离散数学

杨杰 于忠文 编著

Lisanshuxue

山东大学出

Shandong Univers

离散数学

杨 杰 于忠文 编著

山东大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

离散数学/杨杰,于忠文编著.—济南:山东大学出版社,2003.3
ISBN 7-5607-2551-1

Ⅰ.离… Ⅱ.①杨…②于… Ⅲ.离散数学-高等学校—教材
Ⅳ.O158

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 015970 号

山东大学出版社出版发行
(山东省济南市山大南路 27 号 邮政编码:250100)
山 东 省 新 华 书 店 经 销
青岛星球印刷有限公司印刷
850×1168 毫米 1/32 11.5 印张 300 千字
2003 年 4 月第 1 版 2003 年 4 月第 1 次印刷
印数:1-3000 册
定价:26.00 元

说　明

全书共分五章：命题逻辑；谓词逻辑；集合、关系、映射；代数系统；图论。

在编写中，根据原国家教委拟定的高等学校有关课程的教学大纲的要求，针对离散数学自身的特点，结合多年教学实践，从教与学的实际出发，力求做到教材内容适量，讲解详实，通俗易懂。书中给出了较多典型和富有启发性的例题，使抽象的东西具体化，加深了对概念、公式、定理的理解，突出了数学思想方法。每章配有适量习题，书后附有参考解答，既便于教师讲授，又便于学生自学。

本书可作为高等院校计算机专业本科教材和专科教材。专科使用时，代数系统和图论两章可只讲一些基本概念；也可作为成人高校计算机专业的教材；可供专业技术人员、数学工作者参考。

本书得到山东省数学学会副理事长、山东省专业技术拔尖人才、山东师范大学数学系原系主任李师正教授审订，并写了序；本书的出版得到济南大学领导、山东大学出版社及兄弟院校大力支持；本书写作过程中参考了有关专家的文献资料，在此，一并表示衷心感谢。

由于作者水平所限，书中不妥与错误之处在所难免，敬请专家和读者批评指正。

作者

2003 年 2 月于济南大学

序

数学从概念到方法基本上可归为两类,即连续数学与离散数学。如数学分析、微分方程、泛函分析、微分几何、拓扑学等属于连续数学范畴,而近世代数、图论、初等数论、计算机科学、数理逻辑等应在离散数学这一领域中。有的学科如计算数学、运筹学等常常将连续性问题离散化,有所谓"有限元方法",相反,如解析数论等又将离散问题用连续数学的方法处理。因而连续与离散是对立的统一,连续数学与离散数学是数学的相辅相成的两个侧面。

离散数学是研究离散量的结构及其之间关系的学科。一般包括命题逻辑、谓词逻辑、集合论、代数系统、图论五部分内容。它在可计算性及计算复杂性理论、算法与数据结构、程序设计语言、数值与符号运算、操作系统、软件工程与方法学、数据库与信息检索系统、人工智能、网络、计算机图形学以及人机通信等各个领域都有着广泛的应用。随着计算机科学技术的迅猛发展,离散数学已成为高等学校计算机专业的一门核心基础课。

一本好的教材首先要有严谨性、科学性和系统性,符合国家教育部有关规定和要求,同时还要注意可操作性,使师生易教易学。这就要求编著者不仅有深厚的科学素养,而且具有丰富的教学实践经验,良好的文字表达能力以及在选材上明确恰当的思路,使学生用较少的时间和精力顺利地把握教材的精髓。

本书的编著者于忠文教授和杨杰副教授具有以上特点,因而

使本书有别于已问世的一些“离散数学”版本。另外,本书概念论述清楚,重要性质、定理给出了简洁的证明。语言通俗易懂又言简意赅,例题、习题配合得当,并附有习题解答。

本书可作为高等学校及成人高校计算机专业本、专科教材,也可供相应专业在职人员自学之用。本书的出版必将受到读者的青睐,成为人们的良师益友。

李师正
2003年春于山东师范大学

目　录

第一章　命题逻辑

数理逻辑是用数学方法研究推理规律的一门学科.命题逻辑是数理逻辑的基本组成部分,是学习第二章谓词逻辑的基础.

本章主要介绍命题逻辑的基本概念、等值演算和推理有关内容,它在开关理论和计算机的逻辑设计中都得到有效的应用.

§1　命题与联结词

1.命题及其表示法

命题是命题逻辑的基础,它的定义如下:

定义 1　在数理逻辑中,凡是能判断真假的陈述句称为命题.

例 1　判断下列语句中哪些构成命题.

(1)雪是黑的.

(2)今天天气多好啊!

(3)昨天下午我一边看书,一边听录音机.

(4)如果实数 a 能被 2 整除,则它一定能被 4 整除.

(5)2008 年奥运会在中国举行.

(6)$x + y = 3$.

(7)星期二下午开会吗?

解 由命题概念分析解答:

(1),(3),(4)都是能分辨真假的陈述句,因此是命题;

(5)是虽然现在不知道真假的陈句,但以后能确定其为真或假,因此(5)是命题;

(6)虽然是陈述句,但不能判断其真假.当 $x=1,y=2$时,$x+y=3$是真的,当 $x=2,y=2$时,$x+y=3$是假的,因此不是命题;

(2)是感叹句,(7)是疑问句,它们都无法判断真假,因此不是命题.

由此可知,陈述性语句,根据其内容能够辨别其真假,而疑问句、命令句、感叹句都不能判断真假,故它们不是命题.

命题仅有两种可能的真值:"真的"和"假的",且只能选其中之一.

2. 命题的表示

在数理逻辑中,命题通常用大写英文字母 $A,B,\cdots,P,Q\cdots$ 或用小写英文字母 $p,q,r\cdots$ 或用带下标的小写英文母 $p_1,q_2,r_i\cdots$ 表示.例如

$$p: 雪是黑的.$$

说明 p 表示命题"雪是黑的",称命题的真或假为它的真值.若一个命题是真的,则它的真值为真,用字母 T 表示,为方便起见,也可用"1"表示;若一个命题是假的,则它的真值为假,用字母" F "表示,为方便起见用"0"表示.

表示命题的字母叫标识符,例如上述的 p 就是标识符.

一个命题标识符表示确定命题称为命题常量,如果命题标识符只标志命题的位置,称为命题变元,命题变元可以表示任意命

题.命题变元不能确定真值,所以命题变元不是命题.当命题变元 p 用特定命题去代替,此时 p 可以确定真值,这称作对 p 的指派(或赋值).

在例 1 中,(1),(3),(4)虽然都是命题,但有差别:(1)是简单句,(3),(4)是复合句,所以命题可分为两大类:

一类是由一个不能再分解的简单陈述句构成的简单命题,或叫原子命题;

另一类是由两个或两个以上原子命题用逻辑联结词构成的复合命题.

3. 联结词

复合命题是由原子命题和联结词构成,因此,联结词是复合命题的重要组成部分.但是自然语言中的联结词往往没有严格的定义,有时含义不确切,因此对数理逻辑中使用的联结词需要作出严格定义,并把它符号化.

常用的联结词有 5 个,分别称为否定、合取、析取、蕴涵及等价,并分别用符 $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\rightleftarrows$ 表示.

(1)否定

定义 2　设 p 是命题,复合命题"非 p"称为 p 的否定式,记作 $\neg p$. 当且仅当 p 的真值为 1 时,$\neg p$ 的真值为 0. 如表 1 所示(称这类表示命题真值的表为命题真值表,简称真值表).

表 1

p	$\neg p$
1	0
0	1

易知,$\neg$ 相当于自然语言中的"非"、"不"等联结词.

例如：p：$2+2\leqslant 5$，则 $\neg\ p$：$2+2>5$.

q：学生很努力，则 $\neg\ q$：学生不很努力.

(2)合取

定义 3 设 p,q 为两个命题，复合命题“p 且 q”，称为 p 与 q 的合取式，记作 $p\wedge q$.当且仅当 p,q 的真值都为 1 时，$p\wedge q$ 的真值为 1.它的真值表如表 2 所示.

表 2

p	q	$p\wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

易知，$\wedge$ 相当于自然语言中的“并且”，“既…，又…”，“虽然…，但是…”等联结词.

例 2 将下列命题符号化：

(1)小王既聪明又用功.

(2)小李虽然聪明，但不用功.

解 p：小王聪明，q：小王用功，则(1)可符号化为：$p\wedge q$.

(2)设 p：小王聪明，$\neg\ q$：小王不用功，则(2) 可符号化为：$p\wedge\neg q$.

(3)析取

定义 4 设 p,q 为两个命题，复合命题“p 或 q”称为 p 与 q 的析取式，记作 $p\vee q$.当且仅当 p,q 的真值都为 0 时，$p\vee q$ 的真值为 0；或 $p\vee q$ 的真值为 1 时，当且仅当 p 与 q 中至少有一个真值为 1. 如表 3 所示.

表 3

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

例如，p：我会俄语，

q：我会英语，

则 $p \vee q$：我会俄语或英语.

$\vee$ 相当于自然语言中的"或者"这个联结词，要注意的是，按照 $\vee$ 的定义，$\vee$ 所表示的"或者"是"相容或". 上例中 $p \vee q$ 不排除"我会俄语也会英语"的情形. 而自然语言中的"或者"，有时具有相容性，有时又具有排斥性. 因此在使用 $\vee$ 表示命题中的"或者"时，要加以区分.

例 3　将下列命题符号化：

(1)我明日上午 8 点去办公室或电影院.

(2)老王或老李一人去北京开会.

解　(1)设 p：我明日上午去办公室，

q：我明日上午去电影院，

则 p，q 两者是不可兼得的，因此命题符号化为

$$p \vee q$$

(2)设 p：老王去北京开会，q：老李去北京开会，则 p，q 两者是可以兼得的. $p \vee q$ 包含有两人都去北京开会的可能性，命题不能符号化为 $p \vee q$. 而应符号化为

$$(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$$

(4)条件

定义 5　设 p，q 为两个命题，复合命题"如果 p 则 q"记作 p

$\to q$ 称为条件命题.当且仅当 p 的真值为 1，q 的真值为 0 时，$p \to q$ 的真值为 0.称 $p \to q$ 中 p 为前件,q 为后件 .

条件联结词→的真值表如表 4 所示.

表 4

p	q	$p \to q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

蕴涵式 $p \to q$ 中 $\to$ 为条件联结词,由此产生的命题叫条件命题.

$p \to q$ 表示的基本逻辑关系是,q 是 p 的必要条件,或 p 是 q 的充分条件.相当于自然语言中的“如果 p,则 q”,“只要 … 就 …” 等联结词.应注意的是:在自然语言中“如果 p,则 q” 中的 p 与 q 往往有某种内在联系;在数理逻辑中,p 与 q 不一定有内在联系;当前件 p 为假时,不论结论为真或假,这样的语句意义往往无法判断,在数理逻辑中,“当 p 为假,q 为真,$p \to q$ 为真” 可理解为是一种规定.

例 4 将下列命题符号化:

(1)只要天不下雨,我就骑自行车上班.

(2)若 $2+2=4$,则太阳从东方升起.

(3)若 $2+2\neq4$,则太阳从东方升起.

解 (1)设 p: 天下雨; q: 我骑自行车上班,则(1) 为 $\neg p \to q$($\neg p$ 是 q 的充分条件).

(1) 还可以用等价说法“如果我不骑自行车上班,则天下雨”,则可表示为 $\neg q \to p$.

(2) 设 p:2+2=4,q:太阳从东方升起,则(2)(3)可分别表示为:$p \to q$,$\neg p \to q$.

这里前件与后件之间无内在联系,可由定义、真值表加以验证.

(5)双条件

定义 6 设 p,q 为两个命题,复合命题"p 当且仅当 q"记作 $p \rightleftarrows q$,称为双条件命题.当且仅当 p,q 的真值相同时,$p \rightleftarrows q$ 的真值为 1.

联结词$\rightleftarrows$的真值如表 5 所示.

表 5

p	q	$p \rightleftarrows q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

其相当于自然语言中"当且仅当","充分必要"等联结词.

例 5 将下列命题符号化:

(1)两个三角形全等,当且仅当它们的三组对应边相等;

(2)二加二等于四,当且仅当雪是白的.

解 (1)设 R: 两个三角形全等,

S: 两个三角形对应边相等,

则(1)可表示为 $R \rightleftarrows S$.

(2)设 P:二加二等于四,

Q:雪是白的,

则(2) 可表示为 $P \rightleftarrows Q$.

不难看出,上述(1)与自然用语是一致的;(2)在自然语言中没

有什么意义,但在数理逻辑中却完全可以接受它.

对上述5种联结词,做以下几点说明:

(1)在命题逻辑中,我们关心的往往不是命题的具体内容,而是其真值.基本复合命题取值情况如表6所示.

表6

p q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \rightleftarrows q$
0 0	1	0	0	1	1
0 1	1	0	1	1	0
1 0	0	0	1	0	0
1 1	0	1	1	1	1

(2)利用上述5种联结词,可以由一些已知命题构成新的命题,其中括号表达了对联结词命题作用的先后次序.为此,规定总是从最内层的括号开始运算,在同一括号内联接词的先后等级次序为:

$$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \rightleftarrows;$$

同等级联结词按自左至右次序演算.

例6 将下列命题符号化:

(1)如果你走路时看书或坐车时看书,你会近视.

(2)除非他以书面或口头方式通知我,否则我不参加会议.

(3)他只有学好离散数学,才能学好程序设计.

(4)他只要学好离散数学,就能学好程序设计.

解 (1) 设p:你走路,

q:你坐车,

r:你看书,

s:你会近视,

则(1) 可符号化为

$$(p \vee q) \wedge r \to s$$

(2) 设p:他以书面方式通知我,

q:他以口头方式通知我,

r:我参加会议,

则(2) 可符号化为

$$\neg (p \vee q) \to \neg r$$

(3) 设p:他学好离散数学,

q:他学好程序设计,

则(3) 可符号化为

$$q \to p$$

注意:"他学好离散数学"是"他学好程序设计"的必要条件.

(4)"他学好离散数学"是"他学好程序设计"的充分条件,因此(4) 可符号化为

$$p \to q$$

§2　命题公式及其分类

本节介绍命题公式的概念、赋值情况及其命题公式的类型.

1. 命题公式

从上一节可以看到,一个命题符号 p 往往并不表示一个确定的命题,而表示一系列命题.正如高等数学中变量 x,它并不只代表一个值,而是代表一系列的值,称这样的 p 为命题变元.当对命题变元 p,只有用一个具体命题代入时,它的真值才能确定,相对于命题变元,称命题为命题常元.

粗略地说,由命题常元、命题变元、联结词以及括号组成的符