了這些規律的元素的集合稱爲一個環。一般地講，在環內並不假定能作乘法的單值逆運算，或者，如我們將要說的，並不一定可以施行除法。下面那些集合可以作爲環的例子：

(1)全部整數——正整數，負整數及零——的集合；

(2)全部整複數，卽形如 $a+bi$ 的數的集合，其中 $i=\sqrt{-1}$，a 與 b 取所有的整數；

(3)變量 x 的所有多項式的集合(也可以是幾個獨立變量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的所有多項式的集合)。

比較環狹一些的概念是體。要上面所說的元素集合形成一個體,還應當滿足:

III. 乘法的單值可逆性 這就是說,對於任何兩個已知的元素 a, b 總有一個元素 x 存在,使得

$$ax=b \tag{10}$$

成立,並且,這個元素 x 是唯一的。這個元素通常記作 $b:a$,或者 $\frac{b}{a}$ (b 被 a 除,或者,以 a 除 b 的商,或者,具有分子 b,分母 a 的分式)。

這時我們必須把 $a=0$ 的情形除外。事實上,既然對任何一個 x 都有 $0\cdot x=0$,所以方程式 $0\cdot x=b$ 當 $b\neq 0$ 時是不可能有解的。

特別是,方程式

$$ay=a$$

的解是與 a 的選擇無關的。這個解稱爲單位元素,記作 1。在某些情況下,當這個記號可能會引起誤會時,通常用字母 e 來記單位元素(見 § 2)。

前面所舉作爲環的例子的那些集合中,沒有一個是體。以下是體的例子:

(1)全部(正的與負的)有理分數,即形如 $\frac{b}{a}$ 的數的集合,其中 a, b 都是整數,並且,$a\neq 0$;

(2)形如 $a+bi$ 的數的集合,其中 $i=\sqrt{-1}$,a, b 可取任何的有理分數;

(3)全部有理函數,即分子分母都是一個變量 x 的(或幾個變量的)多項式的那些分式的集合。

從這三個例子我們可以看出,根據一個已知的環,常可以用如下的方式來作成一個體:就形式上取已知環的元素的商以作爲這個體的元素,並用下述規律來規定對體中元素的運算:

$$\frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}=\frac{ad\pm bc}{bd};\quad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd};\quad \frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}。$$

不難驗證，就這樣的元素來說，用來規定體的那些定律都是正確的。並且，當

$$ad=bc$$

時，而且只在這時候，才有

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}。$$

爲了要證明在這樣的定義中等式的可傳性，還必須要有下述環的性質：

IV. 無零因子　如果 $ab=0$，那末，或者 $a=0$，或者 $b=0$，二者必居其一。

對於環來說，這個性質是需要予以假定的，而對於體來說，則牠是可以證明的。事實上，從 $ab=0$，並由於有元素 $\frac{1}{b}$ 存在（設 $b\neq 0$），我們得到

$$ab\frac{1}{b}=a=0。$$

因此，如果 $b\neq 0$，則必定 $a=0$。

另一方面，也有些環牠們並不具備條件 IV。對於這樣的環，自然不能用剛才所描述的方法來作成一個體了。由環用這種方法所作成的體叫做商體。

§2. 子體、素體、示性數

如果一個體 K 的一部份元素，本身也形成一個體 k，那末 k 就叫做體 K 的子體，我們也說，k 包含在 K 內，而記作：

$$k\subset K。$$

體 K 有時稱爲體 k 的包含體。

例：如果 K 是變量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的所有有理函數所形成的體，那

末變量

$$x_1, x_2, \cdots, x_k \quad (k=1, 2, \cdots, n-1)$$

的有理函數所形成的體，就可以作爲牠的子體的例子。

如果 $k \subset K$，並且 k 與 K 不是相同的，那末 k 稱做是 K 的眞子體。不包含眞子體的體叫做素體。

每一個體 K 都含有唯一的一個素體作爲牠的子體。要找出這個素體，我們取體 K 的單位元素 e（牠應當是包含在所有的子體內的），並構成如下的元素：

$$(1) \qquad \begin{aligned} &e+e=2e, \quad 2e+e=3e, \cdots, \\ &0, -e, \quad -2e, \quad -3e, \cdots, \end{aligned}$$

牠們組成一個環，這環顯然是包含在體 K 的每一個子體內的。這裏我們應該分開兩種情形來談：

（1）所有的（1）中元素都是不相同的。這時牠們所形成的那個環，與整有理數環僅相差一個因子 e，而由於 $e^2=e$ 的緣故，這因子是不起任何作用的。在這種情形我們可以置 $e=1$。把所得的整有理數環擴充成牠們的比值的體，即，擴充成有理數體。這個體包含在體 K 的所有子體內，所以是一個素體。這時我們說，K 是一個示性數爲零的體。

（2）可能會遇到，並非所有（1）中的元素都是互異的。設

$$me=ne \quad (m \neq n)。$$

於是

$$(m-n)e=0。$$

設 p 是所有那些使

$$pe=0$$

成立的正整數中最小的那一個。p 應當是一個素數，因爲不然的話，從

$$p=qr \quad (q<p, \ r<p)$$

我們就有：

$$qe \neq 0, \quad re \neq 0, \quad qe \cdot re=0,$$