科学版

大学物理习题精解系列

大学物理典型题详解

张孝林 徐忠锋 主编

科学出版社
www.sciencep.com

内 容 简 介

本书从国内外教材及各种物理考题中选编了250道难易程度不同的题目，与大学物理课程的内容相对应。全书分为17章，每章均由“目的与要求”、“内容提要”、“典型例题”以及“习题”四部分组成，可以帮助学生复习和巩固所学的知识，加深他们对内容的理解，培养他们解决实际问题的能力。

本书可以作为学生考试的复习资料、自学辅导用书，物理教师的参考书使用。

图书在版编目(CIP)数据

大学物理典型题详解/张孝林，徐忠锋主编. —北京：科学出版社，2003
（大学物理习题精解系列）
ISBN 7-03-011002-1

Ⅰ.大… Ⅱ.①张…②徐… Ⅲ.物理学-高等学校-解题 Ⅳ.O4-44

中国版本图书馆CIP数据核字（2002）第099887号

责任编辑：鄢德平 胡 凯/责任校对：吴伶伶
责任印制：安春生/封面设计：王 浩

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
双青印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2003年2月第 一 版 开本：B5（720×1000）
2003年2月第一次印刷 印张：22 1/2
印数：1—5 000 字数：434 000

定价：26.00元

（如有印装质量问题，我社负责调换〈环伟〉）

前　言

大学物理是工科学生的一门重要基础课,对培养和提高学生的科学素质,科学思维方法及科学研究能力具有重要的作用。要学好大学物理,独立认真地做一定量的习题非常必要。通过做习题,不但可以帮助学生复习和巩固所学的知识,而且可以对其加深理解,扩大学习的知识面,达到培养学生运用所学原理解决实际问题能力的目的。为此我们编写了这本书,期望能对学习大学物理的学生有所帮助。本书可作为学生的辅导自学用书,也可供物理教师参考。

本书分为 17 章,包括了大学物理课程的内容。每章均由“目的与要求”、“内容提要”、“典型例题”以及“习题”四部分组成,在前两部分简单地介绍了各章的教学要求、教学重点、主要的物理概念、物理规律和主要公式,供学生复习和做习题时参考。“典型例题”部分是本书的重点,考虑到各种层次的学生,本书从国内外教材及各种物理考题中编选了 250 多道不同难易程度的题目。在典型例题中除了“题”和“解”之外,针对每道题还编写了“分析”和“说明”两个内容。在求解典型例题之前,首先对题目进行定性的物理分析,分析题意、分析涉及的现象和过程。通过分析判定问题的性质,明确物理量之间的关系,确定解题的关键,正确选择对应的物理规律,确立解题的步骤和方法。在解完每道典型例题之后,通过“说明”的形式总结归纳在求解过程中所涉及到的解决实际问题的方法和技巧,讨论在实际问题中所表现出的各种物理规律和结论。很明显,分析和说明是典型例题的两个重要部分,有些时候,它们甚至比实际的解题过程更重要。通过“分析”可以加深对基本内容的理解,提高分析和判断问题的能力;通过“说明”进行总结往往可以起到画龙点睛、举一反三的作用。希望读者在使用本书时能先看题目,不看分析和解答,试着自己独立求解,然后再看分析和解题过程,通过分析和思考,提高应用物理原理分析问题和解决问题的能力。

参加本书编写的有田蓬勃(第 1 章、第 2 章、第 3 章)、苏亚凤(第 4 章、第 6 章、第 7 章)、王瑞敏(第 5 章)、张孝林(第 8 章、第 9 章)、刘丹东(第 10 章、第 11 章)、刘平(第 12 章、第 13 章)、喻有理(第 14 章、第 15 章)、徐忠锋(第 16 章、第 17 章)。张孝林和徐忠锋共同对全书进行了统稿。李普选用计算机为本书绘制了全部的插图。

本书在编写的过程中得到了西安交通大学吴百诗教授的关怀和悉心指导,得到了西安交通大学教务处和科学出版社的大力支持,在此我们谨致以衷心的感谢。

由于编者学识有限,书中难免存在这样或那样的疏漏和不妥,还望使用本书的读者指正。

编　者

2002 年 7 月

目　　录

第1章　质点运动学

一、目的与要求

1. 确切理解描述质点运动及运动变化的基本物理量；掌握位置矢量、位移、速度、加速度的定义及性质，明确这些物理量的矢量性、相对性和速度、加速度的瞬时性。

2. 熟练掌握质点运动学两类问题，即用微分方法由已知的运动学方程求速度、加速度；用积分方法由已知质点的速度或加速度求质点的运动学方程。

3. 熟悉和掌握在几种常用坐标系(直角坐标系、自然坐标系、极坐标系)下速度、加速度的表达形式。

4. 掌握圆周运动的角量表示及角量与线量之间的关系。

5. 掌握速度、加速度变换式，并会运用变换式求解质点相对运动问题。

二、内容提要

1. 确定质点位置的方法

确定质点运动首先要确定参考系，在确定的参考系中，确定质点位置的方法主要有坐标法、位矢法和自然法。

2. 运动学方程

表示质点位置随时间变化关系

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$$

用直角坐标表示

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

用极坐标表示

$$\begin{cases} r = r(t) \\ \varphi = \varphi(t) \end{cases}$$

用自然坐标表示

$$s = s(t)$$

3. 质点的位移、速度和加速度

位移：$\Delta \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)$

速度：$\boldsymbol{v}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$

加速度：$\boldsymbol{a}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}$

在直角坐标系中

$$\boldsymbol{v}=v_x\boldsymbol{i}+v_y\boldsymbol{j}+v_z\boldsymbol{k}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}&=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}\\&=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

在极坐标系中

$$\boldsymbol{v}=v_r\boldsymbol{r}^0+v_\varphi\boldsymbol{\varphi}^0=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{r}+r\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\varphi}^0$$

$$\boldsymbol{a}=a_r\boldsymbol{r}^0+a_\varphi\boldsymbol{\varphi}^0=\left(\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}-r\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)^2\right)\boldsymbol{r}^0+\left(r\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}+2\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)\boldsymbol{\varphi}^0$$

在自然坐标系中

$$\boldsymbol{v}=v\boldsymbol{\tau}=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\tau}$$

$$\boldsymbol{a}=a_\tau\boldsymbol{\tau}+a_n\boldsymbol{n}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\tau}+\frac{v^2}{\rho}\boldsymbol{n}=\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{\tau}+\frac{\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2}{\rho}\boldsymbol{n}$$

4．圆周运动

运动学方程(角位置)：$\theta=\theta(t)$

角位移：$\Delta\theta=\theta(t+\Delta t)-\theta(t)$

角速度：$\omega=\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$

角加速度：$\beta=\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$

线量与角量的关系：

$$s=r\theta$$

$$v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=r\omega$$

$$a_\tau=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=r\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=r\beta$$

$$a_n = \frac{v^2}{r} = \omega v = r\omega^2$$

5. 运动学的两类问题

(1)已知 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$,求$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}(t)$,$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(t)$等——微分。

(2)已知 $\boldsymbol{a}$ 和$\boldsymbol{r}_0$,$\boldsymbol{v}_0$,求运动学方程 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$——积分。

6. 相对运动

一质点相对于两个相对平动参考系的速度间关系为

$$\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_r + \boldsymbol{v}_e$$

加速度变换关系为

$$\boldsymbol{a}_a = \boldsymbol{a}_r + \boldsymbol{a}_e$$

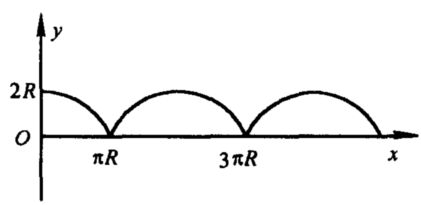
三、典型例题

1-1　在平面上运动的某质点,运动方程为 $x = R\sin\omega t + \omega Rt$, $y = R\cos\omega t + R$,式中 ω, R 为正的常量。此运动轨道为一摆线:即当一个半径为 R 的轮子沿 x 轴无滑动地滚动时,轮边缘一点所画出的曲线。(1)试定性地画出此质点的轨迹;(2)试求当 y 达到最小值时质点的速度和加速度;(3)试求当 y 达到最大值时质点的速度和加速度;(4)试求当 y 达到最大值时质点的速度、加速度、切向加速度、法向加速度和轨道的曲率半径的大小。

分析　对运动学方程 $x=x(t)$, $y=y(t)$求导即可求解质点的速度、加速度。由直角坐标系下的速度 $v=v(t)$可求切向加速度 $a_\tau=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$,法向加速度即为 $a_n=\sqrt{a^2-a_\tau^2}$,再由 $\rho=\frac{v^2}{a_n}$最后可求出曲率半径。

解　(1)质点运动轨迹如图所示。

(2)由运动方程可知质点的速度、加速度分别为



例题 1-1 图

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = R\omega\cos\omega t + \omega R$$

$$v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -R\omega\sin\omega t$$

$$a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = -R\omega^2\sin\omega t$$

$$a_y = \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = -R\omega^2\cos\omega t$$

当 y 为最小值,即:$y=R\cos\omega t+R=0$ 时,$\cos\omega t=-1$,即 $\omega t=(2k+1)\pi$,(k 为整数),因而 $\sin\omega t=0$。故

$$v_x=0,\qquad v_y=0$$
$$a_x=0,\qquad a_y=R\omega^2$$

即

$$\boldsymbol{v}=0,\quad \boldsymbol{a}=R\omega^2\boldsymbol{j}$$

此即相当于轮边缘一点接触滚动,而 $\boldsymbol{v}=0$,说明是纯滚动。

(3) 当 y 达最大值,即 $y=R\cos\omega t+R=2R$ 时,$\cos\omega t=1$,因而 $\sin\omega t=0$。所以此时

$$v_x=2\omega R,\quad v_y=0$$
$$a_x=0,\qquad a_y=-R\omega^2$$

即

$$\boldsymbol{v}=2\omega R\boldsymbol{i},\quad \boldsymbol{a}=-R\omega^2\boldsymbol{j}$$

(4) 当 y 达到最大值时,由上问结果可知

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=2\omega R,\quad a=\sqrt{a_x^2+a_y^2}=R\omega^2$$
$$a_\tau=\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)_{y_{\max}}=0,\qquad a_n=\sqrt{a^2-a_\tau^2}=R\omega^2$$

曲率半径:$\rho=\dfrac{v^2}{a_n}=\dfrac{4\omega^2R^2}{R\omega^2}=4R$,此即相当于轮边缘一点运动到最高点的轨迹曲率半径,它并不等于轮半径 R。

说明　此题是运动学第一类问题,即已知运动学方程求速度、加速度。特别应注意的是在直角坐标系下求出质点的速度 $\boldsymbol{v}$ 和总加速度 $\boldsymbol{a}$,质点在自然坐标下的切向加速度可由 $a_\tau=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ 求出,而法向加速度由 $a_n=\sqrt{a^2-a_\tau^2}$ 即可求出。虽然质点运动的曲率半径可通过轨迹方程求出,但由 $a_n=\dfrac{v^2}{\rho}$ 求曲率半径 ρ 是此类问题中通常采用的方法。

1-2　一质点沿半径为 R 的圆周按 $s=v_0t-\dfrac{1}{2}bt^2$ 规律运动,其中 v_0、b 都是正常数,求:(1) t 时刻质点的总加速度;(2) 什么时刻质点的总加速度大小等于 b;(3) 当加速度达到 b 时,质点沿圆周运行了多少圈?

分析　由质点在自然坐标系下的运动学方程 $s=s(t)$ 求导即可求出质点运动速度 $v=\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$,因而 $a_\tau=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$,$a_n=\dfrac{v^2}{R}$,$a=\sqrt{a_\tau^2+a_n^2}$,当 $a=b$ 时,可求出此时的时间

t，代入运动学方程 $s=s(t)$ 可求得当 $a=b$ 时质点运动的路程，$\frac{s}{2\pi R}$ 即为质点运动的圈数。

解　(1) 根据质点的运动学方程，可知质点圆周运动的速度为

$$v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=v_0-bt$$

在自然坐标系下，质点的切向、法向加速度分别为

$$a_\tau=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-b$$

$$a_n=\frac{v^2}{R}=\frac{(v_0-bt)^2}{R}$$

因而质点的总加速度大小为

$$a=\sqrt{a_n^2+a_\tau^2}=\frac{\sqrt{R^2b^2+(v_0-bt)^4}}{R}$$

(2) 当质点的总加速度等于 b 时，即

$$\frac{\sqrt{R^2b^2+(v_0-bt)^4}}{R}=b$$

由上式可解得

$$t=\frac{v_0}{b}$$

(3) 由上式知：当加速度等于 b 时，$t=\frac{v_0}{b}$，此时质点运行的路程

$$s=v_0t-\frac{1}{2}bt^2=v_0\frac{v_0}{b}-\frac{1}{2}b\left(\frac{v_0}{b}\right)^2=\frac{v_0^2}{2b}$$

质点作圆周运动，因而其运行的总圈数为

$$n=\frac{s}{2\pi R}=\frac{v_0^2}{4\pi Rb}$$

说明　本题是自然坐标系下的运动学第一类问题，正确掌握自然坐标系下质点的速度、加速度定义就可求解本题，特别应注意的是 $a_\tau=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$，在一定条件下，也可写成 $a_\tau=\frac{\mathrm{d}|\boldsymbol{v}|}{\mathrm{d}t}$，而不是 $a_\tau=\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\right|$。

1-3　一质点以初速度 v_0 作直线运动，所受阻力与其速度成正比，试求当质点速度为 $\frac{v_0}{n}(n>1)$ 时，质点经过的距离与质点所能行经的总距离之比。

分析　对加速度积分求出 $v=v(t)$，再积分求出 $x=x(t)$。质点所能行经的

总距离 x_m 对应 $t\to\infty$；当 $v=\dfrac{v_0}{n}$ 由速度关系得速度为 $\dfrac{v_0}{n}$ 时所需时间 t，以此时间由 $x=x(t)$ 即可得到速度为 $\dfrac{v_0}{n}$ 时，质点行经的距离 x_1，进而可求二者之比。

解法一 质点沿直线运动，取该直线为 x 坐标，由题意质点的加速度为

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-kv \qquad (k\text{ 为大于零常数})$$

分离变量

$$\frac{\mathrm{d}v}{v}=-k\mathrm{d}t$$

依题意，初始条件为 $t=0$ 时，$v=v_0$ 积分上式

$$\int_{v_0}^{v}\frac{\mathrm{d}v}{v}=\int_0^t-k\mathrm{d}t$$

得

$$v=v_0\mathrm{e}^{-kt} \tag{1}$$

又

$$v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v_0\mathrm{e}^{-kt},\qquad \text{即 }\mathrm{d}x=v_0\mathrm{e}^{-kt}\mathrm{d}t$$

初始条件为 $t=0$，$x=0$，积分上式

$$\int_0^x\mathrm{d}x=\int_0^t v_0\mathrm{e}^{-kt}\mathrm{d}t$$

得

$$x=\frac{v_0}{k}(1-\mathrm{e}^{-kt}) \tag{2}$$

由上式知，当 $t\to\infty$，即可求得质点所能行经的总距离

$$x_m=\frac{v_0}{k}$$

设经 t 时间后，质点的速度降为 $v=\dfrac{v_0}{n}$，由(1)式可得

$$\frac{v_0}{n}=v_0\mathrm{e}^{-kt_1}$$

$$t_1=\frac{\ln n}{k}$$

代入(2)式，即可得

$$x_1=\frac{v_0}{k}(1-\mathrm{e}^{-\ln n})=\frac{v_0}{k}\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

则两距离之比为

$$\frac{x_1}{x_m}=\frac{\dfrac{v_0}{k}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)}{\dfrac{v_0}{k}}=1-\frac{1}{n}$$

解法二　质点加速度为

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-kv$$

作变量替换有

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=-kv$$

即

$$\mathrm{d}v=-k\mathrm{d}x$$

依题意,初始条件 $x=0$ 时, $v=v_0$ 积分上式

$$\int_{v_0}^{v}\mathrm{d}v=\int_0^x-k\mathrm{d}x$$

得

$$v=v_0-kx$$

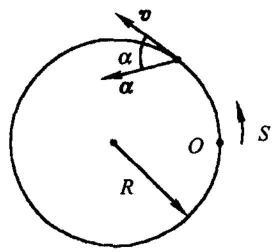
显然,当 $v=0$ 时, $x=x_m$, 故 $x_m=\dfrac{v_0}{k}$。当 $v=\dfrac{v_0}{n}$时, $x=x_1$, 故 $x_1=\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\dfrac{v_0}{k}$。从而两距离之比为

$$\frac{x_1}{x_m}=1-\frac{1}{n}$$

说明　本题为运动学第二类问题,由质点的加速度 $a=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-kv$ 积分可得 $v(t)$, $x(t)$, 如解法一,当涉及到质点的速度与距离的关系,由积分变量变换 $a=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=v\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$通过积分也可求解本题,如解法二。本题不涉及时间,故选择解法二较简单。

1-4　质点运动轨迹是半径为 R 的圆,在 $t=0$ 时的自然坐标为 s_0,速度为 v_0 (如图),若保持加速度方向与速度方向之间的夹角 α 不变$\left(\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$,求当 $s-s_0=2\pi R$ 时质点运动速度的大小。

分析　解本题关键在于得到速度 v 与路程 s 的关系。$\tan\alpha=\dfrac{a_n}{a_\tau}$为常量,而



例题 1-4 图

$a_\tau=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$，对圆周运动 $a_n=\dfrac{v^2}{R}$，由此可得速度 v 与时间 t 的微分关系，通过积分变量替换 $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=v\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}$ 即可得 v 与 s 的微分关系。

解 在自然坐标下，质点的切向、法向加速度分别为

$$a_\tau=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t},\quad a_n=\frac{v^2}{R}$$

速度方向即为切向方向，依题意

$$\frac{a_n}{a_\tau}=\tan\alpha=\text{常量}$$

从而

$$a_\tau=\frac{a_n}{\tan\alpha}=\frac{v^2}{R\tan\alpha}$$

即

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{v^2}{R\tan\alpha}$$

积分变量替换

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}$$

故

$$v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}=\frac{v^2}{R\tan\alpha}$$

即

$$\frac{R\tan\alpha}{v}\mathrm{d}v=\mathrm{d}s$$

当 $s-s_0=2\pi R$ 时质点的速度设为 v，由题意初始条件为，$s=s_0$，$v=v_0$，积分上式

$$\int_{v_0}^{v}\frac{R\tan\alpha}{v}\mathrm{d}v=\int_{s_0}^{s}\mathrm{d}s$$

得

$$R\tan\alpha\ln\frac{v}{v_0}=2\pi R$$

从而

$$v=v_0\mathrm{e}^{\frac{2\pi}{\tan\alpha}}$$

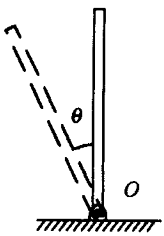
说明　本题是在自然坐标系下质点运动学第二类问题。已知加速度与位置的关系，通过积分即可求速度与位置坐标的关系，此过程中$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}$这一积分变量替换是关键，同时应注意$\tan\alpha=\frac{a_n}{a_\tau}=$常量这一条件。

1-5　一长为 l 的细杆可绕通过其一端的水平轴在铅直平面内自由转动，如图所示。当杆与垂直方向夹角为 θ 时，其角加速度 $\beta=\frac{3g}{2l}\sin\theta$，试求：(1)杆自静止由 $\theta_0=0$ 转至 $\theta=\frac{\pi}{2}$时，杆的角速度；(2)杆的端点 A 的线速度大小。

分析　由题意，通过积分变量替换$\beta=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\omega\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\theta}$可得$\omega$与$\theta$的微分关系，然后积分即可求解本题。

解　角加速度与 θ 角有关，是变量，杆做变加速度转动，因

$$\beta=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\frac{3g}{2l}\sin\theta$$



例题 1-5 图

积分变量替换

$$\beta=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\omega\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\theta}$$

则

$$\omega\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\theta}=\frac{3g}{2l}\sin\theta$$

根据题意，初始条件为 $\theta=0$ 时，$\omega=0$，积分上式

$$\int_0^{\omega}\omega\mathrm{d}\omega=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{3g}{2l}\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

得杆转至$\theta=\frac{\pi}{2}$时的角速度为

$$\omega=\sqrt{\frac{3g}{l}}$$

根据角量与线量关系，此时杆的端点 A 的线速度大小为

$$v_A=l\omega=\sqrt{3gl}$$

说明　本题属于运动学第二类问题，由角加速度$\beta=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$通过积分即可求角速度$\omega$。此过程中，因不涉及时间，故采用$\beta=\omega\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\theta}$比较简单。

1-6　一质点以初速度 v_0 作直线运动，所受阻力与其速度的三次方成正比，

试求质点速度和位置随时间的变化规律以及速度随位置的变化规律。

分析　对 $a=-kv^3$ 积分可求 $v=v(t)$，再积分可求 $x=x(t)$。要求 $v=v(x)$，可通过积分变量替换 $a=v\dfrac{dv}{dx}$，积分即可求得。

解　取质点运动直线为 x 轴，取 $t=0$ 时刻质点所在位置为坐标原点。依题意，质点的加速度为

$$a=-kv^3\quad(k>0,\text{常数})$$

即

$$\frac{dv}{dt}=-kv^3$$

$$\frac{dv}{v^3}=-k\,dt$$

由初始条件 $t=0$ 时，$v=v_0$，积分上式，有

$$\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{v^3}=\int_0^t -k\,dt$$

所以，质点速度与时间的关系为

$$v(t)=v_0\left(\frac{1}{1+2kv_0^2t}\right)^{\frac{1}{2}}$$

又因 $v=\dfrac{dx}{dt}$，故

$$dx=v_0\left(\frac{1}{1+2kv_0^2t}\right)^{\frac{1}{2}}dt$$

由初始条件 $t=0$ 时，$x=0$，积分上式，有

$$\int_0^x dx=\int_0^t v_0\left(\frac{1}{1+2kv_0^2t}\right)^{\frac{1}{2}}dt$$

所以，质点位置随时间的关系为

$$x(t)=\frac{1}{kv_0}\left(\sqrt{1+2kv_0^2t}-1\right)$$

又因

$$\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt}=v\frac{dv}{dx}$$

及

$$a=-kv^3$$

故

$$v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=-kv^3 \quad 或 \quad \frac{\mathrm{d}v}{v^2}=-k\mathrm{d}x$$

由题设 $x=0$ 时，$v=v_0$，积分上式，有

$$\int_{v_0}^{v}\frac{\mathrm{d}v}{v^2}=\int_0^x -k\mathrm{d}x$$

所以，质点速度和位置的关系为

$$v(x)=\frac{v_0}{1+kv_0x}$$

说明　本题属于运动学第二类问题，在本题中再次应用了积分变量替换，即 $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$，这是解题中经常使用的一种方法，注意体会。

1-7　如图所示，一直径为 d，高为 h 的薄壁圆筒形投料池，在其左方距离为 L 处喷枪以发射角 α 喷射出粉状材料，不计空气阻力，试求恰好能投入池中的喷射速度范围。

分析　质点作斜抛运动时，其加速度始终向下且为重力加速度 g，其轨迹为一抛物线，可由斜抛运动的运动学方程求出其轨迹方程，代入投料投入池中条件即可求解。

解　粉状材料的运动为抛物线运动，则其运动方程为

$$x=(v\cos\alpha)t$$

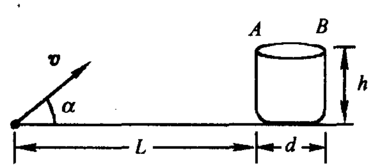
$$y=(v\sin\alpha)t-\frac{1}{2}gt^2$$

消去 t 得粉状材料的轨迹方程为

$$y=x\tan\alpha-\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v\cos\alpha}\right)^2 \tag{1}$$

依题意 $y=h$，要恰好能投入池中，则要求 $L\leqslant x\leqslant L+d$。考虑到速度的下限，即把 $x=L$，$y=h$ 代入(1)式

$$h=L\tan\alpha-\frac{1}{2}g\left(\frac{L}{v_{\min}\cos\alpha}\right)^2$$



例题 1-7 图

得

$$v_{\min}=\frac{L}{\cos\alpha}\sqrt{\frac{g}{2(L\tan\alpha-h)}}$$

对于速度上限，把 $x=L+d$，$y=h$ 代入(1)式

$$h = (L + d)\tan\alpha - \frac{1}{2}g\left(\frac{L + d}{v_{max}\cos\alpha}\right)^2$$

得

$$v_{max} = \frac{L + d}{\cos\alpha}\sqrt{\frac{g}{2[(L + d)\tan\alpha - h]}}$$

因此,速度的范围为

$$v_{min} \leqslant v \leqslant v_{max}$$

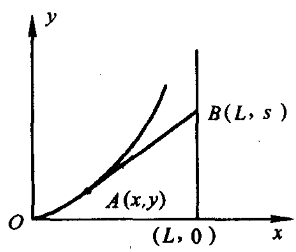
即

$$\frac{L}{\cos\alpha}\sqrt{\frac{g}{2(L\tan\alpha - h)}} \leqslant v \leqslant \frac{L + d}{\cos\alpha}\sqrt{\frac{g}{2[(L + d)\tan\alpha - h]}}$$

说明　本题是关于质点抛体运动的问题。关键在于列出方程后对问题的分析,也就是恰能投入池中的条件,即 $y = h, L \leqslant x \leqslant L + d$。并由此条件限定速度范围。

1-8　敌机以匀速 v 在空中向正北方向飞去,此时在敌机的正西方有一导弹以不变的速度 $2v$ 正对敌机追去。求导弹的运动轨迹及击中敌机所需的时间。设二者开始相距为 L。

分析　要使导弹能击中敌机,即要求导弹运行时其速度方向始终指向敌机,这就是说导弹的运动轨迹的切向方向始终指向敌机。而导弹的轨迹的切向方向为 $\frac{dy}{dx}$,从而可建立导弹运行轨迹的微分方程,然后积分即可得导弹的轨迹方程。导弹击中敌机时,导弹和敌机的坐标相同,将此条件代入,就可求出追击敌机的时间。



例题 1-8 图

解　取正北方向为 y 轴,正东方向为 x 轴,建立坐标如图。$t = 0$ 时,敌机位于$(L, 0)$点,导弹位于坐标原点。设 t 时刻,导弹的位置为 $A(x, y)$,敌机的位置为 $B(L, s)$,依题意,敌机运动轨迹为一指向正北的直线,其 t 时刻自然坐标 $s = vt$,导弹正对敌机追去,所以,AB 应为导弹轨迹的切线。由图知。

$$y - s = \frac{dy}{dx}(x - L) \tag{1}$$

依题意有

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = (2v)^2 = 4\dot{s}^2 \tag{2}$$

将(1)式对 x 求导,得

$$\frac{ds}{dx} = -\frac{d^2y}{dx^2}(x - L)$$

将(2)式代入得

$$1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2=4\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right)^2(x-L)^2$$

令 $\eta=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$,则上式可变形为

$$\frac{\mathrm{d}\eta}{\sqrt{1+\eta^2}}=\frac{\mathrm{d}x}{2(L-x)}$$

初始条件:$t=0$ 时, $x=0$, $\eta=0$,积分上式

$$\eta=\frac{1}{2\sqrt{L}}\frac{x}{\sqrt{L-x}}$$

再利用初始条件:$t=0$ 时, $x=0$, $y=0$,积分上式可得

$$y=-\frac{2L+x}{3\sqrt{L}}\sqrt{L-x}+\frac{2}{3}L$$

这就是导弹的轨迹方程。

当导弹追上敌机时, $x=L$,代入轨迹方程可得:$y=\frac{2}{3}L$。而此时 $s=vt=y=\frac{2}{3}L$,因此追上的时间为

$$t=\frac{2L}{3v}$$

说明　此类追击问题的一个共同点就是在追击过程中,追击物速度方向始终指向目标物。从追击物轨迹上看,就是其轨迹的切向方向始终指向目标物,这是求解此类问题的关键。

1-9　宽度为 d 的河流,其水流速度与到河岸的距离成正比。在河两岸处,水流速度为零,在河流中心处,其流速为 v_0。一小船以相对速率 u 沿垂直于水流的方向行驶,在河中心处因故突然掉头返回,以同样相对速率 u 垂直于水流返回本岸,小船的运动轨迹及小船返回本岸时离原出发点的距离为多少?

分析　由速度变换可求出船的绝对速度 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}'$。在直角坐标系下,对绝对速度 $v_x=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$, $v_y=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ 积分后消去时间 t 即可求出船驶向河中心时的轨迹方程;同样,对船从河中心掉头返回的轨迹方程可类似求出,由轨迹方程最后就可求题中距离。

解　小船的绝对速度 $\boldsymbol{v}$ 为相对速度 $\boldsymbol{u}$ 和牵连速度 $\boldsymbol{v}'$ 之和即

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}'$$

取河岸为参考系,建立如图所示直角坐标,水流的速度可表示为

$$\boldsymbol{v}'=\frac{2v_0}{d}y\boldsymbol{i}$$