矿山三角測量分組平差法

A. И. 柯貝林著

测绘出版社

矿山三角测量分組平差法

А. И. 柯貝林著

高鳳治 吳永义 譯

胡　明　城　　校

測繪出版社

1957·北京

А. И. КОБЫЛИН

ГРУППОВОЕ УРАВНИВАНИЕ РУДНИЧНОЙ ТРИАНГУЛЯЦИИ

Металлургиздат

Москва 1955

本書論述了矿山三角測量的一些簡單分組平差法。应用这些方法，可以減輕和加速測量工作中的計算过程。

本書可作为矿山測量的工作指南，以及矿業学院学生的参考書。

矿山三角測量分組平差法

著　者　A. И. 柯 貝 林

譯　者　高鳳治　吳永义

出版者　測 繪 出 版 社

北京宣武門外永光寺西街1号

北京市書刊出版業營業許可証出字第081号

發行者　新 華 書 店

印刷者　地 質 印 刷 厂

北京廣安門內教子胡同甲32号

編輯：張宝山　技術編輯：李鑿如　校对：白权鈞

印数(京)1—3,650册　1957年6月北京第1版

开本$31'' \times 43''\,{}^{1}/_{18}$　1957年6月第1次印刷

字数170,000字　印張$7^{11}/_{18}$

定价(10)1.00元

目　錄

序　言

在主要的測量工作中，平差計算是一件非常重要而且費力的工作。

簡化平差計算就会使測量工作更快更容易的完成。

書中論述了礦山測量工作者在实际工作当中采用的許多簡單的三角網平差法。

第一章　等精度观测的兩組平差法

§1. 兩組平差法的基本知識

兩組平差法的本質，是把需要解算的条件方程式系分为兩組，并分别解算每一組。同时必須保持这样一个条件，以便所構成的兩組方程式的解算結果和用最小二乘法一併解算所有方程式的結果一致。

为此必須这样來改化第二組方程式，即要使未改化的第一組方程式与已改化的第二組方程式的解算結果，和一併解算所有方程式的結果一样。

設已知条件方程式系，并把它任意分成兩組。把 t 个方程式列入第一組，把 η 个方程式列入第二組：

第　一　組

$$\left.\begin{aligned}
&a_1\delta_1+a_2\delta_2+\cdots\cdots\cdots\cdots+a_n\delta_n+v_1=0;\\
&b_1\delta_1+b_2\delta_2+\cdots\cdots\cdots\cdots+b_n\delta_n+v_2=0;\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&t_1\delta_1+t_2\delta_2+\cdots\cdots\cdots\cdots+t_n\delta_n+v_t=0.
\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

第　二　組

$$\left.\begin{aligned}
&\alpha_1\delta_1+\alpha_2\delta_2+\cdots\cdots\cdots\cdots\alpha_n\delta_n+w_1=0;\\
&\beta_1\delta_1+\beta_2\delta_2+\cdots\cdots\cdots\cdots\beta_n\delta_n+w_2=0;\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\eta_1\delta_1+\eta_2\delta_2+\cdots\cdots\cdots\cdots\eta_n\delta_n+w_\eta=0.
\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

假設我們已經知道了改化第二組方程式的規則，并把这一个方程式寫成下面的一般形式：

$$\left.\begin{aligned}
&A_1\delta_1+A_2\delta_2+\cdots\cdots\cdots\cdots A_n\delta\ +W_1=0;\\
&B_1\delta_1+B_2\delta_2+\cdots\cdots\cdots\cdots B_n\delta_n+W_2=0;\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&H_1\delta_1+H_2\delta_2+\cdots\cdots\cdots\cdots H_n\delta_n+W_H=0.
\end{aligned}\right\}\quad(3)$$

用最小二乘法一併解方程式（1）和（3），就得出下列的联系数法方程式系：

$$[aa]k_1+[ab]k_2+\cdots+[at]k_t+[aA]K_1+[aB]\ K_2+\cdots+[aH]K_H+v_1=0;$$
$$[ab]k_1+[bb]k_2+\cdots+[bt]k_t+[bA]K_1+[bB]\ K_2+\cdots+[bH]K_H+v_2=0;$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$[at]k_1+[bt]k_2+\cdots+[tt]k_t+[tA]K_1+[tB]K_2+\cdots+[tH]K_H+v_t=0; \quad (4)$$

$$[aA]k_1+[bA]k_2+\cdots+[tA]k_t+[AA]K_1+[AB]K_2+\cdots+[AH]K_H+$$
$$+W_1=0;$$
$$[aB]k_1+[bB]k_2+\cdots+[tB]k_t+[AB]K_1+[BB]K_2+\cdots+[BH]K_H+$$
$$+W_2=0;$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$[aH]k_1+[bH]k_2+\cdots+[tH]k_t+[AH]K_1+[BH]K_2+\cdots+[HH]K_H+$$
$$+W_H=0.$$

这时未知数 δ（改正数）的值可用下列公式确定：

$$\delta_i=a_ik_1+b_ik_2+\cdots+t_ik_t+A_iK_1+B_iK_2+\cdots+H_iK_H. \quad (5)$$

我們提出条件，使

$$[aA]=[bA]=\cdots\cdots=[tA]=0;$$
$$[aB]=[bB]=\cdots\cdots=[tB]=0; \quad (6)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$[aH]=[bH]=\cdots\cdots=[tH]=0.$$

那末方程式系（4）將变为互相独立的（7）和（8）兩組方程式的形式：

$$[aa]k_1+[ab]k_2+\cdots\cdots+[at]k_t+v_1=0;$$
$$[ab]k_1+[bb]k_2+\cdots\cdots+[bt]k_t+v_2=0; \quad (7)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$[at]k_1+[bt]k_2+\cdots\cdots+[tt]k_t+v_t=0$$

和

$$[AA]K_1+[AB]K_2+\cdots\cdots+[AH]K_H+W_1=0;$$
$$[AB]K_1+[BB]K_2+\cdots\cdots+[BH]K_H+W_2=0; \quad (8)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$[AH]K_1+[BH]K_2+\cdots\cdots+[HH]K_H+W_H=0.$$

很明顯，方程式（7）提供了第一組条件方程式（1）的联系数法方程式系。解方程式（7），可按下列公式得出所謂第一次改正数 δ_i' 的值：

$$\delta_i'=a_ik_1+b_ik_2+\cdots\cdots+t_ik_t. \quad (9)$$

方程式（8）提供了改化后的第二組条件方程式（3）的联系数法方程式系。解方程式（8），則可按下列公式得出所謂第二次改正数 δ_i'' 的值：

$$\delta_i''=A_iK_1+B_iK_2+\cdots\cdots+H_iK_H. \quad (10)$$

比較（5），（9）和（10），可知：

$$\delta_i=\delta_i'+\delta_i'', \quad (11)$$

也就是分开解（1）和（3）兩組方程式所得的改正数之和 $\delta_i'+\delta_i''$，等于一併解这些方程式所得的总改正数 δ_i。

現在我們討論一下，構成係数 $A, B, \cdots, H$ 和常数項 $W_1, W_2, \cdots\cdots W_H$ 的各項演算以及其实施的步驟。

为了求得（3）系的第一个方程式，需要把第一組方程式（1）分別乘以相应的不定乘数，$\rho_{1\cdot1}, \rho_{1\cdot2}, \cdots\cdots\rho_{1\cdot t}$，并將所得的乘積和第二組（2）的第一个方程式相加。

为了求得（3）系的第二个方程式，需要把第一組方程式（1）分別乘以相应的不定乘数 $\rho_{2\cdot1}, \rho_{2\cdot2}\cdots\cdots, \rho_{2\cdot t}$，并將所得的乘積和第二組（2）的第二个方程式相加。同样求得（3）系的所有方程式。

由上所述，可用下列公式求得 $A, B, \cdots\cdots, H$ 和 $W_1, W_2, \cdots\cdots W_H$ 的值：

$$
\begin{aligned}
A_i &= \alpha_i + a_i\rho_{1\cdot1} + b_i\rho_{1\cdot2} + \cdots\cdots + t_i\rho_{1\cdot t};\\
B_i &= \beta_i + a_i\rho_{2\cdot1} + b_i\rho_{2\cdot2} + \cdots\cdots + t_i\rho_{2\cdot t};\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
H_i &= {}_i\eta + a_i\rho_{\eta\cdot1} + b_i\rho_{\eta\cdot2} + \cdots\cdots + t_i\rho_{\eta\cdot t}.
\end{aligned}
\tag{12}
$$

和

$$
\begin{aligned}
W_1 &= w_1 + v_1\rho_{1\cdot1} + v_2\rho_{1\cdot2} + \cdots\cdots + v_t\rho_{1\cdot t};\\
W_2 &= w_2 + v_1\rho_{2\cdot1} + v_2\rho_{2\cdot2} + \cdots\cdots + v_t\rho_{2\cdot t};\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
W_H &= w_H + v_1\rho_{\eta\cdot1} + v_2\rho_{\eta\cdot2} + \cdots\cdots + v_t\rho_{\eta\cdot t}.
\end{aligned}
\tag{13}
$$

不定乘数 ρ 必須保持条件（6）來作选擇，为此，把（12）中的係数 $A, B, \cdots\cdots, H$ 的值代入方程式（6）。

代入后，方程式（6）的第一列即得：

$$
\begin{aligned}
&[aa]\rho_{1\cdot1} + [ab]\rho_{1\cdot2} + \cdots\cdots + [at]\rho_{1\cdot t} + [a\alpha] = 0;\\
&[ab]\rho_{1\cdot1} + [bb]\rho_{1\cdot2} + \cdots\cdots + [at]\rho_{1\cdot t} + [b\alpha] = 0;\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&[at]\rho_{1\cdot1} + [bt]\rho_{1\cdot2} + \cdots\cdots[tt]\rho_{1\cdot t} + [t\alpha] = 0.
\end{aligned}
\tag{14}
$$

方程式系（14）可以确定乘数 $\rho_{1\cdot1}, \rho_{1\cdot2}, \cdots\cdots, \rho_{1\cdot t}$.

方程式（6）的下一列，可以得出确定乘数 $\rho_{2\cdot1}, \rho_{2\cdot2}, \cdots\cdots, \rho_{2\cdot t}$ 的类似方程式系；同样，方程式（6）的最末一列，可以得出确定乘数 $\rho_{\eta\cdot1}, \rho_{\eta\cdot2}, \cdots\cdots, \rho_{\eta\cdot t}$ 的最后方程式系：

$$
\begin{aligned}
&[aa]\rho_{\eta\cdot1} + [ab]\rho_{\eta\cdot2} + \cdots\cdots + [at]\rho_{\eta\cdot t} + [a\eta] = 0;\\
&[ab]\rho_{\eta\cdot1} + [bb]\rho_{\eta\cdot2} + \cdots\cdots + [bt]\rho_{\eta\cdot t} + [b\eta] = 0;\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&[at]\rho_{\eta\cdot1} + [bt]\rho_{\eta\cdot2} + \cdots\cdots + [tt]\rho_{\eta\cdot t} + [t\eta] = 0.
\end{aligned}
\tag{15}
$$

比較方程式（14）、（15）和（7），就可以看出，如果用 $[i\alpha]$（确定乘数 $\rho_{1\cdot i}$），$[i\beta]$（确定乘数 $\rho_{2\cdot i}$）……相应地代替常数項 v，乘数 ρ 即可由第一組法

方程式（ 7 ）确定。这里的 i 依次采取 $a, b, \cdots\cdots, t$ 的值。

由以上所述，可知問題的解法在于進行下列的演算：

（ 1 ）解第一組条件方程式（ 1 ），用公式（ 9 ）确定第一次改正数 δ'_i；

（ 2 ）用公式（ 14 ）和（ 15 ）确定所有的 ρ 值，此时第二組中包括有多少个方程式，就要解算多少个方程式系；

（ 3 ）用公式（ 12 ）和（ 13 ）确定改化后的第二組方程式的係数值；

（ 4 ）解第二組方程式（ 3 ），并用公式（ 10 ）确定第二次改正数 δ_i''。

很明顯，如果采用兩組平差法如此進行演算，那末这个方法似乎是比一併平差法更繁重和更費力些。

但是我們知道，兩組平差法大大簡化了問題的解法。

§ 2. 問題的簡化，改化係数的規則

假如不任意將条件方程式分組，而按一定的規則分組，就会使問題簡化。其規則是把这样的方程式列入第一組，其中未知数的係数等于一，而且这些方程式中沒有共同的未知数。这时再考究一下一般公式是怎样变化的。在法方程式（ 7 ）中，所有非自乘的係数將等于零。

所以，方程式（ 7 ）变成下列形式：

$$
\begin{aligned}
&[aa]\,k_1 + v_1 = 0;\\
&[bb]\,k_2 + v_2 = 0;\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&[tt]\,k_t + v_t = 0.
\end{aligned}
\tag{16}
$$

其次，根据所有係数 $a, b, \cdots, t$ 等于一的条件，则由方程式（ 16 ）得：

$$
\begin{aligned}
&n_1 k_1 + v_1 = 0;\\
&n_2 k_2 + v_2 = 0;\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&n_t\, k_t + v_t = 0,
\end{aligned}
\qquad (17) \qquad 因而：\qquad
\begin{aligned}
&k_1 = -\frac{v_1}{n_1};\\
&k_2 = -\frac{v_2}{n_2};\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&k_t = -\frac{v_t}{n_t}.
\end{aligned}
\qquad (18)
$$

式中 n_t ——第 t 号方程式中未知数的个数。

第一組方程式（ 1 ）中第一式各未知数（改正数）的係数 a 均等于一。所以这些未知数彼此相等，并用下式确定：

$$\delta_{1_1} = -\frac{v_1}{n_1},$$

顯然，第一組方程式（1）中任一式 s 的改正数 δ_{1s} 可用下式确定；

$$\delta_{1s} = -\frac{v_s}{n_s} \quad , \tag{19}$$

也就是說，为了确定第一次改正数，必須把每个方程式中的常数項——閉合差 v_s 平均分配給所有未知数。

前面我們說过，如果把法方程式中的 v 各以相应的和 $[i\alpha]$, $[i\beta]$, ……, $[i\eta]$（i 依次由 a 到 t）代替，則乘数 ρ 即可由确定联系数 k 的公式來确定。

所以，根据（18）得：

$$\begin{array}{l|l|l}
\rho_{1\cdot 1} = -\dfrac{[a\alpha]}{n_1} & \rho_{2\cdot 1} = -\dfrac{[a\beta]}{n_1} & \rho_{\eta\cdot 1} = -\dfrac{[a\eta]}{n_1}; \\
\rho_{1\cdot 2} = -\dfrac{[b\alpha]}{n_2} & \rho_{2\cdot 2} = -\dfrac{[b\beta]}{n_2} & \rho_{\eta\cdot 2} = -\dfrac{[b\eta]}{n_2}; \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\
\rho_{1\cdot t} = -\dfrac{[t\alpha]}{n_t} & \rho_{2\cdot t} = -\dfrac{[t\beta]}{n_t} & \rho_{\eta\cdot t} = -\dfrac{[t\eta]}{n_t}.
\end{array} \tag{20}$$

因为 a, b …… t 等于一，所以方程式（20）的形式为：

$$\begin{array}{ll|l}
\rho_{1\cdot 1} = -\dfrac{[\alpha]_1}{n_1}, & \rho_{2\cdot 1} = -\dfrac{[\beta]_1}{n_1} & \rho_{\eta\cdot 1} = -\dfrac{[\eta]_1}{n_1}; \\
\rho_{1\cdot 2} = -\dfrac{[\alpha]_2}{n_2}, & \rho_{2\cdot 2} = -\dfrac{[\beta]_2}{n_2} & \rho_{\eta\cdot 2} = -\dfrac{[\eta]_2}{n_2}; \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\
\rho_{1\cdot t} = -\dfrac{[\alpha]_t}{n_t}, & \rho_{2\cdot t} = -\dfrac{[\beta]_t}{n_t} & \rho_{\eta\cdot t} = -\dfrac{[\eta]_t}{n_t},
\end{array} \tag{21}$$

式中 $[\alpha]_i$——第一，……各組第 i 个方程式內未知数的 α 之和。將方程式（21）代入（12）式則得：

$$\begin{aligned}
A_i &= \alpha_i - a_i \frac{[\alpha]_1}{n_1} - b_i \frac{[\alpha]_2}{n_2} - \cdots\cdots - t_i \frac{[\alpha]_t}{n_t}; \\
B_i &= \beta_i - a_i \frac{[\beta]_1}{n_1} - b_i \frac{[\beta]_2}{n_2} - \cdots\cdots - t_i \frac{[\beta]_t}{n_t}; \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
H_i &= \eta_i - a_i \frac{[\eta]_1}{n_1} - b_i \frac{[\eta]_2}{n_2} - \cdots\cdots - t_i \frac{[\eta]_t}{n_t}.
\end{aligned} \tag{22}$$

其次，要把所有方程式这样分成几个部分，就是使第一組的每个方程式各構成一个部分，并用 s 表示部分的号碼，則得：

$$A_{1s}=\alpha_{1s}-\frac{[\alpha]_s}{n_s};$$

$$B_{1s}=\beta_{1s}-\frac{[\beta]_s}{n_s}; \tag{23}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$H_{1s}=\eta_{1s}-\frac{[\eta]_s}{n_s}.$$

如果第一組中任何一个方程式內都不包含某一未知数，則根据方程式(22)得：

$$A_i=\alpha_i;$$

$$B_i=\beta_i; \tag{23a}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$H_i=\eta_i.$$

因为此时 $a_i, b_i, \cdots\cdots t_i$ 都等于零。

如果把改化后的係数分别按部分加起來，則得檢驗公式：

$$_s[A]=0;$$

$$_s[B]=0;$$

$$\vdots \tag{24}$$

$$_s[H]=0.$$

如果公式（23）中表以記号：

$$_s\Delta A_i=-\frac{[\alpha]_s}{n_s};$$

$$_s\Delta B_i=-\frac{[\beta]_s}{n_s}; \tag{25}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$_s\Delta H=-\frac{[\eta]_s}{n_s}$$

并把（25）和公式（19）加以比較，就可以看出，如果各以 $[\alpha]_s$，$[\beta]_s \cdots [\eta]_s$ 代替（19）式中的 v_s，則 ΔA，$\Delta B, \cdots, \Delta H$ 的式子即可由公式（19）來确定。

改化係数的規則　根据方程式(23)，就可構成改化第二組方程式係数的規則：改化后的係数等于未改化的係数減去算術平均值。

換言之，改化后的係数是未改化的係数与相应部分的算術平均值之差。

如果第二組方程式是由第一次改正后的观測值(角度)組成的，則第二組方程式的常数項用不着依公式(13)改化。因为这时所有的 v 都等于零，故在公式(13)中：

$$W_1=w_1. \tag{26}$$

用一般方法解算由改化后的第二組条件方程式所得出的方程式系（8），然后

用公式（10）确定第二次改正数。如果把公式（12）乘以 A_i 并按每个方程式計算总和，然后再把方程式（12）乘以 B_i 并也按每个方程式計算总和，即得出确定法方程式（8）的係数的簡化公式。用所有係数進行相似演算的結果，即得等式系：

$$\left|\begin{array}{l} [AA]=[A\alpha] \\ [AB]=[A\beta] \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ [AH]=[A\eta] \end{array}\right| \begin{array}{l} [AB]=[B\alpha] \\ [BB]=[B\beta] \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ [BH]=[B\eta] \end{array} \left|\vdots\right| \begin{array}{l} [AH]=[H\alpha]; \\ [BH]=[H\beta]; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ [HH]=[H\eta]. \end{array}\right| \qquad (27)$$

由等式（27）可以看出，每个总和所有各項的乘数中有一个可以取作未改化的係数。因为未改化的係数經常小于改化后的係数，故用公式(27)計算法方程式（8）的係数更为容易。

§ 3. 計 算 步 驟

根据以上所述，必須遵循下列計算步驟：

（а）將条件方程式分为兩組，把沒有共同未知数的并且係数等于＋1的方程式列在第一組。

（б）由公式（19）确定第一次改正数。

（в）由改正过的观测值（角度）組成第二組方程式。

（г）根据公式（23）和（23а）改化第二組方程式的係数。

（д）解算改化后的第二組方程式，并用公式（10）确定第二次改正数。

§ 4. 平差值函数权的确定

設已知平差值的函数：

$$F(1+\delta_1,\ 2+\delta_2\cdots\cdots n+\delta_n),$$

式中 1，2……n——观测值（角）；

δ_1，δ_2……δ_n——观测值的最或然改正数。

我們知道，平差值函数的中誤差由下列公式确定：

$$m_F=\frac{\mu}{\sqrt{P_F}}, \qquad (28)$$

式中 μ——單位权的中誤差；

P_F——已知函数的权。

單位权中誤差由下列公式确定：

$$\mu=\sqrt{\frac{[\delta\delta]}{r}}, \qquad (29)$$

式中 r ——条件方程式的个数。

为了确定权 P_F，必須把已知函数 F 用直接观测値表示。为此，把已知函数展开成泰勒級数：

$$F = F_0 + \lambda_1 \delta_1 + \lambda_2 \delta_2 + \cdots\cdots + \lambda_n \delta_n, \tag{30}$$

式中 $F_0 = F(1,2 \cdots\cdots n)$；

$$\lambda_i = \left(\frac{\partial F}{\partial i}\right). \tag{31}$$

然而

$$\delta_i = \delta_i' + \delta_i'',$$

所以

$$F = F_0 + \lambda_1 \delta_1' + \lambda_2 \delta_2' + \cdots\cdots + \lambda_n \delta_m' + \lambda_1 \delta_1'' + \lambda_2 \delta_2'' + \cdots\cdots \lambda_n \delta''. \tag{32}$$

把（9）和（10）式中改正数的値代入方程式（32）的右部，則得：

$$F = F_0 + [a\lambda] k_1 + [b\lambda] k_2 + \cdots\cdots + [t\lambda] k_t + [A\lambda] K_1 + [B\lambda] K_2 + \cdots\cdots + [H\lambda] K_\eta. \tag{33}$$

必須由方程式（33）消除联系数，因为它們不是互相独立的量。

为此，把方程式系（7）分别乘以不定乘数 π_i，把方程式系（8）分别乘以不定乘数 Π_i，然后再把这兩系方程式加在方程式（33）中。

即得：

$$\begin{aligned} F = {} & F_0 + [a\lambda] k_1 + [b\lambda] k_2 + \cdots\cdots + [t\lambda] k_t + [A\lambda] K_1 + [B\lambda] K_2 + \cdots\cdots + \\ & + [H\lambda] K_\eta + ([aa] k_1 + [ab] k_2 + \cdots\cdots [at] k_t) \pi_1 + ([AA] K_1 + [AB] K_2 + \\ & + \cdots\cdots + [AH] K_\eta) \Pi_1 + ([ab] k_1 + [bb] k_2 + \cdots\cdots + [bt] k_t) \pi_2 + ([AB] K_1 + \\ & + [BB] K_2 + \cdots\cdots + [BH] K_\eta) \Pi_2 + \cdots\cdots\cdots\cdots + \\ & + ([at] k_1 + [bt] k_2 + \cdots\cdots + [tt] k_t) \pi_t + ([AH] K_1 + [BH] K_2 + \\ & + \cdots\cdots + [HH] K_\eta) \pi_\eta + v_1 \pi_1 + v_2 \pi_2 + \cdots\cdots v_t \pi_t + W_1 \Pi_1 + W_2 \Pi_2 + \\ & + \cdots\cdots\cdots W_\eta \Pi_\eta. \end{aligned} \tag{34}$$

改化（34）式，由括号内提出联系数：

$$\begin{aligned} F = {} & F_0 + \{[aa] \pi_1 + [ab] \pi_2 + \cdots\cdots + [at] \pi_t + [a\lambda]\} k_1 + \{[AA] \Pi_1 + \\ & + [AB] \Pi_2 + \cdots\cdots + [AH] \Pi_\eta + [A\lambda]\} K_1 + \{[ab] \pi_1 + [bb] \pi_2 + \cdots\cdots + \\ & + [bt] \pi_t + [b\lambda]\} k_2 + \{[AB] \Pi_1 + [BB] \Pi_2 + \cdots\cdots + [BH] \Pi_\eta + \\ & + [B\lambda]\} K_2 \cdots\cdots\cdots\cdots + \\ & + \{[at] \pi_1 + [bt] \pi_2 + \cdots\cdots + [tt] \pi_t + [t\lambda]\} k_t + \{[AH] \Pi_1 + \\ & + [BH] \Pi_2 + \cdots\cdots + [HH] \Pi_\eta + [H\lambda]\} K_\eta + v_1 \pi_1 + v_2 \pi_2 + \cdots\cdots + \\ & + v_t \pi_t + W_1 \Pi_1 + W_2 \Pi_2 + \cdots\cdots + W_\eta \Pi_\eta. \end{aligned} \tag{35}$$

利用各乘数的不定性，确立这样的条件，即使方程式（35）中大括号里的每一个式子都等于零，也就是：

$$
\begin{aligned}
&[aa]\pi_1+[ab]\pi_2+\cdots\cdots+[at]\pi_t+[a\lambda]=0;\\
&[ab]\pi_1+[bb]\pi_2+\cdots\cdots+[bt]\pi_t+[b\lambda]=0;\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&[at]\pi_1+[bt]\pi_2+\cdots\cdots+[tt]\pi_t+[t\lambda]=0;
\end{aligned}
\tag{36}
$$

和

$$
\begin{aligned}
&[AA]\Pi_1+[AB]\Pi_2+\cdots\cdots+[AH]\Pi_\eta+[A\lambda]=0;\\
&[AB]\Pi_1+[AB]\Pi_2+\cdots\cdots+[BH]\Pi_\eta+[B\lambda]=0;\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&[AH]\Pi_1+[BH]\Pi_2+\cdots\cdots+[HH]\Pi_\eta+[H\lambda]=0.
\end{aligned}
\tag{37}
$$

这时

$$
\begin{aligned}
F=F_0+v_1\pi_1+v_2\pi_2+\cdots\cdots+v_t\pi_t+W_1\Pi_1+\\
+W_2\Pi_2+\cdots\cdots+W_\eta\Pi_\eta.
\end{aligned}
\tag{38}
$$

將下列誤差理論公式运用于函数（38）：

$$
\frac{1}{P_F}=\left(\frac{\partial F}{\partial I}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial II}\right)^2+\cdots\cdots+\left(\frac{\partial F}{\partial N}\right)^2,
\tag{39}
$$

式中

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial F}{\partial I}=\lambda_1+a_1\pi_1+b_1\pi_2+\cdots\cdots+t_1\pi_t+A_1\Pi_1+B_1\Pi_2+\cdots\cdots+H_1\Pi_\eta;\\
&\frac{\partial F}{\partial II}=\lambda_2+a_2\pi_1+b_2\pi_2+\cdots\cdots+t_2\pi_t+A_2\Pi_1+B_2\Pi_2+\cdots\cdots+H_2\Pi_\eta;\\
&\frac{\partial F}{\partial N}=\lambda_n+a_n\pi_1+b_n\pi_2+\cdots\cdots+t_n\pi_t+A_n\Pi_1+B_n\Pi_2+\cdots\cdots+H_n\Pi_\eta.
\end{aligned}
\tag{40}
$$

我們引用符号：

$$
\begin{aligned}
&\Lambda_1=\lambda_1+a_1\pi_1+b_1\pi_2+\cdots\cdots+t_1\pi_t;\\
&\Lambda_2=\lambda_2+a_2\pi_1+b_2\pi_2+\cdots\cdots+t_2\pi_t;\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\Lambda_n=\lambda_n+a_n\pi_1+b_n\pi_2+\cdots\cdots+t_n\pi_t.
\end{aligned}
\tag{41}
$$

很明顯，公式（41）类似于公式（12），公式（36）类似公式（14），正像由公式（12）演变到（23）一样，我們可以由公式（41）演变成新的公式：

$$
\Lambda_{ts}=\lambda_{ts}-\frac{[\lambda]_s}{n_s}.
\tag{42}
$$

由公式（42）可以看出，改化权函数的係数，可用改化第二組方程式係数的規則進行。

把方程式（41）代入（40），即得：

$$\frac{\partial F}{\partial I}=\Lambda_1+A_1\Pi_1+B_1\Pi_2+\cdots\cdots+H_1\Pi\eta;$$
$$\frac{\partial F}{\partial II}=\Lambda_2+A_2\Pi_1+B_2\Pi_2+\cdots\cdots+H_2\Pi\eta; \tag{43}$$
$$\frac{\partial F}{\partial N}=\Lambda_n+A_n\Pi_1+B_n\Pi_2+\cdots\cdots+H_n\Pi\eta.$$

將（43）中的每一方程式自乘，并总合起來，則得：

$$\begin{aligned}\frac{1}{P_F}=&[\Lambda\Lambda]+\{[AA]\Pi_1+[AB]\Pi_2+\cdots\cdots+[AH]\Pi\eta+[A\Lambda]\}\Pi_1+\\&+\{[AB]\Pi_1+[BB]\Pi_2+\cdots\cdots+[BH]\Pi\eta+[B\Lambda]\}\Pi_2+\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\&+\{[AH]\Pi_1+[BH]\Pi_2+\cdots\cdots+[HH]\Pi\eta+[H\Lambda]\}\Pi\eta+\\&+[A\Lambda]\Pi_1+[B\Lambda]\Pi_2+\cdots\cdots+[H\Lambda]\Pi\eta.\end{aligned} \tag{44}$$

此外，把公式（41）依次乘以 A_i，$B_i\cdots\cdots H_i$，并將乘積加起來，則得：

$$\begin{aligned}&[A\Lambda]=[A\lambda];\\&[B\Lambda]=[B\lambda];\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\\&[H\Lambda]=[H\lambda].\end{aligned} \tag{45}$$

根据公式（37），方程式（44）中大括号里边的每个式子都等于零。因而：

$$\frac{1}{P_F}=[\Lambda\Lambda]+[A\lambda]\Pi_1+[B\lambda]\Pi_2+\cdots\cdots+[H\lambda]\Pi\eta. \tag{46}$$

用最小二乘法把公式（46）中的 Π 消去后，即得：

$$\frac{1}{P_F}=[\Lambda\Lambda]-\frac{[A\lambda]^2}{[AA]}-\frac{[B\lambda\cdot1]^2}{[BB\cdot1]}\cdots\cdots\frac{[H\lambda\cdot\eta-1]^2}{[HH\cdot\eta-1]}. \tag{47}$$

我們証明 $[\Lambda\Lambda]=[\Lambda\lambda]$。为此，把公式（41）乘以相应的 Λ_i 并总合起來，得：

$$[\Lambda\Lambda]=[\Lambda\lambda]+[a\Lambda]\pi_1+[bA]\pi_2+\cdots\cdots+[t\Lambda]\pi_t. \tag{48}$$

如把方程式（41）乘以相应的 a_i，相加起來后，則得：

$$[a\Lambda]=[a\lambda]+[aa]\pi_1+[ab]\pi_2+\cdots\cdots[at]\pi_t.$$

根据公式（36）：

$$[a\Lambda]=0.$$

同理得：

$$[b\Lambda]=0;$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$