

大學叢書

何幾面曲

著者 本 濂
譯者 舍 紹
維 周

商務印書館出版

72/15025

大學叢書
何幾面曲

✓維舍本著
周紹濂譯

商務印書館出版

(1933年5月)

大學
曲面幾何

Differential Geometry of three
Dimensions Vol. II

辛 著 E. Weatherburn

述 者 紹 濂

取 者 務 印 書 館

行 者 中國圖書發行公司
上海河南中路二一四號
電話四六六號

行 行 聯書店 中華書局
各分店 開明書店

刷 商務印書館印刷廠

★ 版權所有 ★

自非歐幾何發明以來，空間觀念，爲之一變；自相對論發明以來，宇宙觀念，又爲之一變。近二十餘年來，學者正從事於構造一新空間，足以包含各種現象者，則以根據萊維西維太之平行移位者爲近（見本書第九章）。故曲面幾何匪惟專治數學者所宜讀，即研究物理學者與哲學者，亦未可忽之也。周紹濂教授爲幾何名家，且勤於著述，所譯 Weatherburn 之曲面幾何，繁簡適中，且附習題，足資練習，又純用向量，最富綜合性。初讀時雖闕幾何直覺，一旦貫通，抽象力必大爲增強，因以創造新理，豈不盛哉。且讀此書時，必與解析幾何，微分幾何，黎曼幾何等相輔而行，乃更有興趣。而周君皆有成稿（見譯者序）。誠能盡量印行，用饗讀者，以破著述界之寂寞，亦一快也。

民國三十三年

何魯識

譯 者 序

余自歐遊歸來，六載於茲，先後講授幾何於國立山東大學，國立中央大學及重慶大學。嘗思以有系統之著述介紹斯學於國人之前，爰於課餘編譯解析幾何，微分幾何，黎曼幾何，曲面幾何，線彙幾何，點集幾何，形勢幾何諸稿；意在以解析幾何爲學習之初階，繼之以微分幾何，再以黎曼幾何，曲面幾何爲進修之津梁，然後以線彙幾何，點集幾何，形勢幾何指示研究之途徑。微分幾何與黎曼幾何曾分別送大學用書編輯委員會與國立編譯館出版。本書乃譯自英國 C. E. Weatherburn 教授所著之“Differential Geometry of Three Dimensions, Vol. II.”全書計十三章，內容重在論述曲面線族之特性，曲面族之變形，表示法，彎曲性，可貼合性，以及三重正交曲面系等，故取名爲曲面幾何。其第四章爲微分幾何中直紋面與W 曲面之補篇，第九章爲萊維西維太對於曲面平行移位之簡單說明及其對曲線捷比西夫系之若干應用，最後一章論曲紋線彙之有關曲面乃將直紋線彙與圓紋線彙之理論作一般之敘述也。值茲時艱，人事多變，深慮稿件遺失，是以倉猝付梓，如讀者因此而增進其研究幾何之興趣，則幸甚矣！

一九四二年七月

周紹濂於沙坪壩

31981

721/2085

31636

2085

21293

目 錄

何序

譯者序

第一章 曲面上之微分不變量 1

1. 數量函數之梯度・導微函數 1
2. 向量之散度與旋度 3
3. 展開公式 4
4. 二級微分不變量 6
5. 有向微分法之次序 7
6. 單位向量 a, b, n 之導微函數 8
7. 其他微分不變量 9
- 習題一 11

第二章 曲面上之曲線族 15

8. 曲率特性 15
9. 三面形之迴轉率 16
10. 線族之矩量・零矩量線 17
11. 腰曲線・線族之散度 18
12. 平行線與短程線 19

13. 曲線之正交線	21
14. 等溫正交系	23
15. 等溫系之斜交曲線族	25
16. 等溫系之條件之代替式	26
17. 平行短程線族	26
18. 通量與環流	27
習題二	29

第三章 曲線族(續)斜交曲線 32

19. 數量函數之二微分不變量	32
20. 向量函數之相關不變量	33
曲線族($\phi = \text{常數}$)	34
21. 距離函數·腰曲線·矩量	34
22. 正曲率·共軛方向	36
23. 線族之正交曲線	38
斜交曲線	39
24. 腰曲線·平行線	39
25. 短程曲率·各種定理	41
26. 線族之矩量·曲率線	42
27. 正曲率·共軛方向	43
習題三	44

第四章 直紋面·凡因格登曲面 46

直紋面.....	46
28. 總論.....	46
29. 坐標之選取・曲率.....	47
30. ψ 之式.....	49
31. 幾何解釋・母線之散度.....	51
32. 不可展直紋面上之等溫系.....	53
凡因格登曲面.....	54
33. 直紋凡因格登曲面.....	54
34. 一般凡因格登曲面.....	55
35. 單位正線所適合之微分方程式.....	57
36. 常數曲率線.....	58
37. 常數第一曲率之曲面.....	59
38. 旋轉面.....	61
習題四.....	62
第五章 空間曲紋坐標・微分不變量	67
39. 符號・基本量.....	67
40. 參數曲面之單位正線.....	69
41. 數量函數之梯度.....	70
42. 算子 ∇	73
43. 向量之散度與旋度.....	74
44. 展開公式.....	76
45. 二級微分不變量.....	77

46. 正交坐標	78
47. 半正交坐標	80
48. 微分不變量	82
積分之變換	83
49. 線積分與面積分	83
50. 高斯散度定理	85
51. 格林定理及其他	87
習題五	88

第六章 曲面族 94

52. 曲面之第一曲率	94
53. n 之旋度 · 平行曲面	96
54. 曲面之第二曲率	97
55. 第二曲率(續)	99
56. 諸曲面之正交曲線	100
57. 任一曲面上之等距線	101
58. 諸曲面之等溫系	103
59. 凡因格登曲面族	105
曲面之拉美族	106
60. 條件方程式	106
61. 諸曲面之正交線彙	108
62. 面族之距離函數	110
63. 常數第一曲率之諸曲面	111

64. 可展面之拉美族.....	112
------------------	-----

習題六.....	113
----------	-----

第七章 二級張量・並向量式 117

65. 並向量與並向量式.....	117
-------------------	-----

66. 向量之開乘積.....	118
-----------------	-----

67. 並向量與並向量式之積.....	119
---------------------	-----

68. 九原式・並向量式之數量及向量.....	120
-------------------------	-----

69. 單位並向量式・反商並向量式.....	122
------------------------	-----

70. 對稱及反對稱並向量式.....	124
---------------------	-----

71. 並向量式與向量之叉乘積.....	127
----------------------	-----

72. 並向量與並向量式之二重乘法.....	128
------------------------	-----

73. 並向量式之第二第三式.....	129
---------------------	-----

74. 並向量式之數量不變量.....	130
---------------------	-----

算子 ∇ 組成之並向量式.....	132
--------------------------	-----

75. 並向量式 ∇s 與 $s\nabla$	132
---------------------------------------	-----

76. 展開公式.....	133
---------------	-----

77. 對定曲面之算子 ∇	134
----------------------------	-----

78. 對曲面之並向量式 ∇n	135
-------------------------------	-----

79. 其他幾何釋例.....	137
-----------------	-----

習題七.....	138
----------	-----

第八章 曲面上之曲線族及方向之函數 145

有心二次曲面·····	145
80. 有心二次曲面·····	145
80.1 二次曲面之反圖·····	146
81. 有心圓錐曲線·····	148
曲面上之曲線族·····	149
82. 任一方向內之趨量·第一圓錐曲線·····	149
83. 線族對任一方向之矩量·第二圓錐曲線·····	151
84. 線族之偏量·第三圓錐曲線·····	154
曲面上之方向函數·····	155
85. 梅拉第科達溪關係式·高斯方程式·····	155
86. 拉格爾與達爾布函數·····	156
87. 三向之科達溪函數·····	160
習題八·····	161

第九章 萊維西維太之平行移位·捷比西夫系·····163

88. 萊維西維太之平行觀念·····	163
89. 平行移位之條件·····	164
90. 關於平行移位之二定理·····	166
91. 沿閉曲線之平行移位·····	167
捷比西夫系·····	168
92. 捷比西夫網·····	168
93. 腰曲線及正曲率·····	170

94. 捷比西夫系之其他特性	171
習題九	173
第十章 曲面之表示法	175
圓錐曲線投影法	175
95. 線性變換・伸張比	175
96. 伸張橢圓	176
97. 表示法之主方向	177
98. S' 上之基本量及算子 ∇'	180
圓錐曲線投影法	181
99. 一般之圓錐曲線投影法	181
100. 特殊情形	183
習題十	186
第十一章 曲線及曲面之小變形	188
曲線之小變形	188
101. 單純空間曲線	188
102. 曲面上之曲線族	190
曲面之小變形	191
103. 一階量膨脹模數	191
104. 變形曲面之單位正線	192
105. 變形曲面之曲率	193
106. 伸張模數・斜角之變遷	195

107. 曲面元素之旋轉	198
108. 替代法	199
109. 曲面 S' 上之微分不變量	201
110. 圓錐曲線投影法之小變形	202
111. 小定長變形	203
112. 曲面族之小變形	205
習題十一	208

第十二章 曲面之彎曲·可貼合性 211

113. 可貼合性·對彎曲不變之量	211
114. 閔定問題	212
115. 例外	214
116. 有常數高斯曲率之曲面	217
117. 偽球面之 ds^2 之三種方式	219
118. 可在其本身上變形之曲面	223
119. 可貼合性之第二問題	225
120. S 上一已知曲線之指定變形	226
直紋面之彎曲	229
121. 彭萊與白爾特米定理	229
122. 彭萊之第二定理	231
習題十二	232

第十三章 曲紋線彙 235

123. 導言	235
第一法	235
124. 符號	235
125. 焦點・焦點曲面	236
126. 限點・限點曲面	239
127. 腰曲面・線彙之散度	241
128. 線彙曲面	243
129. 正線彙	245
130. 直紋線彙	246
第二法	248
131. 第一二次曲面・零趨量錐面	248
132. 腰曲面・限點曲面	250
133. 第二二次曲面・零矩量錐曲	252
134. 正曲面・端點曲面	254
135. 正截口之軸	256
136. 旋轉之變率	257
137. 錐面爲兩平面者	259
138. 迷向線彙	260
139. 三正交線彙	262
140. 等距線之線彙	264
141. 曲紋線彙之小變形	265
附名詞索引	267

曲 面 幾 何

第一章 曲面上之微分不變量

1. 數量函數之梯度 · 導微函數 微分幾何第十二章所論之微分不變量,在本書頗關重要。爲引起讀者注意起見,茲將諸重要特性及公式彙敘述於後。

數量點函數 ϕ 在已知曲面上之梯度 (Gradient) 爲一向量,以 $\nabla\phi$ 表之;其於任意點 P 之方向爲在曲面上使 ϕ 增加有極大之弧變率 (arc rate) 之方向,其大小即此增加弧變率之極大值。由是此乃曲面上之一向量點函數。 ϕ 在任何方向之導微函數或增加之變率爲 $\nabla\phi$ 在此方向之分量,故當 $\mathbf{c}$ 爲在 P 點之單位曲面向量,即平行於 P 點之切面之單位向量,則 ϕ 在 $\mathbf{c}$ 之方向之導微函數之值爲 $\mathbf{c} \cdot \nabla\phi$, 用曲面上任何相宜之參數 u, v 及相當之一階基本量 E, F, G , 則 ϕ 之梯度可表爲(參閱微分幾何 § 114):

$$\nabla\phi = H^{-2}[(G\phi_1 - F\phi_2)\mathbf{r}_1 + (E\phi_2 - F\phi_1)\mathbf{r}_2] \cdots \cdots (1)$$

其中 $\mathbf{r}$ 爲曲面上動點 P 之位置向量,又下誌 1, 2 依次表對 u 與 v 之偏導微函數,由是 $\nabla\phi$ 可視爲向量微分算子

$$\nabla = \frac{1}{H^2} \left[\mathbf{r}_1 \left(G \frac{\partial}{\partial u} - F \frac{\partial}{\partial v} \right) + \mathbf{r}_2 \left(E \frac{\partial}{\partial v} - F \frac{\partial}{\partial u} \right) \right] \cdots \cdots (2)$$

依分配定則施於函數 ϕ 之結果, 當參數曲線為正交時 $F=0$ 及 $H^2=EG$; 故(2)化簡為:

$$\nabla = \frac{1}{E} r_1 \frac{\partial}{\partial u} + \frac{1}{G} r_2 \frac{\partial}{\partial v} \dots\dots\dots (3)$$

無論參數之取法如何, 算子 ∇ 及函數 $\nabla\phi$ 皆可以與 r_1, r_2, n 相逆之一系向量而簡單表出之, 此逆系 l, m, n 之定義如次:

$$Hl = r_2 \times n, \quad Hm = n \times r_1, \quad Hn = r_1 \times r_2.$$

由是關係得

$$\left. \begin{aligned} H^2 l &= r_2 \times (r_1 \times r_2) = Gr_1 - Fr_2 \\ H^2 m &= (r_1 \times r_2) \times r_1 = Er_2 - Fr_1 \end{aligned} \right\},$$

故 ϕ 之梯度可書為

$$\nabla\phi = l \frac{\partial\phi}{\partial u} + m \frac{\partial\phi}{\partial v} \dots\dots\dots (4)$$

及算子 ∇ 可書為

$$\nabla = l \frac{\partial}{\partial u} + m \frac{\partial}{\partial v} \dots\dots\dots (5)$$

若 θ 為 S 上之一點函數, 及 $f(\theta)$ 為 θ 之一函數, 則依(1)或(4)之定義即得

$$\nabla f(\theta) = f'(\theta) \nabla\theta \dots\dots\dots (6)$$

同理若 $f(\theta, \phi, \psi, \dots\dots)$ 為多個點函數 $\theta, \phi, \psi, \dots\dots$ 之函數, 則

$$\nabla f(\theta, \phi, \psi, \dots\dots) = \frac{\partial f}{\partial \theta} \nabla\theta + \frac{\partial f}{\partial \phi} \nabla\phi + \dots\dots \dots (7)$$

算子 $c \cdot \nabla$ 亦可應用於向量點函數 u , 而得 u 在單位向量 c 之方向之導微函數, 由是由(5)得

$$\mathbf{c} \cdot \nabla u = (\mathbf{c} \cdot \mathbf{l}) \frac{\partial u}{\partial u} + (\mathbf{c} \cdot \mathbf{m}) \frac{\partial u}{\partial v}.$$

又 $\mathbf{c} \cdot \nabla u$ 視為 u 在 $\mathbf{c}$ 之方向變率之意義雖僅當 $\mathbf{c}$ 為與曲面相切及為單位向量時為可應用，但今後對 $\mathbf{c}$ 之一切諸值，函數 $\mathbf{c} \cdot \nabla u$ 之意義對 $\mathbf{c}$ 之任何值皆由上之方程式以定之，特例若 $\mathbf{c}$ 為曲面之正線則 $\mathbf{c} \cdot \nabla u$ 等於零。

2. 向量之散度與旋度 算子 ∇ 可以不相同之諸法施之於一向量函數，其一之結果為一數量函數，曰 $\mathbf{u}$ 之散度 (Divergence) 而以 $\text{div } \mathbf{u}$ 或 $\nabla \cdot \mathbf{u}$ 表之，此散度之意義為

$$\text{div } \mathbf{u} = \mathbf{l} \cdot \mathbf{u}_1 + \mathbf{m} \cdot \mathbf{u}_2 = H^{-1} [\mathbf{r}_1 \cdot (G\mathbf{u}_1 - F\mathbf{u}_2) + \mathbf{r}_2 \cdot (E\mathbf{u}_2 - F\mathbf{u}_1)] \dots (8)$$

其值對參數 u, v 之選取為不變，同法， ∇ 又可施之於 $\mathbf{u}$ 得一向量微分不變量，曰 $\mathbf{u}$ 之旋度 (Rotation 或 Curl)，以 $\text{rot } \mathbf{u}$, $\text{curl } \mathbf{u}$ 或 $\nabla \times \mathbf{u}$ 表之，此旋度之意義為

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{u} &= \mathbf{l} \times \mathbf{u}_1 + \mathbf{m} \times \mathbf{u}_2 \\ &= H^{-1} [\mathbf{r}_1 \times (G\mathbf{u}_1 - F\mathbf{u}_2) + \mathbf{r}_2 \times (E\mathbf{u}_2 - F\mathbf{u}_1)], \dots (9) \end{aligned}$$

在本書中將用符號 $\text{rot } \mathbf{u}$ 而不用 $\text{curl } \mathbf{u}$ 。

曲面之單位正線向量 $\mathbf{n}$ 為一重要之點函數，由上述諸公式易證 (參閱微分幾何 §§ 116, 118):

$$\text{div } \mathbf{n} = -J, \quad \text{rot } \mathbf{n} = \mathbf{0}, \dots (10)$$

其中 J 為曲面之第一曲率 (或中曲率 Mean curvature)。同理對任何垂直於曲面之向量 $\phi \mathbf{n}$ 得

$$\text{div } \phi \mathbf{n} = -J\phi, \quad \text{rot } \phi \mathbf{n} = \nabla \phi \times \mathbf{n}, \dots (11)$$

而對任何切線向量 $P\mathbf{r}_1 + Q\mathbf{r}_2$ 得