戴天民 刘凤丽 陈 勉 编著

连续介质力学引论

辽宁科学技术出版社

连续介质力学引论

戴天民　刘凤丽　陈　勉　编著

辽宁科学技术出版社

内 容 简 介

本书是为初学连续介质力学的读者而编写的。它由浅入深地运用张量理论阐述连续介质力学的基本内容。全书包括张量的基本知识、连续介质的运动学、连续介质的基本方程、线性弹性固体和线性粘性流体等内容。

本书可供高等院校力学、物理、数学、工程等专业学生学习之用，也可供科技工作者自修或参考。

连续介质力学引论

Lianxujiezhi Lixue Yinlun

戴天民　刘凤丽　陈　勉　编著

辽宁科学技术出版社出版　（沈阳市南京街6段1里2号）

辽宁省新华书店发行　朝阳新华印刷厂印刷

开本：787×1092 1/32　印张：9 1/8　字数：200,000

1986年1月第1版　1986年1月第1次印刷

责任编辑：路　明　责任校对：李秀芝

封面设计：秀　中

印数：1—2,300

统一书号：13288·19　定价：1.90元

前　言

连续介质力学研究物质对于各种外界条件的响应。与固体力学和流体力学不同，连续介质力学从统一的观点来处理有关固体和流体的力学问题。

连续介质力学主要包括下述三个方面的内容。

一．研究变形和运动以及有关的概念，从而给出连续介质的几何学和运动学方面的关系式。

二、研究对所有物质都适用的基本原理，如质量守恒原理、动量平衡原理、动量矩平衡原理、能量守恒原理和熵原理等，从而导出连续介质力学的基本方程组。

三、研究刻画理想化物质的本构理论，从而给出各种典型物质的本构方程。理想化物质代表天然物质力学行为的主要特征。例如线性弹性固体和线性粘性流体就是两个典型的力学模型。近些年来，本构理论在普遍性和合理性方面都已取得很大进展。

全书共分五章。第一章介绍张量的基本知识，对与连续介质力学直接相关的张量理论作一概括性介绍；第二章阐述连续介质的变形几何学和运动学的有关问题；第三章对各种物质都适用的基本理论进行说明，并导出连续介质力学的基本方程组；第四章和第五章分别对线性弹性固体和线性粘性流体建立本构方程．并对若干具体问题作出解答。

本书是为初学连续介质力学的读者而编写的。考虑到本

书既可作为高等院校力学、物理、数学、工程等专业学生的教学用书，也可作为科技工作者的参考用书，所以我们力求精选内容，重点突出，推导详细，并在每章末附有习题。

我们衷心感谢“应用数学和力学”编委会和编辑部、辽宁大学、辽宁省力学学会、山东工学院、沈阳机电学院、西南交通大学和锦州师范学院对于编写本书所给予的关心和支持。

由于编者水平有限，不妥之处，在所难免，望读者多加指正。

编　者

目　　录

第一章　张量的基本知识

张量理论是连续介质力学的重要工具之一。它可以满足所有力学定律的重要特性，即与坐标系的选择无关，还能使力学方程的形式变得简洁和统一，力学概念突出。我们首先介绍一些有关张量的基本知识。

§1·1　指标记法

首先考察和式

$$S = a_1b^1 + a_2b^2 + \cdots\cdots + a_Nb^N$$

上式也可写成

$$S = \sum_{i=1}^{N} a_i b^i \tag{1·1a}$$

注意，这里的上标是指标，不是指数。

按照爱因斯坦求和约定，即凡重复一次的一上一下指标，则表示对所有同类项从 1 到 N 求和，N 是空间维数。

因此，式（1·1a）可以省去求和符号，记为

$$S = a_i b^i \tag{1·1b}$$

其中指标 i 从 1 取到 N。若在三维空间中，则指标 i 从 1 取到 3，例如

$$S = a_i b^i = a_1b^1 + a_2b^2 + a_3b^3 \tag{1·1c}$$

今后如无特别声明，我们总是在三维空间求和。特别地，我们规定在直角坐标系中对上标、下标不加区别，一律记作下标。于是上式变为

$$S = a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \qquad (1 \cdot 1d)$$

实际上，求和指标采用什么字母是无关紧要的，上式还可写为

$$S = a_i b^i = a_j b^j = a_k b^k = \cdots\cdots \qquad (1 \cdot 1e)$$

因此求和指标又称为哑指标或盲指标。

求和约定也可以用来表示双重和式、三重和式等等，例如对于二次型

$$\begin{aligned} F = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} A^{ij} X_i X_j \\ = A^{11}X_1X_1 + A^{12}X_1X_2 + A^{13}X_1X_3 \\ + A^{21}X_2X_1 + A^{22}X_2X_2 + A^{23}X_2X_3 \\ + A^{31}X_3X_1 + A^{32}X_3X_2 + A^{33}X_3X_3 \end{aligned} \qquad (1 \cdot 2a)$$

采用求和约定，则可写成

$$F = A^{ij} X_i X_j \qquad (1 \cdot 2b)$$

这里需要特别指出的是，上式中的指标 i、j 虽为哑指标，与字母的选取无关，但这两个指标不能选为同一字母，例如

$$F = A^{kk} X_k X_k$$

这种形式将会引起混乱。

考察下列线性方程组：

$$\begin{aligned} a_{11}x^1 + a_{12}x^2 + a_{13}x^3 = b_1 \\ a_{21}x^1 + a_{22}x^2 + a_{23}x^3 = b_2 \\ a_{31}x^1 + a_{32}x^2 + a_{33}x^3 = b_3 \end{aligned} \qquad (1 \cdot 3a)$$

采用哑指标求和记法，则有

$$a_{1j}x^j = b_1$$
$$a_{2j}x^j = b_2 \qquad (1\cdot3b)$$
$$a_{3j}x^j = b_3$$

引入自由指标记法，可将上式记为

$$a_{ij}x^j = b_i \qquad (i=1,2,3) \qquad (1\cdot3c)$$

所谓自由指标就是在方程的每项中只出现一次的指标（例如上式中的指标 i），自由指标取任一小于或等于空间维数的数码，方程都成立。

特别应当指出，记法

$$S = x_i y_i z^i \qquad (1\cdot4a)$$

是没有意义的。但

$$S = x_1y_1z^1 + x_2y_2z^2 + x_3y_3z^3 \qquad (1\cdot4b)$$

可以用指标记法记作

$$S = x_{\underline{i}}y_i z^i \qquad (1\cdot4c)$$

上式中的指标 $\underline{i}$ 表示它不参与下标 i 与上标 i 之间的求和，只是在数值上等于 i 。

§1·2 克罗内克尔符号与置换符号

克罗内克尔符号定义为

$$\delta^i_j(=\delta_{ij}=\delta^{ij}) = \begin{cases} 1\text{，当}i=j\text{时；} \\ 0\text{，当}i\neq j\text{时。} \end{cases} \qquad (1\cdot5)$$

由定义不难证明，克罗内克尔符号具有如下性质：

（1）$\delta^i_j a^j = a^i$

$$\delta^k_i A^{ij} = A^{kj} \qquad (1\cdot6a)$$

$$\delta^i_k \delta^k_j = \delta^i_j$$

（2）在三维空间

$$\delta_i^i = \delta_1^1 + \delta_2^2 + \delta_3^3 = 3 \qquad (1 \cdot 6b)$$

（3）矩阵

$$[\delta_{ij}] = \begin{pmatrix} \delta_1^1 & \delta_2^1 & \delta_3^1 \\ \delta_1^2 & \delta_2^2 & \delta_3^2 \\ \delta_1^3 & \delta_2^3 & \delta_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (1 \cdot 6c)$$

为单位矩阵。

（4）若记直角坐标系单位基矢为$\boldsymbol{e}_i$，则

$$\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \delta_{ij} \qquad (1 \cdot 6d)$$

克罗内克尔符号的一个直接应用就是计算矢量的点积。令矢量

$$\boldsymbol{u} = u_1\boldsymbol{e}_1 + u_2\boldsymbol{e}_2 + u_3\boldsymbol{e}_3 = u_i\boldsymbol{e}_i$$

$$\boldsymbol{v} = v_1\boldsymbol{e}_1 + v_2\boldsymbol{e}_2 + v_3\boldsymbol{e}_3 = v_j\boldsymbol{e}_j$$

则其点积

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = u_i\boldsymbol{e}_i \cdot v_j\boldsymbol{e}_j = u_i v_j \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j$$

$$= u_i v_j \delta_{ij} = u_i v_i$$

置换符号定义为

$$e_{ijk}(=e^{ijk}) = \begin{cases} 1, \text{当} ijk \text{为123的偶次置换时；} \\ -1, \text{当} ijk \text{为123的奇次置换时；} \\ 0, \text{当} ijk \text{不能表示成123的置换时。} \end{cases} \qquad (1 \cdot 7a)$$

即

$$e_{123} = e_{231} = e_{312} = 1$$

$$e_{321} = e_{132} = e_{213} = -1$$

$$e_{111} = e_{112} = e_{113} = \cdots\cdots = e_{333} = 0$$

从上式可以看出

$$e_{ijk} = e_{jki} = e_{kij} = -e_{jik} = -e_{kji} = -e_{ikj} \qquad (1 \cdot 7b)$$

置换符号e_{ijk}有时也称为排列符号。

考察行列式

$$A=\begin{vmatrix} A^1{}_1 & A^1{}_2 & A^1{}_3 \\ A^2{}_1 & A^2{}_2 & A^2{}_3 \\ A^3{}_1 & A^3{}_2 & A^3{}_3 \end{vmatrix}$$

对于上面的行列式进行行变换，根据行列式行交换的性质有

$$\begin{vmatrix} A^i{}_1 & A^i{}_2 & A^i{}_3 \\ A^j{}_1 & A^j{}_2 & A^j{}_3 \\ A^k{}_1 & A^k{}_2 & A^k{}_3 \end{vmatrix}=e^{ijk}A$$

同样地，再考虑行列式的列交换，则得

$$\begin{vmatrix} A^i{}_m & A^i{}_n & A^i{}_l \\ A^j{}_m & A^j{}_n & A^j{}_l \\ A^k{}_m & A^k{}_n & A^k{}_l \end{vmatrix}=e^{ijk}e_{mnl}A$$

特别地，对于行列式

$$\begin{vmatrix} \delta^1_1 & \delta^1_2 & \delta^1_3 \\ \delta^2_1 & \delta^2_2 & \delta^2_3 \\ \delta^3_1 & \delta^3_2 & \delta^3_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=1$$

则有

$$e^{ijk}e_{mnl}=\begin{vmatrix} \delta^i_m & \delta^i_n & \delta^i_l \\ \delta^j_m & \delta^j_n & \delta^j_l \\ \delta^k_m & \delta^k_n & \delta^k_l \end{vmatrix} \tag{1·8}$$

若令上式中$l=k$，则

$$\begin{aligned} e^{ijk}e_{mnk}&=\begin{vmatrix} \delta^i_m & \delta^i_n & \delta^i_k \\ \delta^j_m & \delta^j_n & \delta^j_k \\ \delta^k_m & \delta^k_n & \delta^k_k \end{vmatrix} \\ &=\delta^i_m\delta^j_n\delta^k_k+\delta^i_n\delta^j_k\delta^k_m+\delta^i_k\delta^j_m\delta^k_n \\ &\quad-\delta^i_k\delta^j_n\delta^k_m-\delta^i_n\delta^j_m\delta^k_k-\delta^i_m\delta^j_k\delta^k_n \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 3\delta^i_m\delta^j_n + \delta^i_n\delta^j_m + \delta^i_n\delta^j_m \\
&\quad - \delta^i_m\delta^j_n - 3\delta^i_n\delta^j_m - \delta^i_m\delta^j_n \\
&= \delta^i_m\delta^j_n - \delta^i_n\delta^j_m \qquad (1 \cdot 9)
\end{aligned}
$$

这是一个很有用的公式，以后还要经常遇到。

置换符号的一个直接应用就是用来表示矢量的叉积。设 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ 为右手直角坐标系的单位基矢量，则利用置换符号可将两个单位基矢量的叉积写成如下形式：

$$\boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_j = e_{ijk}\boldsymbol{e}_k \qquad (1 \cdot 10a)$$

于是，对于矢量 $\boldsymbol{a} = a_i\boldsymbol{e}_i$ 和 $\boldsymbol{b} = b_j\boldsymbol{e}_j$，其叉积可表示为

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} &= a_i\boldsymbol{e}_i \times b_j\boldsymbol{e}_j \\
&= a_i b_j (\boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_j) \\
&= a_i b_j e_{ijk}\boldsymbol{e}_k \qquad (1 \cdot 10b)
\end{aligned}
$$

§1·3 关于指标记法的运算

1. 代入

若

$$a_i = U_{im} b^m \qquad (a)$$

$$b^i = V^{im} c_m \qquad (b)$$

为了把式(b)中的 b^i 代入式(a)中，根据指标记法的规定，必须首先把式(b)中的自由指标 i 换成 m，并把哑指标 m 换成某一其它字母，如 n，即

$$b^m = V^{mn} c_n \qquad (c)$$

此时，把上式代入式(a)，则得

$$a_i = U_{im} V^{mn} c_n \qquad (d)$$

式(d)表示三个方程，每个方程在其右侧具有九项和式。

2. 乘积

如果

$$p = a_m b^m$$

$$q = c_m d^m$$

则

$$pq = a_m b^m c_n d^n$$

显然，$pq \neq a_m b^m c_m d^m$，因为这个表达式的右侧根本不符合求和约定，关于这一点必须注意。

3. 因式分解

如果

$$T_i{}^j n_j - \lambda n_i = 0 \qquad (a)$$

应用克罗内克尔符号，可写出

$$n_i = \delta_i^j n_j \qquad (b)$$

把上式代入式（a），则

$$T_i{}^j n_j - \lambda \delta_i^j n_j = 0$$

即

$$(T_i{}^j - \lambda \delta_i^j) n_j = 0$$

4. 缩并

使两个指标相等并对它们求和的运算叫做缩并。例如$T_i{}^i$是$T_i{}^j$的缩并，而$T^{ij}{}_k$的缩并可以是$T^{ij}{}_j$。如果

$$T_i{}^j = \lambda E_m{}^m \delta_i^j + 2\mu E_i{}^j$$

则

$$\begin{aligned} T_i{}^i &= \lambda E_m{}^m \delta_i^i + 2\mu E_i{}^i \\ &= 3\lambda E_m{}^m + 2\mu E_i{}^i \\ &= (3\lambda + 2\mu) E_i{}^i \end{aligned}$$

§ 1·4 曲线坐标·度量张量

在三维空间中取定一个直角坐标系$O_{y^1y^2y^3}$. 以$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$为沿其三个坐标轴方向互相垂直的单位矢量，则空间中一点的位置矢量可以表示为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r} &= \boldsymbol{r}(y^1,\ y^2,\ y^3)\\ &= y^1\boldsymbol{e}_1 + y^2\boldsymbol{e}_2 + y^3\boldsymbol{e}_3 = y^i\boldsymbol{e}_i\end{aligned} \tag{1·11a}$$

也可将$\boldsymbol{r}$表示成另外三个参量的函数

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r} &= \boldsymbol{r}(x^1,x^2,x^3)\\ &= y^i(x^1,x^2,x^3)\boldsymbol{e}_i\end{aligned} \tag{1·11b}$$

由数学分析中的隐函数存在定理可知，只要在x^i的邻域内函数$y^i(x^1,x^2,x^3)$有连续的一阶偏导数存在，并且在x^i点雅可比行列式

$$J = \det\left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial y^1}{\partial x^1} & \dfrac{\partial y^1}{\partial x^2} & \dfrac{\partial y^1}{\partial x^3} \\[2ex] \dfrac{\partial y^2}{\partial x^1} & \dfrac{\partial y^2}{\partial x^2} & \dfrac{\partial y^2}{\partial x^3} \\[2ex] \dfrac{\partial y^3}{\partial x^1} & \dfrac{\partial y^3}{y x^2} & \dfrac{\partial y^3}{\partial x^3} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{1·12}$$

则x^i和y^i之间的关系是一一对应的。x^i称为空间的曲线坐标。

考虑空间中一个位置矢量$\boldsymbol{r}$，其增量可以写成如下形式：

$$d\boldsymbol{r} = dy^i\boldsymbol{e}_i \tag{1·13a}$$

在曲线坐标x^i中，其增量可以仿照上式写为

$$d\boldsymbol{r} = dx^i\boldsymbol{g}_i \tag{1·13b}$$

g_i为曲线坐标基矢量。

在另一方面，考虑到

$$dr = \frac{\partial r}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial r}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial r}{\partial x^3} dx^3$$

$$= \frac{\partial r}{\partial x^i} dx^i \qquad (1 \cdot 13c)$$

这里我们约定在分母中以上标代替所要求的下标。比较式（1·13b）和式（1·13c），并利用 dx^i 的任意性，即得

$$g_i = \frac{\partial r}{\partial x^i} \qquad (1 \cdot 14)$$

由式（1·11b）

$$g_i = \frac{\partial r}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i}(y^j e_j)$$

$$= \frac{\partial y^j}{\partial x^i} e_j \qquad (1 \cdot 15)$$

由于式（1·12）雅可比行列式不为零，故 g_1，g_2，g_3必线性无关。因此可以用 g_i 作为曲线坐标的标架。一般来讲，$\frac{\partial y^j}{\partial x^i}$是与空间位置有关的量，对于不同的空间位置 g_i 可以有不同的方向，因此，对于空间内的每一点都有一个这样的标架。这些标架的全体就构成了空间上的一个标架场，称为活动标架场。这里，我们假定在今后讨论中所涉及的标架均为右手系。

通常称基矢量g_1, g_2, g_3为协变基矢量。我们还可以定义下列与之对应的称为逆变基矢量的三个基矢量：

$$g^1 = \frac{g_2 \times g_3}{[g_1 \; g_2 \; g_3]}$$