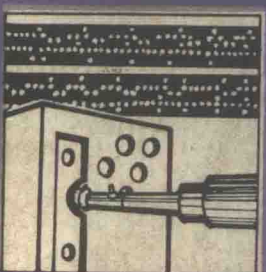
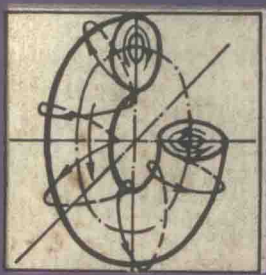
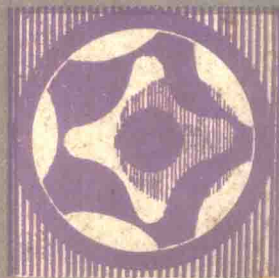


高等学校试用教材



粘性流体力学

上海机械学院 赵学端 主编
廖其莫



机械工业出版社

高等学校试用教材

粘性流体力学

上海机械学院 赵学端 主编
廖其莫



机械工业出版社

粘性流体力学

赵学端 主编
上海机械学院 廖其莫

*

机械工业出版社出版(北京阜成门外百万庄南街一号)

(北京市书刊出版业营业许可证出字第117号)

机械工业出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·新华书店经售

*

开本 $787 \times 1092 \frac{1}{16}$ ·印张 $27 \frac{1}{4}$ ·字数666千字

1983年6月北京第一版·1983年6月北京第一次印刷

印数 0,001—6,500 ·定价2.80元

*

统一书号: 15033·5436

前 言

本书是根据1978年4月第一机械工业部在天津召开的高等院校对口专业座谈会的规划和同年十月在杭州召开的对口流体力学专业教材大纲编审会议对本教材大纲的原则意见,以及1979年6月在上海由浙江大学、清华大学和上海机械学院共同商定的大纲编写的。

全书共分十章。内容包括三部分:基础部分、边界层理论部分、湍流与数值解部分。书中前四章是基础部分,着重讨论了粘性流体运动的基本概念、基本方程与基本性质、以及粘性流体力学方程的基本解,对粘性流体力学问题的建立过程和数学处理方法作了详尽的叙述。第五、七、八、九章是边界层理论部分,内容主要包括不可压缩流体的层流边界层、湍流边界层与温度边界层,以及可压缩流体的层流边界层和湍流边界层等。对二维和轴对称边界层问题的相似性解法及积分关系式解法作了系统的介绍。第六章湍流,在建立湍流基本物理概念和基本方程的基础上,着重阐明两种湍流模式理论、壁面湍流的流动特性、以及管内湍流和渠道湍流,同时对湍流润滑理论、湍流猝发与拟序结构也作了简要介绍。第十章数值解,对粘性流体流动和边界层方程的差分解法作了精简扼要的叙述,并提供了一定的计算实例。

考虑到本学科的发展近况,本书在叙述方法和取材上均比以往有所更新。书中内容比较广泛,在深度上也有一定的伸缩性,根据各院校专业的需要和不同类型专业的要求,在讲授中可以作适当的调整或选择(书中部分章节附有“*”号,仅供参考)。

本书出版前曾在浙江大学、上海交通大学、华中工学院、武汉水运工程学院和上海机械学院等院校的流体力学专业和有关专业的学生或研究生中试用过。

本书可作为高等工科院校的流体力学专业学生以及工程热物理等相近专业的学生或研究生的试用教材,也可供有关专业的教师、科学工作者和工程技术人员参考。

本书第一、二、三、四章由赵学端编写,应启夏协助整理;第五、七、八、九章由廖其奠编写;第六章由葛景信编写;第十章由陈月林编写。全书由浙江大学许学谔、陈邦国主审。本书责任编辑是孙祥根。

在本书编写过程中,清华大学章光华,以及在出版前曾试用过本教材的各兄弟院校的任课教师均对本书提过许多宝贵意见。对以上同志的热情支持和帮助,在此表示衷心感谢。

粘性流体力学内容极为丰富,应用也十分广泛,是一门理论性和实用性都很强的学科。目前,随着科学技术的发展,在许多高等院校的力学、工程热物理、传热传质、动力机械、能源、航空、船舶、水利、化工、气象及环境保护等专业的学生或研究生中都陆续开设这门课程。为了满足教学上的需要,我们参考了国内外有关书刊文献,包括一些兄弟院校的讲义,编写了这份教材。由于编者水平有限,教学经验不足,加之时间仓促,书中可能会有这样或那样的缺点和错误,望广大读者批评指正。

编 者

1981年11月

主要符号表

1. 拉丁字母

V	体积
A	面积矢量
A	面积常数
a	加速度矢量
a	加速度, 声速, 导温系数
c_p	定压比热
c_v	定容比热
D	耗散积分
D	扩散系数
D_f	壁面摩擦阻力
E	输运积分
e	内能
F	力矢量
F	力, 单位质量的质量力
f	无量纲流函数
G	亏损形状因子
g	重力加速度矢量
g	重力加速度
H	形状因子
H	总焓
h	焓
I	涡通量
$[I]$	单位张量
K	湍动能
k	导热系数
k_t	湍流导热系数
l_m	普朗特混合长度
N	粘性系数-密度比
n	法线方向的单位矢量
P	正压函数
P	轴端负荷
p	压力 (单位面积上的压力)
Q	体积流量, 对流换热量
q	单位面积的热流矢量
q_w	壁面热流量
r	复温因子

r	矢径, 位移矢量
S	分离点
s	雷诺比拟因子, 焓
T	温度
t	时间
U_e	边界层外部势流速度
U_∞	自由来流速度, 无穷远处流速
u_{av}	断面平均速度
V	速度矢量
V	速度
v^*	壁面摩擦速度
W	尾迹函数

2. 希腊字母

α	角度, 内层压力梯度参数, 放热系数
β	膨胀系数, 压力梯度参数
Γ	速度环量
Γ	间歇因子
γ	比热比
Δ	耗散厚度
Δ_1	亏损厚度
Δ_2	平方亏损厚度
δ	厚度, 间隙, 边界层厚度
δ_c	导热厚度
δ_n	热焓厚度
δ_T	温度边界层厚度
δ_u	速度边界层厚度
δ^*	排移厚度
ϵ_m	湍流 (运动) 粘性系数
$[\epsilon]$	变形率张量
ϵ_{ff}	变形率张量的分量
Θ^*	无量纲温度
θ	角度, 柱坐标系和球坐标系的坐标轴之一
θ	动量损失厚度
κ	卡门常数, $\kappa \approx 0.40 \sim 0.41$
λ	膨胀粘性系数, 沿程阻力系数
μ	粘性系数 (动力粘性系数)

μ_t	湍流(动力)粘性系数
ν	运动粘性系数
Π	尾迹参数
ρ	密度
τ	切应力
τ_t	湍流切应力
τ_w	壁面切应力
$[\tau]$	应力张量
τ_{ij}	应力张量的分量
Φ	耗散函数, 速度势函数
χ	湿周, 相对总焓
ψ	流函数
Ω	涡矢量
Ω	涡量
ω	旋转角速度矢量
ω	旋转角速度

3. 坐标系及其速度分量

x, y, z	直角坐标系
x_1, x_2, x_3	
q_1, q_2, q_3	正交曲线坐标系
r, θ, z	柱坐标系
r, θ, ψ	球坐标系
i, j, k	直角坐标轴方向的单位矢量
e_1, e_2, e_3	正交曲线坐标轴方向的单位矢量
e_r, e_θ, e_z	柱坐标轴方向的单位矢量
e_r, e_θ, e_ψ	球坐标轴方向的单位矢量
u, v, w	直角坐标轴方向的速度分量
u_1, u_2, u_3	
V_1, V_2, V_3	正交曲线坐标轴方向的速度分量
u_r, u_θ, u_z	柱坐标轴方向的速度分量
u_r, u_θ, u_ψ	球坐标轴方向的速度分量

4. 无量纲组合数、准则数

ϕ_p	负荷系数
Ψ_L	摩擦系数
Br	布伦克曼 (Brinkman) 数
C_D	耗散积分系数

C_{Dm}	混合边界层平均壁面摩擦阻力系数
C_{Df}	平均壁面摩擦阻力系数
C_{Ds}	阻力系数
C_M	扭矩系数
Ec	埃克尔特数
Fr	弗鲁德数
Gr	葛拉晓夫数
Nu	努塞尔特数
Pe	皮克勒数
Pr	普朗特数
Pr_t	湍流普朗特数
Pr_m	混合普朗特数
Re	雷诺数
Sh	斯特鲁哈数
St	斯坦顿数
M	马赫数
We	卫伯数

5. 下 标

a	绝热
av	平均
aw	绝热壁面
cr	临界
e	外部势流
l	层流
n	法线方向
o	起始点, 驻点(滞止点), 坐标原点
s	分离点
t	湍流
tr	转换点, 过渡点
w	壁面
∞	无穷远, 自由来流

6. 上 标

—	时平均, 质量加权平均
~	坐标变换, 湍流度
'	微分, 相对于时平均值的湍流脉动
"	相对于质量加权平均值的湍流脉动
*	无量纲量, 参考温度
+	内层壁面律无量纲量

目 录

第一章 粘性流体运动的基本概念	1	§ 3-1 粘性流体运动的有旋性	48
§ 1-1 引言	1	§ 3-2 粘性流体中速度环量和涡通量的 变化	49
§ 1-2 变形率张量与应力张量	1	§ 3-3 粘性流体中的涡旋传输方程	52
一、变形率张量	1	§ 3-4 粘性流体中涡旋的扩散性	52
二、应力张量	3	§ 3-5 粘性流体中能量的耗散性	55
§ 1-3 广义牛顿定律	4	第四章 粘性流体力学方程的基本解	56
§ 1-4 流体的传输性质	7	§ 4-1 库特剪切流	56
一、粘性系数	7	§ 4-2 充分发展的管流	60
二、导热系数	8	一、等直径圆截面直管	61
三、扩散系数	10	*二、非圆等截面直管	62
§ 1-5 层流与湍流	10	三、充分发展管流中的温度分布	64
第二章 粘性流体力学的基本方程	13	§ 4-3 旋转圆筒间的定常流动	65
§ 2-1 连续性方程	13	一、同心旋转圆筒间的流动	65
§ 2-2 运动方程	15	二、偏心旋转圆筒间的流动	67
一、纳维尔-斯托克斯方程	15	§ 4-4 球的缓慢运动	73
二、葛罗米柯-兰姆形式的运动方程	17	一、球的缓慢转动	73
三、动量矩方程	18	二、球的缓慢移动	74
*四、运动坐标系下的运动方程	18	§ 4-5 旋转圆盘附近的流动	79
§ 2-3 能量方程	18	§ 4-6 粘性流体的非定常流动	84
§ 2-4 状态方程	22	一、突然以匀速 U 滑动的平板引起的 粘性流体的非定常流动	84
§ 2-5 矢量及直角坐标系形式的粘性流体 力学基本方程组	24	二、作周期振动的平板引起的非定常 流动	85
一、矢量形式的微分方程组	24	§ 4-7 可压缩粘性流体流动	86
二、直角坐标系的微分方程组	25	一、可压缩库特剪切流	86
三、矢量形式的积分方程组	27	二、正激波层中的流动	91
* § 2-6 正交曲线坐标系中的粘性流体力学 基本方程组	28	第五章 不可压缩流体层流边界层	96
一、正交曲线坐标系中一些基本量的表 达式	28	§ 5-1 大雷诺数下物体绕流的特性	96
二、曲线坐标系的微分方程组	32	§ 5-2 边界层各种厚度的定义及其数 量级	97
三、柱坐标系的微分方程组	34	§ 5-3 边界层微分方程	101
四、球坐标系的微分方程组	36	§ 5-4 边界层流动的分离现象	106
§ 2-7 初始条件与边界条件	38	§ 5-5 边界层方程的相似性解法	110
§ 2-8 基本方程组的无量纲化与相似 分析	40	一、相似性解的概念及其方程	110
一、方程组的无量纲化	40	二、平板边界层的布拉修斯解	111
二、相似分析	45	三、绕流楔形体的弗克纳-斯肯解	116
第三章 粘性流体运动的基本性质	48	四、收敛形流道内的边界层	123

§ 5-6 边界层方程的积分关系式解法.....125	一、管内湍流的基本方程198
一、动量积分关系式125	二、管内湍流量的测量200
二、速度剖面在边界上应该满足的条件126	三、渠道湍流的半经验公式205
三、平板边界层的动量积分关系式解法128	* § 6-9 湍流润滑理论208
四、有压力梯度边界层的动量积分关系式解法129	一、润滑流动的基本方程208
*五、动能积分关系式解法.....137	二、按平均场模式的计算法209
§ 5-7 轴对称层流边界层.....140	三、按湍动能模式的计算法213
一、基本方程和门格勒变换140	四、按体积流动律的计算法214
二、绕流圆锥体的边界层144	* § 6-10 湍流猝发与拟序结构.....218
三、轴对称边界层的积分关系式解法147	第七章 不可压缩流体湍流边界层223
四、绕流细长旋成体的边界层149	§ 7-1 湍流边界层微分方程及其积分关系式.....223
§ 5-8 三维层流边界层.....153	§ 7-2 湍流边界层的综合特性.....226
一、三维边界层方程153	§ 7-3 平板湍流边界层.....235
二、斜向绕流柱体上的三维边界层154	一、动量积分关系式解法235
§ 5-9 非定常层流边界层.....157	二、内层关系式解法237
第六章 湍流163	三、平板的总摩擦阻力239
§ 6-1 概述.....163	四、粗糙平板的湍流边界层241
一、湍流现象与性质163	五、平板混合边界层的摩擦阻力244
二、湍流分类166	§ 7-4 有压力梯度湍流边界层.....246
§ 6-2 湍流平均值和时均运算关系式、湍流度.....167	一、半经验的壁面摩擦关系式246
一、湍流平均值167	二、卡门型积分关系式解法247
二、常用的时均运算关系式169	三、希德方法248
三、湍流度170	四、怀特方法250
§ 6-3 湍流平均运动的连续性方程和动量方程.....170	§ 7-5 绕流细长旋成体的湍流边界层.....254
一、连续性方程171	§ 7-6 自由湍流·射流和尾迹流.....256
二、动量方程 (雷诺方程).....171	一、自由湍流射流257
三、质量加权平均的连续性方程和动量方程174	二、自由边界射流263
*四、柱坐标系中的连续性方程和动量方程.....175	三、尾迹流265
§ 6-4 湍流平均运动的能量方程.....176	第八章 不可压缩流体温度边界层270
一、能量方程176	§ 8-1 温度边界层概念.....270
二、平均动能方程178	§ 8-2 温度边界层能量积分关系式.....271
§ 6-5 湍流应力方程和湍动能方程.....179	§ 8-3 温度边界层微分方程.....273
§ 6-6 两种湍流模式理论.....183	一、层流温度边界层微分方程273
一、平均速度场模式183	二、湍流温度边界层微分方程276
二、湍动能模式187	§ 8-4 热量传递与动量传递之间的比拟——雷诺比拟.....277
§ 6-7 壁面湍流的流动特征.....190	§ 8-5 平板层流温度边界层.....278
一、壁面湍流的分层结构190	§ 8-6 有压力梯度层流温度边界层.....286
二、壁面湍流的时均速度分布191	§ 8-7 轴对称层流温度边界层.....291
§ 6-8 管内湍流和渠道湍流.....198	§ 8-8 层流温度边界层的积分关系式解法.....294
	一、史密斯-斯帕尔汀方法.....294
	二、斯奎厄方法296

§ 8-9 自然对流温度边界层	299	式解法	343
一、沿竖直等温平板的自然对流	300	一、积分关系式	343
二、沿水平圆柱体和球体的自然对流	302	二、柯亨-莱绍特柯的积分关系式解法	346
§ 8-10 湍流温度边界层	303	§ 9-7 可压缩流体轴对称层流边界层	352
一、湍流普朗特数	304	一、基本方程及其变换	352
二、温度壁面律	306	二、绕流圆锥体的边界层	353
§ 8-11 平板的湍流传热	308	三、前驻点附近的流动	354
§ 8-12 压力梯度对湍流传热的影响	311	§ 9-8 可压缩流体湍流边界层微分方程	355
第九章 可压缩流边界层	312	§ 9-9 湍流克罗柯-布泽曼能量积分	357
§ 9-1 可压缩流体层流边界层微分方程	312	§ 9-10 平板可压缩湍流边界层	358
一、方程的推导	312	§ 9-11 参考温度解法	371
二、克罗柯-布泽曼能量积分	315	§ 9-12 绕流圆锥体的湍流边界层	373
三、方程的变换	317	*第十章 粘性流体力学方程的数值解	376
§ 9-2 可压缩流体层流边界层的相似性解法	323	§ 10-1 粘性流体流动的数值解法	376
§ 9-3 平板可压缩层流边界层	327	一、基本方程	376
一、相似性解法	327	二、差分方程的稳定性分析	377
*二、利兹近似解法	330	三、涡-流函数方程的数值解法	380
三、参考温度解法	332	四、定解条件	386
四、范德莱斯特精确解	334	五、计算实例	390
§ 9-4 有压力梯度可压缩层流边界层	336	§ 10-2 边界层方程的数值解法	394
§ 9-5 前驻点附近的流动	341	一、薛贝赛-史密斯方法	394
§ 9-6 可压缩流体层流边界层的积分关系		二、层流边界层方程的数值解法	416
		三、湍流边界层方程的数值解法	423

第一章 粘性流体运动的基本概念

§ 1-1 引言

在自然界中, 真实的流体都具有粘性。但是对于每一个具体的流动问题来讲, 粘性所起的作用并不一定相同。对某些问题, 例如求解流体作用于被绕流物体上的升力、表面波的运动等, 粘性的作用并不占支配地位, 因而应用非粘性流体力学理论, 可以获得满意的结果。而对另一些问题, 例如求解运动流体中的粘性阻力, 涡旋的扩散, 以及热量的传递等, 粘性的作用已占主导地位, 如再忽略粘性的存在将会导致完全不符合实际的结果。粘性流体力学就是研究在粘性不能忽略不计的情况下流体的宏观运动, 以及流体和在该流体中运动的物体之间的相互作用所遵循的规律。

流体中粘性切应力的存在以及物面上的粘附条件(无滑移条件), 是粘性流体运动有别于非粘性流体运动的主要标志。由于这一差别导致了它们之间在运动性质上的重大差异。至于谈到研究流体运动的基本方法, 如拉格朗日方法、或欧拉方法; 许多基本概念, 如流体的连续介质假定, 压缩性等; 建立流体运动的数学模型, 如推导运动方程组的方法等; 以及不涉及到粘性作用的问题; 均可沿用非粘性流体力学中所阐述的内容。本书就是在已学习过非粘性流体力学的基础上, 进一步研究粘性流体力学理论, 以及讨论如何在实际中应用这些理论的方法。

在本章里, 将重点阐述一些和粘性密切相关的基本概念, 为今后章节的学习打下基础。

§ 1-2 变形率张量与应力张量

一、变形率张量

由柯西-海姆霍茨定理知道, 流体微团的运动可以分解成三个部分: 位移、旋转与变形(线变形与剪切变形)。

设在某一固定时刻, 流体微团内一点 M_0 的速度为 V_0 , 则 M_0 点邻域内各点的速度 V 可以表示为

$$V = V_0 + \omega \times \delta r + [\varepsilon] \cdot \delta r \quad (1-1)$$

(一) 位移速度 V_0 是由 M_0 点作平移运动引起的;

(二) 旋转速度 $\omega \times \delta r$ 是由于流体微团绕通过 M_0 的瞬时转动轴旋转而引起的, 在直角坐标系中

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_x i + \omega_y j + \omega_z k \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) i + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) j + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) k \end{aligned} \quad (1-2)$$

定义涡量

$$\Omega = 2\omega = \text{rot} \mathbf{V} = \nabla \times \mathbf{V} \quad (1-3)$$

并由涡量是否为零, 定义无旋流动与有旋流动。对无旋流动, 有 $\Omega = 0$ 。应着重指出, 流体微团是否作有旋运动, 需视微团是否围绕着通过流体微团的瞬时轴旋转, 而并非决定于流体微团轨迹 (迹线) 的几何形状。

(三) 变形速度 $[\varepsilon] \cdot \delta \mathbf{r}$ 是由于流体在 M_0 点邻域内变形所引起的, 分线变形速度和剪切变形速度两种。在直角坐标系中, 线变形速度为

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (1-4 a)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (1-4 b)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (1-4 c)$$

剪切变形速度为

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (1-5 a)$$

$$\varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad (1-5 b)$$

$$\varepsilon_{zx} = \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (1-5 c)$$

上述九个变形速度分量构成一个二阶对称张量

$$[\varepsilon] = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} \quad (1-6)$$

称它为变形率张量, 它的分量与坐标系的选择有关, 并有三个与坐标系选择无关的不变量, 即

$$I_1 = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} \quad (1-7 a)$$

$$I_2 = \varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{yy}\varepsilon_{zz} + \varepsilon_{zz}\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{xy}^2 - \varepsilon_{yz}^2 - \varepsilon_{zx}^2 \quad (1-7 b)$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{vmatrix} \quad (1-7 c)$$

根据对称张量的性质, 存在着一个使得非主对角线上的分量均为零的坐标系位置。此位置的三个坐标轴称为主轴。此时变形率张量变为

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}$$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 称为变形率的主值, 也称为主伸长速度。因此三个张量不变量又可以写成

$$I_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \quad (1-8 a)$$

$$I_2 = \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_1 \quad (1-8 b)$$

$$I_3 = \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 \quad (1-8 c)$$

当三个不变量为已知时,即可解出变形率的主值。

最后,再来看一下 I_1 的物理意义。根据 (1-7a) 及 (1-4) 式可以得出

$$I_1 = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \operatorname{div} \mathbf{V} = \nabla \cdot \mathbf{V} \quad (1-9)$$

此即为连续性方程式中的相对体积膨胀率项。

二、应力张量

在静止流体中,作用于单位面积上的表面力(应力)永远沿着作用面的内法线方向,而且其大小与作用面所处的方位无关。也就是说一点的静压力各方向相等。对于非粘性流体由于不计粘性,没有切向力,因而动压力也垂直于作用面,而且各方向相等。但是对于粘性流体来讲就不一样了。由于粘性的存在,可以有切向力,因而单位面积上的表面力(应力)就不一定垂直于作用面,而且各方向的大小也不一定相等。

在给出应力张量以前,先规定一下作用面的法线方向与一些下标。

如微元曲面 dA 是闭曲面的一部分,则取外法线方向为 dA 的正方向。如 dA 所在的曲面不封闭,则可以规定某一方向为正。正方向所指的流体作用于 dA 上的应力以 τ_n 表示,负方向所指的流体作用于 dA 上的应力以 τ_{-n} 表示。见图 1-1。

显然

$$\tau_{-n} = -\tau_n \quad (1-10)$$

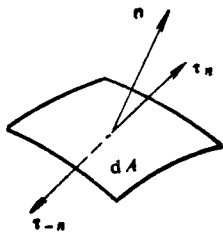


图1-1 作用于微元面上的应力

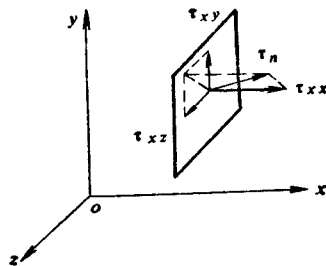


图1-2 作用在垂直于x轴面上的应力

如果作用面垂直于坐标系上的任一坐标轴,则应力可以分解成三个分量。其中一个垂直于作用面——法向应力;另外两个与作用面相切——切向应力(切应力),分别平行于另外两个坐标轴——切应力在坐标轴向的分量。见图 1-2。因此用两个下标来表示这些应力,第一个下标表示与应力作用面垂直的坐标轴,即应力作用面的法线方向,第二个下标表示应力在哪个坐标轴向的分量,即应力投影方向。

由上述分析知道,作用在空间点以 n 为法线方向的微元面 dA 上的应力 τ_n ,可以由过该点作用在三个垂直于坐标轴的平面上的应力 τ_x , τ_y , τ_z 的九个分量完全确定。这九个分量也构成一个二阶对称张量

$$[\tau] = \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix} \quad (1-11)$$

称它为应力张量。它的法向应力之和 $\tau_{xx} + \tau_{yy} + \tau_{zz}$ 为一张量不变量,此不变量的三分之一

取负值定义为平均压力

$$p = -\frac{1}{3}(\tau_{xx} + \tau_{yy} + \tau_{zz}) \quad (1-12)$$

§ 1-3 广义牛顿定律

牛顿提出了关于粘性流体作直线层状运动时, 两流体层间的切应力的假设。认为切应力与层间速度梯度成正比, 即

$$\tau_{yx} = \mu \frac{du}{dy} \quad (1-13)$$

μ 为动力粘性系数, 取决于流体的物理性质。通常称 (1-13) 式为牛顿内摩擦定律。

根据上一节所述的变形率张量和应力张量, (1-13) 式左边对应于平面直线运动特殊情况下的应力张量的一个切向分量, 右边的导数项对应于变形率张量的一个分量。因此, 可以理解为 τ_{yx} 与 ε_{yx} 成比例:

$$\tau_{yx} = 2\mu\varepsilon_{yx} \quad (1-14)$$

斯托克斯将牛顿内摩擦定律推广到粘性流体的任意流动情形中去, 假设:

1. 流体是连续的, 它的应力张量是变形率张量的线性函数;
2. 流体是各向同性的, 也就是它的性质与方向无关。因此, 无论坐标系如何选取, 它的应力与变形率的关系是相同的;
3. 当流体静止, 即变形率为零时, 流体中的应力就是流体静压力。

$$\tau_{ij} = -p_0\delta_{ij} \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (1-15 a)$$

或

$$[\tau] = -p_0[I] \quad (1-15 b)$$

$[I]$ ——单位张量

$$[I] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1-16)$$

实验证明, 对大多数常见的液体和气体上述假设是对的。

根据应力张量与变形率张量是线性关系以及流体是各向同性的假设, 可以将应力张量 $[\tau]$ 与变形率张量 $[\varepsilon]$ 的线性关系式写成

$$[\tau] = a[\varepsilon] + b[I] \quad (1-17)$$

式中 系数 a 和 b 应该是标量。

由于关系式是线性的, 因此系数 a 不可能与张量 $[\tau]$ 和 $[\varepsilon]$ 中的分量有关, 应该是与流体运动形态无关, 取决于流体的物理属性的系数。参照牛顿内摩擦定律 (1-13)、

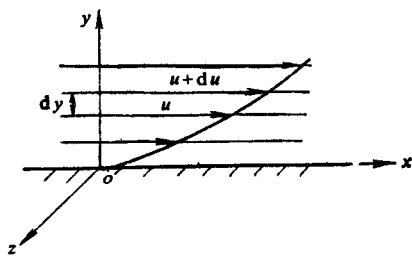


图1-3 流体作直线层状运动时壁面附近速度分布

(1-14) 式, 令

$$\alpha = 2\mu \quad (1-18)$$

至于系数 b , 由于在 (1-17) 式中右边第二项是 b 与单位张量 $[I]$ 的乘积, 要保持该式的线性关系, b 只能由张量 $[\tau]$ 与 $[\varepsilon]$ 的分量线性地组成。又由于 b 是标量, 因此它应该由张量 $[\tau]$ 与 $[\varepsilon]$ 的分量中, 那些当坐标系转换时其值不变的分量组合来构成。对二阶张量来讲, 主对角线上三个分量的和为它的线性不变量。如以下标 11, 22, 33 代替 xx, yy, zz 则对于应力张量的线性不变量为

$$\tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33}$$

对于变形率张量的线性不变量为

$$\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = \nabla \cdot \mathbf{V}$$

于是可写出标量 b 的一般关系式

$$b = b_1(\tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33}) + b_2 \nabla \cdot \mathbf{V} + b_3 \quad (1-19)$$

式中 b_1, b_2, b_3 为待定常数。将 (1-18), (1-19) 式代入 (1-17) 式, 得到

$$[\tau] = 2\mu[\varepsilon] + [b_1(\tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33}) + b_2 \nabla \cdot \mathbf{V} + b_3][I] \quad (1-20)$$

取等式两边主对角线上三个分量之和, 可以得出

$$\tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33} = 2\mu \nabla \cdot \mathbf{V} + 3b_1(\tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33}) + 3b_2 \nabla \cdot \mathbf{V} + 3b_3$$

归并同类项后, 得到

$$(1 - 3b_1)(\tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33}) = (2\mu + 3b_2) \nabla \cdot \mathbf{V} + 3b_3 \quad (1-21)$$

在静止状态下, $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$, 而且 $\tau_{11} = \tau_{22} = \tau_{33} = -p$, 则上式可以写成

$$-p_0(1 - 3b_1) = b_3$$

由于 b_1, b_3 均为常数, 而且要求在静压力 p_0 值为任意情况下均成立, 则只有

$$b_3 = 0, \quad b_1 = \frac{1}{3} \quad (1-22)$$

再以此代回 (1-21) 式, 可得

$$b_2 = -\frac{2}{3} \mu \quad (1-23)$$

这三个系数确定以后, 就可得出应力张量与变形率张量之间的一般线性关系式

$$[\tau] = 2\mu[\varepsilon] + \left[\frac{1}{3} (\tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33}) - \frac{2}{3} \mu \nabla \cdot \mathbf{V} \right] [I] \quad (1-24)$$

对于非粘性流体, 一点的压力 p 各方向是相等的, 这里类似地引用这一符号, 由 (1-12) 式, 令 p 等于

$$p = -\frac{1}{3}(\tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33})$$

对于粘性流体来讲, 今后可以看到 p 只有在特殊情况下才能各方向相等, 因此, 这里实际上带有平均值的概念。于是可将 (1-24) 式改写成

$$[\tau] = 2\mu[\varepsilon] - \left(p + \frac{2}{3} \mu \nabla \cdot \mathbf{V} \right) [I] \quad (1-25)$$

如果在确定系数 b_2 时, 暂不以 $-\frac{2}{3} \mu$ 代入, 而记以符号 λ , 则上式可以写成

$$[\tau] = 2\mu[\varepsilon] - (p - \lambda \nabla \cdot \mathbf{V})[\mathbf{I}] \quad (1-26)$$

通常称此式或 (1-25) 式为广义牛顿定律。 λ 称为膨胀粘性系数。

如以 u_i 和 x_i ($i=1, 2, 3$) 分别代 u, v, w 和 x, y, z , 则可以写出在直角坐标系中应力张量与变形率张量各分量之间的关系式

$$\tau_{ij} = \begin{cases} \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) & \text{当 } i \neq j \text{ 时} \\ -p + 2\mu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{2}{3}\mu \nabla \cdot \mathbf{V} & \text{当 } i = j \text{ 时} \end{cases} \quad (1-27)$$

对于不可压缩流体

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$$

则

$$\tau_{ij} = \begin{cases} \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) & \text{当 } i \neq j \text{ 时} \\ -p + 2\mu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} & \text{当 } i = j \text{ 时} \end{cases} \quad (1-28)$$

当退回到牛顿内摩擦定律的原始情况: 平面直线运动时, $u = u(y)$, $v = w = 0$, 此时 (1-27) 式变成

$$\tau_{xy} = \mu \frac{du}{dy}$$

此即为 (1-13) 式。

广义牛顿定律建立了在一般情况下应力张量与变形率张量之间的关系, 它是粘性流体力学的一个理论基础。虽然在推广的过程中采用了一些无法用实验验证的不很严格的假定, 但是, 根据这一关系所得出的粘性流体力学方程组对许多问题的解, 均被实验所证实。因此, 间接地证明了这些推广的可靠性。

凡是应力张量与变形率张量的关系满足广义牛顿定律 (1-25) 式或 (1-26) 式的流体, 称之为牛顿流体, 例如水、空气等。反之, 不满足上述定律的流体称之为非牛顿流体。

非牛顿流体通常可分为三大类:

1. 纯粘性非牛顿流体——此类流体当静止时呈现各向同性, 当受剪切时应力的合力仅与变形率有关, 与时间或剪切的持续时间无关。如宾汉塑性体 (油漆、泥浆等), 伪塑性体与胀塑性体 (橡胶、纸浆、颜料、淀粉糊等) 以及雷讷-里伍林体 (胶质炼乳、熔化沥青等) 都属于这一类。

2. 时间依存流体——此类流体在等温的条件下, 保持固定的变形率, 随着时间的推移, 应力 (粘性) 逐渐增大或减小; 或者是在固定的应力作用下, 随着时间的推移变形率逐渐减小或增加。如油墨即属于这一类流体。

3. 粘弹性流体——是一个既具弹性, 又具粘性的流体。它既有固体的特性, 同时, 流动时又像流体那样, 由于摩擦损失而耗散能量。如某些高分子聚合物溶液即具有这种粘弹特性。

随着科学的发展, 工程中越来越多的流体力学问题已超出了牛顿流体的范畴。鉴于本书的任务, 我们仅限于研究牛顿流体, 对于非牛顿流体, 可以阅读近年来出版的“非牛顿

流体力学”，“粘弹性流体力学”，“流变学”以及更专门的著作。

§ 1-4 流体的传输性质

流体的物理性质大部分在非粘性流体力学中已经讨论过。这里仅就与运动过程有关的流体的传输性质做些补充。

流体的传输性质是指某些和流体运动（输运）过程：动量传递，热量传递与质量传递有关的一些性质；亦即粘性，传热与扩散。用以表征这三者的是相应的粘性系数，导热系数与扩散系数。这三个性质有其相似之处，粘性系数将动量传递与速度梯度联系起来；导热系数将热量传递与温度梯度联系起来；扩散系数将质量传递与浓度梯度联系起来。此外，上述各量的关系式，在结构形式上也甚相似。当然，也有不相同之处，例如在多元流动时，热流与质量流均是矢量，而动量流则是一张量。

一、粘性系数

粘性早为大家所熟知。当流场具有速度梯度时，将会产生动量的传输。速度梯度（变形率）与切应力之间的关系，如 § 1-3 所述，遵循牛顿内摩擦定律

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} \quad (1-29)$$

式中动力粘性系数 μ 的单位为泊（P）或厘泊（cP）：

$$1 \text{ P} = 10^{-1} \text{ Pa} \cdot \text{s} = 10^{-1} \frac{\text{N} \cdot \text{s}}{\text{m}^2}$$

动力粘性系数随温度与压力而变化，但压力的影响甚微。对于液体它随温度升高而减小，而对于气体则随温度升高而增大。

在流体力学中也常用到运动粘性系数 ν ：

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (1-30)$$

ρ 为流体密度。运动粘性系数 ν 的单位为沱（St）或厘沱（cSt）

$$1 \text{ St} = 1 \frac{\text{cm}^2}{\text{s}}$$

对于水在一个大气压下，不同温度时的粘性系数见表 1-1；干空气在一个标准大气压下，不同温度时的粘性系数见表 1-2。

表 1-1 水在一个大气压下不同温度时的粘性系数

$t, ^\circ\text{C}$	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
$\mu \times 10^3 \text{ Pa} \cdot \text{s}$	1.785	1.305	1.004	0.801	0.653	0.549	0.470	0.406	0.355	0.315	0.282
$\nu \times 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$	1.792	1.306	1.006	0.805	0.659	0.556	0.478	0.415	0.365	0.326	0.295

表1-2 干空气在一个大气压下不同温度时的粘性系数

$t, ^\circ\text{C}$	0	5	10	15	20	25	30	35
$\mu \times 10^6 \text{Pa}\cdot\text{s}$	17.161	17.455	17.750	17.994	18.24	18.48	18.73	18.975
$\nu \times 10^6 \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$	13.70	14.20	14.70	15.20	15.70	16.155	16.61	17.105

$t, ^\circ\text{C}$	40	50	60	70	80	90	100	120
$\mu \times 10^6 \text{Pa}\cdot\text{s}$	19.22	19.61	20.10	20.396	20.985	21.57	21.77	22.75
$\nu \times 10^6 \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$	17.60	18.60	19.60	20.45	21.70	22.90	23.78	26.20

对于各种气体的粘性系数可以近似采用下列幂次公式来计算

$$\frac{\mu}{\mu_0} \approx \left(\frac{T}{T_0} \right)^n \quad (1-31)$$

这里 $T_0 = 273.16 \text{K}$, μ_0 为一个大气压下, 0°C 时气体的动力粘性系数, n 为温度指数, 如空气 $n \approx 0.76$, 氢 $n \approx 0.69$, 二氧化碳 $n \approx 0.95$, 在估算时, 高温时可取 $n \approx 0.5$, 低温时 $n \approx 1$ 。

准确些还可以用苏士南 (Sutherland) 公式来计算:

$$\frac{\mu}{\mu_0} \approx \left(\frac{T}{T_0} \right)^{3/2} \frac{T_0 + T_s}{T + T_s} \quad (1-32)$$

这里 $T_0 = 273.16 \text{K}$, μ_0 为一个大气压下, 0°C 时气体的动力粘性系数, T_s 为苏士南常数, 与气体性质有关。

表 1-3 列出了几种气体在一个大气压下的动力粘性系数 μ 及苏士南常数 T_s 。

表1-3 几种气体在一个大气压下不同温度时的动力粘性系数 μ 及苏士南常数

气 体	$\mu \times 10^6 \text{Pa}\cdot\text{s}$						苏士南常数 T_s, K
	$t, ^\circ\text{C}$						
	0	20	40	60	80	100	
空气	17.161	18.239	19.220	20.102	20.985	21.769	124
氮	16.602	17.484	18.357	19.259	20.004	20.828	104
氦	9.306	10.051	10.787	11.453	12.150	12.807	503
氧	19.200	20.259	21.308	22.358	23.407	24.407	125
氢	8.404	8.806	9.178	9.590	9.963	10.306	71
氯	12.307	13.199	14.101	15.00	15.905	16.807	350
甲烷	10.198	10.806	11.502	12.140	12.699	13.307	164
乙炔	9.600	10.198	10.826	11.453	12.022	12.601	215
乙烯	9.453	10.10	10.698	11.198	11.855	12.405	225
一氧化碳	16.807	17.680	18.553	19.151	20.240	21.024	100
二氧化碳	13.807	14.699	15.699	16.700	17.553	18.455	254
硫化氢	11.600	12.405	—	—	—	15.905	331
水蒸汽	8.933	9.669	10.404	11.130	11.875	12.601	961

二、导热系数

当流场具有温度梯度时, 将会产生热量的传输。温度梯度与热流量的关系遵循傅里叶定律