大學叢書

曲面幾何

維舍本著
周紹濂譯

商務印書館出版

大學叢書

曲面幾何

維含本著
周紹濂譯

商務印書館出版

(55133)

大學叢書

曲面幾何

Differential Geometry of three dimensions Vol. II

著者 C. E. Weatherburn

譯述者 紹濂

出版者 商務印書館
上海河南中路二一一號

發行者 中國圖書發行公司
由中華 商務 開明 聯營聯合組織
北京絨線胡同六十六號

發行所 聯營書店 中華書局
商務印書館 開明書店
各地分店

印刷者 商務印書館印刷廠

自非歐幾何發明以來，空間觀念，爲之一變；自相對論發明以來，宇宙觀念，又爲之一變．近二十餘年來，學者正從事於構造一新空間，足以包含各種現象者，則以根據萊維西維太之平行移位者爲近（見本書第九章）．故曲面幾何匪惟專治數學者所宜讀，卽研究物理學者與哲學者，亦未可忽之也．周紹濂教授爲幾何名家，且勤於著述，所譯 Weatherburn 之曲面幾何，繁簡適中，且附習題，足資練習，又純用向量，最富綜合性．初讀時雖闕幾何直覺，一旦貫通，抽象力必大爲增強，因以創造新理，豈不盛哉．且讀此書時，必與解析幾何，微分幾何，黎曼幾何等相輔而行，乃更有興趣．而周君皆有成稿（見譯者序）．誠能盡量印行，用饗讀者，以破著述界之寂寞，亦一快也．

民國三十三年　　何魯識

譯 者 序

余自歐遊歸來，六載於茲，先後講授幾何於國立山東大學，國立中央大學及重慶大學．嘗思以有系統之著述介紹斯學於國人之前，爰於課餘編譯解析幾何，微分幾何，黎曼幾何，曲面幾何，線彙幾何，點集幾何，形勢幾何諸稿；意在以解析幾何爲學習之初階，繼之以微分幾何，再以黎曼幾何，曲面幾何爲進修之津梁，然後以線彙幾何，點集幾何，形勢幾何指示研究之途徑．微分幾何與黎曼幾何曾分別送大學用書編輯委員會與國立編譯館出版．本書乃譯自英國 C. E. Weatherburn 教授所著之 "Differential Geometry of Three Dimensions, Vol. II." 全書計十三章，內容重在論述曲面線族之特性，曲面族之變形，表示法，彎曲性，可貼合性，以及三重正交曲面系等，故取名爲曲面幾何．其第四章爲微分幾何中直紋面與 W 曲面之補篇，第九章爲萊維西維太對於曲面平行移位之簡單說明及其對曲線捷比西夫系之若干應用，最後一章論曲紋線彙之有關曲面乃將直紋線彙與圓紋線彙之理論作一般之敍述也．值茲時艱，人事多變，深慮稿件遺失，是以倉猝付梓，如讀者因此而增進其研究幾何之興趣，則幸甚矣！

一九四二年七月　　周紹濂於沙坪壩

目　　錄

曲 面 幾 何

第一章　曲面上之微分不變量

1. 數量函數之梯度・導微函數　微分幾何第十二章所論之微分不變量，在本書頗關重要．為引起讀者注意起見，茲將諸重要特性及公式彙敘述於後．

數量點函數 ϕ 在已知曲面上之梯度 (Gradient) 為一向量，以 $\nabla\phi$ 表之；其於任意點 P 之方向為在曲面上使 ϕ 增加有極大之弧變率(arc rate) 之方向，其大小卽此增加弧變率之極大值．由是此乃曲面上之一向量點函數．ϕ 在任何方向之導微函數或增加之變率為 $\nabla\phi$ 在此方向之分量．故當 $\mathbf{c}$ 為在 P 點之單位曲面向量，卽平行於 P 點之切面之單位向量，則 ϕ 在 $\mathbf{c}$ 之方向之導微函數之值為 $\mathbf{c}\cdot\nabla\phi$，用曲面上任何相宜之參數 u,v 及相當之一階基本量 E,F,G，則 ϕ 之梯度可表為(參閱微分幾何 § 114)：

$$\nabla\phi=H^{-2}[(G\phi_1-F\phi_2)\mathbf{r}_1+(E\phi_2-F\phi_1)\mathbf{r}_2]\cdots\cdots\cdots(1)$$

其中 $\mathbf{r}$ 為曲面上動點 P 之位置向量，又下誌 1,2 依次表對 u 與 v 之偏導微函數．由是 $\nabla\phi$ 可視為向量微分算子

$$\nabla=\frac{1}{H^2}\left[\mathbf{r}_1\left(G\frac{\partial}{\partial u}-F\frac{\partial}{\partial v}\right)+\mathbf{r}_2\left(E\frac{\partial}{\partial v}-F\frac{\partial}{\partial u}\right)\right]\cdots\cdots\cdots(2)$$

依分配定則施於函數 ϕ 之結果,當參數曲線爲正交時 $F=0$ 及 $H^2=EG$;故(2)化簡爲:

$$\nabla=\frac{1}{E}\mathbf{r}_1\frac{\partial}{\partial u}+\frac{1}{G}\mathbf{r}_2\frac{\partial}{\partial v}.\qquad\cdots\cdots(3)$$

無論參數之取法如何,算子 ∇ 及函數 $\nabla\phi$ 皆可以與 $\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\mathbf{n}$ 相逆之一系向量而簡單表出之.此逆系 $\mathbf{l},\mathbf{m},\mathbf{n}$ 之定義如次:

$$H\mathbf{l}=\mathbf{r}_2\times\mathbf{n},\quad H\mathbf{m}=\mathbf{n}\times\mathbf{r}_1,\quad H\mathbf{n}=\mathbf{r}_1\times\mathbf{r}_2.$$

由是關係得

$$\left.\begin{aligned}H^2\mathbf{l}&=\mathbf{r}_2\times(\mathbf{r}_1\times\mathbf{r}_2)=G\mathbf{r}_1-F\mathbf{r}_2\\H^2\mathbf{m}&=(\mathbf{r}_1\times\mathbf{r}_2)\times\mathbf{r}_1=E\mathbf{r}_2-F\mathbf{r}_1\end{aligned}\right\},$$

故 ϕ 之梯度可書爲

$$\nabla\phi=\mathbf{l}\frac{\partial\phi}{\partial u}+\mathbf{m}\frac{\partial\phi}{\partial v}\qquad\cdots\cdots(4)$$

及算子 ∇ 可書爲

$$\nabla=\mathbf{l}\frac{\partial}{\partial u}+\mathbf{m}\frac{\partial}{\partial v}.\qquad\cdots\cdots(5)$$

若 θ 爲 S 上之一點函數,及 $f(\theta)$ 爲 θ 之一函數,則依(1)或(4)之定義卽得

$$\nabla f(\theta)=f'(\theta)\nabla\theta\qquad\cdots\cdots(6)$$

同理若 $f(\theta,\phi,\psi,\cdots\cdots)$ 爲多個點函數 $\theta,\phi,\psi,\cdots\cdots$ 之函數,則

$$\nabla f(\theta,\phi,\psi,\cdots\cdots)=\frac{\partial f}{\partial\theta}\nabla\theta+\frac{\partial f}{\partial\phi}\nabla\phi+\cdots\cdots.\qquad\cdots\cdots(7)$$

算子 $\mathbf{c}\cdot\nabla$ 亦可應用於向量點函數 $\mathbf{u}$,而得 $\mathbf{u}$ 在單位向量 $\mathbf{c}$ 之方向之導微函數.由是由(5)得

$$\mathbf{c}\cdot\nabla\mathbf{u}=(\mathbf{c}\cdot\mathbf{l})\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial u}+(\mathbf{c}\cdot\mathbf{m})\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial v}.$$

又 $\mathbf{c}\cdot\nabla\mathbf{u}$ 視爲 $\mathbf{u}$ 在 $\mathbf{c}$ 之方向變率之意義雖僅當 $\mathbf{c}$ 爲與曲面相切及爲單位向量時爲可應用．但今後對 $\mathbf{c}$ 之一切諸値，函數 $\mathbf{c}\cdot\nabla\mathbf{u}$ 之意義對 $\mathbf{c}$ 之任何値皆由上之方程式以定之．特例若 $\mathbf{c}$ 爲曲面之正線則 $\mathbf{c}\cdot\nabla\mathbf{u}$ 等於零．

2．向量之散度與旋度　算子 ∇ 可以不相同之諸法施之於一向量函數．其一之結果爲一數量函數，曰 $\mathbf{u}$ 之散度(Divergence)而以 $\mathrm{div}\,\mathbf{u}$ 或 $\nabla\cdot\mathbf{u}$ 表之，此散度之意義爲

$$\mathrm{div}\,\mathbf{u}=\mathbf{l}\cdot\mathbf{u}_1+\mathbf{m}\cdot\mathbf{u}_2=H^{-2}[\mathbf{r}_1\cdot(G\mathbf{u}_1-F\mathbf{u}_2)+\mathbf{r}_2\cdot(E\mathbf{u}_2-F\mathbf{u}_1)]\cdots(8)$$

其値對參數 u,v 之選取爲不變．同法，∇ 又可施之於 $\mathbf{u}$ 得一向量微分不變量，曰 $\mathbf{u}$ 之旋度(Rotation 或 Curl)，以 $\mathrm{rot}\,\mathbf{u}$，$\mathrm{curl}\,\mathbf{u}$ 或 $\nabla\times\mathbf{u}$ 表之，此旋度之意義爲

$$\begin{aligned}\mathrm{rot}\,\mathbf{u}&=\mathbf{l}\times\mathbf{u}_1+\mathbf{m}\times\mathbf{u}_2\\&=H^{-2}[\mathbf{r}_1\times(G\mathbf{u}_1-F\mathbf{u}_2)+\mathbf{r}_2\times(E\mathbf{u}_2-F\mathbf{u}_1)].\end{aligned}\cdots\cdots(9)$$

在本書中將用符號 $\mathrm{rot}\,\mathbf{u}$ 而不用 $\mathrm{curl}\,\mathbf{u}$．

曲面之單位正線向量 $\mathbf{n}$ 爲一重要之點函數．由上述諸公式易證(參閱微分幾何 §§ 116，118)：

$$\mathrm{div}\,\mathbf{n}=-J,\qquad \mathrm{rot}\,\mathbf{n}=0,\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(10)$$

其中 J 爲曲面之第一曲率(或中曲率 Mean curvature)．同理對任何垂直於曲面之向量 $\phi\mathbf{n}$ 得

$$\mathrm{div}\,\phi\mathbf{n}=-J\phi,\qquad \mathrm{rot}\,\phi\mathbf{n}=\nabla\phi\times\mathbf{n},\cdots\cdots\cdots\cdots(11)$$

而對任何切線向量 $P\mathbf{r}_1+Q\mathbf{r}_2$，得