

国家杰出青年科学基金

和国家教委跨世纪优秀人才培养计划基金资助

排队论

——基础与应用

唐应辉 唐小我 著



电子科技大学出版社

938

938

国家杰出青年科学基金

和国家教委跨世纪优秀人才培养计划基金资助

排队论

——基础与应用

唐应辉 唐小我 著

电子科技大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

排队论:基础与应用/唐应辉,唐小我著. —成都:
电子科技大学出版社,2000.5

ISBN 7-81065-411-X

I. 排... I. ①唐...②唐... II. 排队论
IV. 0226

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 22599 号

声 明

本书无四川省版权防盗标识,不得销售;版权所有,违者必究,举报有奖,举报电话:(028) 6636481 6241146 3201496

排队论

——基础与应用

唐应辉 唐小我 著

出 版:电子科技大学出版社

(成都建设北路二段四号,邮编:610054)

责任编辑:徐守铭

发 行:新华书店经销

印 刷:西南冶金地质印刷厂

开 本:850×1168 1/32 **印张** 11.3125 **字数** 313 千字

版 次:2000 年 5 月第一版

印 次:2000 年 5 月第一次

书 号:ISBN 7-81065-411-X/F·13

印 数:1—1500 册

定 价:18.00 元(平装) 22.80 元(精装)

内 容 提 要

全书内容共分十章,较系统地介绍了排队系统的基础理论,重点阐述了几种典型排队系统的瞬态和稳态性质,以及其基本的分析方法。第二章和第三章介绍了无限源和有限源的简单排队系统,第四章在传统分析的基础上,阐述了分析 $M/G/1$ 型排队系统瞬态性质的又一种新思路,而第九章和第十章较详细地分别介绍了经典排队系统理论延伸的两个方面——休假排队系统与可修排队系统,并在附录中对著名的 Little 公式,以及 p_j^- 、 p_j 、 p_j^+ 三者的关系作了阐述,同时注意到管理科学、计算机科学、通信等工程科学专业实际,概括地介绍了排队系统理论的应用方面和实例。

本书是作者多年来科研成果的总结,是一本科技专著,对科技工作者和工程技术人员有较大的参考价值,同时也可作为有关专业硕士、博士研究生相应课程的教材和教师的教学参考书。

作者简介

唐应辉,男,1963年3月出生,1988年1月硕士毕业于西安电子科技大学运筹学专业,1998年5月破格晋升为电子科技大学教授,现任电子科技大学应用数学系工程数学教研室主任,学校数学学科职称评议组成员,电子科技大学《运筹与控制》硕士点的学科带头人,四川省工业与应用数学学会理事,全国大学生数学建模竞赛四川省赛区组委会副秘书长。

感兴趣的研究领域是排队论及其应用,系统可靠性分析,应用概率模型及应用,决策理论和系统工程领域中的运筹学问题。作为独著或第一作者,近十年已在国内外重要学术刊物上发表学术论文近50篇,如《J. of Applied Probability》,《Microelectronics & Reliability》,《Acta Mathematica Scientia》,《J. of Systems Science & Systems Engineering》,《Chinese J. of Electronics》,《系统工程理论与实践》,《电子学报》,《系统科学与数学》,《高校应用数学学报》,《控制与决策》等,其中独立地在国外有影响刊物上发表6篇,在国内一级刊物上发表近20篇。在公开发表的学术论文中,被国内外有影响检索刊物《SCI》,《EI》,《EEA》,《CCA》,《MR》和《中国数学文摘》等共检索43篇,其中被国际权威检索刊物《SCI》,《EI》检索13篇次。国家自然科学基金资助项目《可修系统的评价分析和决策的理论方法研究》1997年获电子工业部科技进步(理论成果)三等奖(排名第一)。

唐小我,男,1955年3月出生于四川省彭州市.师从曹长修教授,1994年博士毕业于重庆大学自动控制理论与应用专业.1988年至1989年在英国 Management School of University of Lancaster 作访问学者.1990年1月破格晋升为副教授,1993年5月破格晋升为教授.现为电子科技大学管理学院院长,教授,重庆大学技术经济与管理专业和西南交通大学管理科学与工程专业博士生导师,四川省首批学术与技术带头人,中国系统工程学会常务理事,中国数量经济学会理事,四川省知识经济促进会理事长,四川省数量经济学会副理事长.

10多年来,主要从事管理科学与工程领域的研究工作.作为项目负责人和第一主研,主持并完成10余项国家级和省部级科研项目,其中包括,国家杰出青年科学基金项目,国家教委“跨世纪优秀人才培养计划”基金项目,国家自然科学基金项目,国家自然科学基金青年基金项目,国家教委资助优秀年轻教师基金项目,国家教委博士点基金项目和电子工业部软科学项目等.

在经济预测与决策,投入产出分析,投资系统分析,数量经济分析,运筹与管理 and 科技管理等方面出版著作5本,发表学术论文100余篇,获得11项国家级和省部级奖励,其中包括国家科技进步三等奖1项,四川省科技进步一等奖1项,电子工业部科技进步一等奖1项,国家统计局全国统计科技进步二等奖2项.

获得10余项国家级和省部级荣誉称号.1999年获国家有突出贡献中青年专家称号和国家人事部专业技术人才一等功奖励,同年还获得全国五一劳动奖章.1998年获中国青年科学家奖.1996年获电子工业部有突出贡献中青年专家称号.1992年被评为电子工业部优秀科技青年,同年被评为政府特殊津贴专家.

序

排队论(Queueing Theory)又名随机服务系统理论,是研究拥挤现象的一门学科,它通过研究各种服务系统在排队等待中的概率特性,来解决系统的最优设计和最优控制。排队论是运筹学的重要分支,也是应用概率的分支,所研究的问题有很强的实际背景,它起源于20世纪初丹麦电信工程师A. K. Erlang对电信系统的研究。之后,经过国内外的数学家和运筹学家的近90年的努力,排队论已是一门成熟的理论,其文献数以千计,特别是随着计算机技术的迅猛发展,排队论的发展更是日新月异,其应用领域也不断扩大。目前,排队论已广泛用于电信、交通运输、生产与库存管理、计算机系统设计、计算机通信网络、军事作战、柔性制造系统和系统可靠性等众多领域,取得了丰硕成果,并已成为工程技术人员、管理人员在系统分析与设计中的重要数学工具之一。

本书内容分为十章,较系统地介绍了排队系统的基础理论,同时注意到管理科学、计算机科学、通信等工程科学专业实际,概括地介绍了排队系统理论的一些应用方面,并较详细地分析了计算机设计中的实时处理和管理科学中的存储问题。休假排队系统与可修排队系统是两类更广泛、更复杂的排队系统,是经典排队系统理论研究的延伸和拓广,而且又提出了许多新的研究课题,因此,近几十年来一直是比较活跃的研究方面,成果也层出不穷。为此,作者写出第九章和第十章,分别介绍这两方面的研究内容,以飨读者。书中部分内容主要参考了国内外较有代表性的文献和著作,也有相当内容是作者多年来的研究工作和教授这门课程的经验总结。如泊松流充分必要条件的简洁证明, $M/G/1/\infty$ 排队系统队长瞬态分布的直接讨论方法和稳态分布的递推公式,以及该系统输出过程的嵌入更新过程分析法和离去顾客平均数的渐近展开等,特别是关于休假排队系统与

可修排队系统的有关内容,更是作者多年辛劳的结晶。另外,书末增加了一个附录,介绍内容涉及到的、引用到的,但又不适合写进正文中的有关知识,特别是对著名的 Little 公式的阐述,以及对 ρ_j^- 、 ρ_j 与 ρ_j^+ 三者关系的说明,相信读者阅后对涉及到的有关问题会有更深刻的认识,因此,本书内容具有一定的广度和深度。

在本书的写作过程中,作者力求做到内容层次分明,结构严谨,概念准确,表述清楚。理论分析由浅入深,论证严格,即使对引用到的而又没有给出证明的结果,作者也尽力指明出处。

但是,由于作者水平有限,错误在所难免,恳请广大读者指正,以求改进。

最后,作者感谢国家杰出青年科学基金(编号 79725002)和国家教委跨世纪优秀人才培养计划基金(教技厅[1997]2 号)的资助,也感谢多年来关心和支持作者工作的领导、同事和朋友。

作 者

2000 年 3 月于电子科技大学

常用符号说明

T'_n :	第 n 个顾客的到达时刻
τ_n :	第 n 个到达与第 $n-1$ 个到达之间的间隔时间
$F(t)$:	到达间隔时间的分布函数
λ :	单位时间内的平均到达率
χ_n :	第 n 个顾客所需的服务时间
$G(t)$:	服务时间的分布函数
μ :	单位时间内的平均服务率(忙的条件下)
ρ :	系统的交通强度
$N(t)$:	时刻 t 的队长(顾客数)
$N_q(t)$:	时刻 t 的等待队长
N :	平衡时任意时刻的队长
$\bar{N}$:	平衡时的平均队长
N^- :	平衡时到达的顾客看到的队长
N^+ :	平衡时服务完毕离开系统时留在系统中的队长
N_q :	平衡时任意时刻的等待队长
$\bar{N}_q$:	平衡时任意时刻的平均等待队长
$p_j(t)$:	时刻 t 队长为 j 的概率
p_j :	平衡时任意时刻队长为 j 的概率
p_j^- :	平衡时到达顾客看到队长为 j 的概率
p_j^+ :	平衡时服务完毕离开系统时留在系统中队长为 j 的概率
$W(t)$:	平衡时顾客的逗留时间分布函数
W :	平衡时顾客的逗留时间
$\bar{W}$:	顾客的平均逗留时间
$W_q(t)$:	平衡时顾客的等待时间分布函数
W_q :	平衡时顾客的等待时间
$\bar{W}_q$:	顾客的平均等待时间
b :	忙期长度

- $B(t)$: 忙期长度的分布函数
 $\hat{\tau}$: 系统的闲期长度
 T_n^- : 第 n 个服务完毕的顾客的离去时刻
 $M(t)$: $(0, t]$ 内离去顾客的平均数
 V : 在休假排队系统中服务员的休假时间长度
 $V(t)$: 休假时间长度的分布函数
 $\bar{V}(t)$: $1 - V(t)$
 X : 在可修排队系统中服务台的寿命长度
 $X(t)$: 寿命长度的分布函数
 Y : 服务台故障后的修理时间长度
 $Y(t)$: 修理时间长度的分布函数
 β : 平均修理时间长度
 L : 拉普拉斯(Laplace)变换
 LS : 拉普拉斯—司梯阶(Laplace—Stieltjes)变换
 $g(s)$: 相应大写 $G(t)$ 的 LS 变换
 $g^*(s)$: 相应大写 $G(t)$ 的 L 变换
 $F^{(k)}(t)$: 分布函数 $F(t)$ 自身的 k 重卷积, $k \geq 1, F^{(0)}(t) = 1$
 $E[X]$: 某个随机变量 X 的期望值
 $E[X^k]$: 某个随机变量 X 的 k 阶原点矩
 $D[X]$: 某个随机变量 X 的方差
 $P^-(z)$: 分布律 $\{p_j^-\}$ 的母函数
 $P(z)$: 分布律 $\{p_j\}$ 的母函数
 $P^+(z)$: 分布律 $\{p_j^+\}$ 的母函数
 $P_v(z)$: 在休假排队系统中队长平稳分布的母函数
 $\tilde{P}(z)$: 在可修排队系统中队长平稳分布的母函数
 $\Re(s)$: 复变量 s 的实部
 $\binom{n}{k}$: n 中取 k 的组合数, $k \leq n$, 且规定 $\binom{n}{0} = 1, \binom{n}{k} = 0 \quad (k > n)$

另外,其它有关符号见出处的说明.

目 录

第一章 引论	(1)
§ 1 排队系统概述	(1)
§ 2 几个重要的概率分布	(8)
§ 3 泊松过程(Poisson 流)	(13)
§ 4 更新过程	(19)
§ 5 马尔柯夫链	(27)
§ 6 生灭过程	(34)
第二章 无限源的简单排队系统	(39)
§ 1 $M/M/1/\infty$ 排队系统	(39)
§ 2 具有可变输入率的 $M/M/1/\infty$ 排队系统	(53)
§ 3 具有可变服务率的 $M/M/1/\infty$ 排队系统	(58)
§ 4 $M/M/\infty$ 排队系统	(61)
§ 5 $M/M/c/\infty$ 排队系统	(65)
§ 6 $M/M/c/K$ 混合制排队系统	(74)
第三章 有限源的简单排队系统	(81)
§ 1 $M/M/c/m/m$ 系统	(81)
§ 2 $M/M/c/c/m$ 损失制系统	(85)
§ 3 有备用品的 $M/M/c/m+K/m$ 系统	(87)
§ 4 二阶段循环排队系统	(91)
第四章 一般服务的 $M/G/1/\infty$ 排队系统	(95)
§ 1 嵌入马尔柯夫链	(95)
§ 2 队长	(101)
§ 3 等待时间与逗留时间	(109)
§ 4 忙期	(114)
§ 5 输出过程	(120)
第五章 一般到达的 $GI/M/c/\infty$ 排队系统	(125)
§ 1 嵌入马尔柯夫链	(125)

§ 2	队长	(137)
§ 3	等待时间与逗留时间	(144)
§ 4	忙期	(149)
§ 5	输出过程	(155)
第六章	$GI/G/1/\infty$ 排队系统	(156)
§ 1	队长	(156)
§ 2	等待时间	(161)
§ 3	一些逼近结果	(167)
第七章	特殊排队系统	(171)
§ 1	串联排队系统	(171)
§ 2	有优先权的排队系统	(175)
§ 3	成批到达的 $M^X/G/1/\infty$ 排队系统	(179)
§ 4	成批服务的 $M/M^k/1/\infty$ 排队系统	(188)
§ 5	“随机服务”的 $GI/M/c/\infty$ 排队系统	(193)
§ 6	“后到先服务”的 $GI/M/c/\infty$ 排队系统	(197)
第八章	排队系统的最优化与应用实例	(202)
§ 1	排队系统的最优化问题概述	(202)
§ 2	服务设备的最优控制	(203)
§ 3	输入过程的最优控制	(211)
§ 4	应用实例	(216)
第九章	休假排队系统	(236)
§ 1	背景与规则	(236)
§ 2	空竭服务多重休假的 $M/G/1/\infty$ 排队系统	(239)
§ 3	空竭服务单重休假的 $M/G/1/\infty$ 排队系统	(249)
§ 4	空竭服务多重指数休假的 $GI/M/1/\infty$ 排队系统	(255)
§ 5	空竭服务单重指数休假的 $GI/M/1/\infty$ 排队系统	(269)
第十章	可修排队系统	(279)
§ 1	$M/G/1/\infty$ 可修排队系统	(279)

§ 2	$GI/G/1/\infty$ 可修排队系统	(293)
§ 3	空竭服务多重休假的 $M/G/1/\infty$ 可修排队系统 ...	(297)
§ 4	空竭服务单重休假的 $M/G/1/\infty$ 可修排队系统 ...	(306)
§ 5	服务设备可修的机器维修模型	(312)
附录		(326)
一、母函数		(326)
二、拉普拉斯变换与拉普拉斯—司梯阶变换	(326)	
三、关于拉普拉斯变换的阿贝尔(Abelian)定理	(328)	
四、关于拉普拉斯—司梯阶变换的阿贝尔定理	(328)	
五、关于拉普拉斯—司梯阶变换的托贝尔(Tauberian)定理	(328)	
六、儒歇(Rouché)定理	(328)	
七、Smith 关键更新定理	(329)	
八、拉格朗日(Lagrange)展开定理	(329)	
九、Little 公式及说明	(329)	
十、 p_j^- 、 p_j 与 p_j^+ 三者的关系	(332)	
参考文献		(335)

第一章 引 论

§ 1 排队系统概述

1. 排队例子及基本概念

排队是日常生活和工作中常见的现象,例如:上下班坐公共汽车,等待公共汽车的排队;顾客到商店购物形成的排队;病人到医院看病形成的排队;往售票处购票形成的排队等;另一种排队是物的排队,例如文件等待打印或发送;路口红灯下面的汽车、自行车通过十字路口.排队现象是由两个方面构成,一方要求得到服务,另一方设法给予服务.我们把要求得到服务的人或物(设备)统称为**顾客**,给予服务的**服务人员或服务机构**统称为**服务员或服务台**(有时服务员专指人,而服务台是指给予服务的设备).顾客与服务台就构成一个**排队系统**,或称为**随机服务系统**,显然,缺少顾客或服务台任何一方都不会形成排队系统.

排队现象有的是以有形的形式出现,例如上下班坐公共汽车等,这种排队我们称为**有形排队**,而有的是以无形的形式出现,例如有许多顾客同时打电话到订购处订购车票,当其中一个顾客正在通话时,其它顾客就不得不在各自的电话机旁等待,他们可能分散在各个地方,但却形成一个无形的队列等待通话,这种排队现象称为**无形排队**.

2. 基本的排队系统

1)单服务员的排队系统,其图解表示如下(见图 1.1):

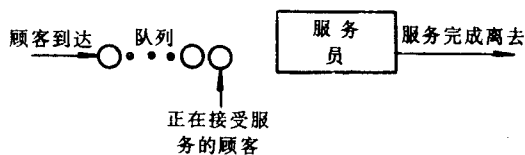


图 1.1

2)多服务员(台)的排队系统,其图解表示如图 1.2 和 1.3 所示。

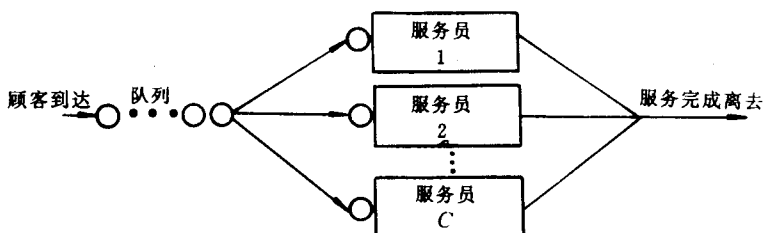


图 1.2 排成一个队列

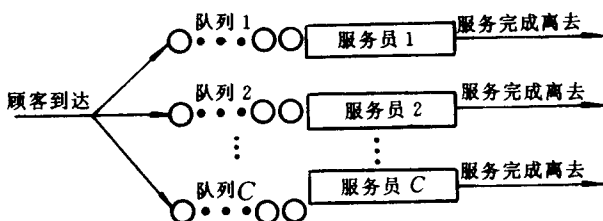


图 1.3 排成多个队列

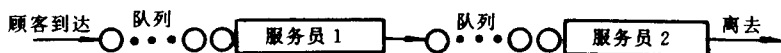


图 1.4 串联

以及串并混合、网络等排队系统。

3. 排队论研究的内容和目的

在各种排队系统中,随机性是它们的一个共同特性,而且起着根本性的作用. 顾客的到达间隔时间与顾客所需的服务时间中,至少有一个具有随机性,否则问题就太简单了. 排队论主要研究描述系统的一些主要指标的概率特性,分为三大部分:

1) 排队系统的性态问题

研究排队系统的性态问题就是研究各种排队系统的概率规律,主要包括系统的队长(系统中的顾客数)、顾客的等待时间和逗留时间,以及忙期等的概率分布,包括它们的瞬时性质和统计平衡下的性态. 排队系统的性态问题是排队论研究的核心,是排队系统的统计推断和最优化问题的基础. 从应用方面考虑,统计平衡下的各个指标的概率性质尤其重要.

2) 排队系统的统计推断

为了了解和掌握一个正在运行的排队系统的规律,就需要通过多次观测、搜集数据,然后用数理统计的方法对得到的数据进行加工处理,推断所观测的排队系统的概率规律,从而应用相应的理论成果来研究和解决该排队系统的有关问题. 排队系统的统计推断是已有理论成果应用实际系统的基础性工作,结合排队系统的特点,发展这类特殊随机过程的统计推断方法是非常必要的.

3) 排队系统的最优化问题

排队系统的最优化包括系统的最优设计(静态最优)和已有系统的最优运行控制(动态最优),前者是在服务系统设置之前,对未来运行的情况有所估计,使设计人员有所依据,例如电话局的规模、水库容量的大小、机场跑道数目的设计等;后者是对已有的排队系统寻求最优运行策略,例如库房领取工具,当排队领取工具的工人太多,就增设服务员,这样虽然增加了服务费用,但另一方面却减少了工人领取工具的等待时间,即增加了工人有效的生产时间,这样带来的好处可能远超过服务费用的增加. 因此,对于一个排队系统的设计或运行管理,就需要考虑顾客与服务双方的利益,以便在某种合理的指标上

使系统达到最优化. 对大多数实际系统讲, 若把输入看作是由客观条件决定的, 不受控制(有时也可采取控制输入的手段), 则解决这种问题的关键是确定服务率或服务台数或选取顾客的服务规则或这几种量的组合, 使之在某种意义下系统达到最优. 优化的指标函数可以是时间, 也可以是费用或收入. 学习和应用排队论知识就是要解决客观系统的最优设计或运行管理, 创造更好的经济效益和社会效益.

4. 排队系统的基本组成部分

尽管排队系统是各种各样的, 但从决定排队系统进程的主要因素看, 它主要由三部分组成: 输入过程、排队规则和服务机构, 下面分别加以说明.

1) 输入过程

输入过程是描述顾客来源及顾客是按怎样的规律抵达排队系统. *a) 顾客总体数*: 顾客来源可能是有限的, 也可能是无限的, 例如工厂内发生故障待修的机器是有限的; 到达窗口购票的顾客总体可以看成是无限的(因为不存在最大的限制数). *b) 到达的类型*: 顾客是单个到达, 或是成批到达, 例如工厂内发生故障待修的机器是单个到达; 在库存问题中, 进货看成顾客到达, 就是成批到达的例子. *c) 相继顾客到达的间隔时间*服从什么样的概率分布, 分布的参数是什么, 到达的间隔时间之间是否独立. 如果设 $T_0 = 0, T_n (n \geq 1)$ 表示第 n 个(批)顾客的到达时刻, 则

$$T_0 = 0 < T_1 < T_2 < \dots < T_n < T_{n+1} < \dots$$

又令 $\tau_n = T_n - T_{n-1}, n \geq 1$, 则 τ_n 表示第 n 个(批)顾客到达时刻与第 $n-1$ 个(批)顾客到达时刻之差, 称序列 $\{\tau_n, n \geq 1\}$ 为顾客相继到达的间隔时间序列. 在排队论研究中, 一般假定 $\{\tau_n, n \geq 1\}$ 相互独立、同分布. 有定长输入, 即顾客是等距时间到达; 最简单流输入(Poisson 流输入), 即 $\{\tau_n, n \geq 1\}$ 独立、同负指数分布; k 阶爱尔朗输入; 超指数分布输入; 几何分布输入; 一般独立输入; 成批输入(每次到达是一批顾客, 每批的个数可以是固定的, 也可以是随机的), 以及其它形式的输入等.